

УДК 539.3

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЖАТОГО СФЕРОИДА С КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

С. С. Куреннов, А. Г. Николаев

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
“Харьковский авиационный институт”, 61070 Харьков, Украина

Обобщенным методом Фурье исследована осесимметричная краевая задача термоупругости для сжатого сфероида с концентрической сферической полостью. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором при условии непересечения граничных поверхностей. Приведены результаты численного анализа напряжений в случае свободных от нагрузки граничных поверхностей при наличии температурного поля, обусловленного постоянным распределением температуры на граничных поверхностях.

Ключевые слова: термоупругость, обобщенный метод Фурье, многосвязные задачи, уравнение Ламе.

Исследование основных краевых задач теории упругости для области, ограниченной поверхностями сфероида и сферы, с помощью обобщенного метода Фурье (ОМФ) в случае отсутствия теплового поля проведено в работе [1]. Указанный метод основан на использовании теорем сложения базисных решений уравнения Ламе для различных канонических односвязных областей [2]. В настоящей работе изучено напряженно-деформированное состояние сфероида со сферической полостью с учетом термоупругих деформаций, обусловленных воздействием произвольного осесимметричного стационарного температурного поля. Для решения этой задачи развит ОМФ решения термоупругих задач для многосвязных областей, ограниченных поверхностями сферы и сжатого сфероида. Впервые ОМФ решения термоупругих многосвязных задач разработан в [3] для областей, ограниченных поверхностями полупространства и шара. В данной работе приведены результаты численного анализа напряжений при различных геометрических параметрах задачи.

1. Введем сонаправленные сферическую (r, θ, φ) и сжатую сфероидальную (ξ, η, φ) системы координат, совмещенные с центрами граничных поверхностей. Эти системы координат связаны формулами $r \sin \theta = c \operatorname{ch} \xi \sin \eta$, $r \cos \theta = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta$, где c — параметр сфероида. Уравнения $r = R$ и $\xi = \xi_0$ определяют граничные поверхности. На поверхности сферы и сфероида температура T задана в виде обобщенных рядов Фурье. Усилия на граничных поверхностях считаются известными. Распределение температуры и напряженно-деформированное состояние определяются в результате решения несвязанной стационарной задачи термоупругости

$$\nabla^2 T = 0; \quad (1)$$

$$\nabla^2 U + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla(\nabla U) = \frac{2(1+\sigma)}{1-2\sigma} \alpha \nabla T; \quad (2)$$

$$T(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta); \quad (3)$$

$$T(\xi_0, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(\cos \eta); \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_R(R, \theta) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n^j P_n^{2-j}(\cos \theta) \mathbf{e}_j; \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_\xi(\xi_0, \theta) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n^j P_n^{2-j}(\cos \eta) \mathbf{e}_j, \quad (6)$$

где T — температурное поле; \mathbf{U} — вектор термоупругих перемещений; σ — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного температурного расширения; $P_n(x)$ — функция Лежандра; \mathbf{F}_ξ , \mathbf{F}_R — векторы усилий на поверхности сфероида и сферы соответственно; $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^2$ — базис цилиндрической системы координат ($\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_2$).

Усилия, создаваемые вектором термоупругих перемещений на площадке с вектором нормали \mathbf{n} , определяются формулой

$$\mathbf{F} = 2G \left(\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) - \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} \alpha T \mathbf{n} \right), \quad (7)$$

где G — модуль сдвига.

Решение осесимметричной задачи теплопроводности (1), (3), (4) ищем в виде суперпозиции сферического и сфероидального решений

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \frac{P_n(iq)}{P_n(iq_0)} P_n(\cos \eta), \quad (8)$$

где C_n^1 , C_n^2 — неизвестные коэффициенты; $q = \operatorname{sh} \xi$; $q_0 = \operatorname{sh} \xi_0$.

При использовании ОМФ задача теплопроводности сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$C_n^1 + R^n \sum_{k=0}^n \frac{C_k^2}{P_k(iq_0)} A_n^k = a_n, \quad (9)$$

$$Q_n(iq_0) \sum_{k=n}^{\infty} C_k^1 R^{k+1} B_n^k + C_n^2 = b_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где A_n^k , B_n^k — коэффициенты в теоремах сложения, приведенные в работе [4].

Решение неоднородного дифференциального уравнения Ламе (2) ищем в виде суммы общего однородного решения \mathbf{U}_0 и частного неоднородного решения. Так как правая часть уравнения (2) зависит от температуры, которая согласно (8) представима в виде суммы двух составляющих: сферической и сфероидальной, то и частное решение (2) ищем в виде суммы двух решений, соответствующих сферической (\mathbf{U}_1^T) и сфероидальной (\mathbf{U}_2^T) составляющим температуры:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1^T + \mathbf{U}_2^T.$$

Общее решение однородного уравнения Ламе ищем в виде суперпозиции внешних сферических и внутренних сфероидальных базисных решений

$$\mathbf{U}_0 = \sum_{s=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^s \frac{R^{n+1}}{n!} \mathbf{W}_{s,n}^+ + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^s \frac{1}{P_n(iq_0)} \mathbf{U}_{s,n}^- \right),$$

где a_n^s, b_n^s — неизвестные коэффициенты; $\mathbf{W}_{s,n}^\pm, \mathbf{U}_{s,n}^\pm$ — осесимметричные варианты общих базисных решений уравнения Ламе для шара и сжатого сфероида, построенных в [5] (решения для сжатого сфероида получаются из решений для вытянутого сфероида заменой ξ на $\xi + i\pi/2$ и c на $-ic$); индексы “+” и “-” обозначают внешние и внутренние решения соответственно.

Частное решение неоднородного уравнения Ламе (2), соответствующее сферической составляющей температуры, ищем в виде

$$\mathbf{U}_1^T = \nabla r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{n!}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Неизвестные коэффициенты α_n определяются при подстановке \mathbf{U}_1^T в (2):

$$\alpha_n = \alpha \frac{1 + \sigma}{2 - 2\sigma} \frac{C_n^1}{1 - 2n}.$$

Усилия на поверхности сферы, создаваемые \mathbf{U}_1^T и сферической составляющей температуры (8), находим по формуле (7), взяв в качестве нормали вектор $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta$. После преобразований получаем

$$\mathbf{F}_1^T(R, \theta) = 2G\alpha \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \sigma}{2(1 - \sigma)} \tau_{11,n}^j - \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} T_{11,n}^j \right) P_n^{2-j}(\cos \theta) \mathbf{e}_j,$$

$$\tau_{11,0}^j = C_0^1 \omega_{11,0}^{1j} + C_1^1 \omega_{11,1}^{1j}, \quad \omega_{11,n}^j = \frac{C_{n-1}^1}{1 - 2n} \omega_{11,n-1}^{1j} - \frac{C_{n+1}^1}{1 + 2n} \omega_{11,n+1}^{2j} \quad (n > 1),$$

$$\omega_n^{1j} = \frac{\delta_{j1} + n\delta_{j2}}{2n + 1} \left(\frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} (1 - 2n) + n(n - 1) - \frac{n(n + 1)}{2n + 1} \right),$$

$$\omega_n^{2j} = \frac{-\delta_{j1} + (n + 1)\delta_{j2}}{2n + 1} \left(\frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} (1 - 2n) + n(n - 1) + \frac{n^2}{2n + 1} \right),$$

$$T_{11,0}^j = \delta_{j1} C_0^1 + \frac{C_1^1}{3}, \quad T_{11,n}^j = \frac{1 + n\delta_{j2}}{2n + 3} C_{n+1}^1 + \frac{n\delta_{j2} - \delta_{j1}}{2n - 1} C_{n-1}^1 \quad (n > 1),$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Для удовлетворения граничным условиям на поверхности сфероида (6) необходимо найти разложения в обобщенный ряд Фурье усилий, создаваемых \mathbf{U}_1^T и сферической составляющей температуры (8) на поверхности сфероида. С этой целью \mathbf{U}_1^T и сферическая составляющая температуры, предварительно записанные в сфероидальной системе координат с использованием теорем сложения, приведенных в работах [2, 5], подставляются в (7), где в качестве нормали берется внешняя нормаль сфероида $\mathbf{e}_\xi = h(q\mathbf{e}_\theta \sin \eta + p\mathbf{e}_z \cos \eta)$ ($h = (q^2 + \cos^2 \eta)^{-1/2}$; $p = \text{ch } \xi$). В результате получаем

$$\mathbf{F}_1^T(\xi_0, \eta) = 2\alpha Gh \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \sigma}{2 - 2\sigma} \tau_{12,n}^j - \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} T_{12,n}^j \right) P_n^{2-j}(\cos \eta) \mathbf{e}_j,$$

$$\tau_{12,n}^j = \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} (q\delta_{j1} + p\delta_{j2}) \omega_{12,n}^{1j} + cS_{1,n}^j + 2S_{2,n}^j,$$

$$\omega_{12,0}^{1j} = \delta_{j1} Q_0(iq) \Omega_{12,0}^1 + \frac{1}{3} Q_1(iq) \Omega_{12,1}^1, \quad \Omega_{12,n}^1 = \sum_{k=0}^n C_k^1 R^{k+1} B_k^n,$$

$$\omega_{12,n}^{1j} = \frac{\delta_{j2}n + 1}{2n + 3} Q_{n+1}(iq)\Omega_{12,n+1}^1 + \frac{\delta_{j2}n - \delta_{j1}}{2n - 1} Q_{n-1}(iq)\Omega_{12,n-1}^1 \quad (n > 1),$$

$$S_{1,n}^j = \omega_{12,n}^{2j} - 2p\Omega_{12,n}^2 \left(qQ_n^{j-2}(iq) - p \frac{\partial Q_n^{j-2}(iq)}{\partial \xi} \right), \quad \Omega_{12,n}^2 = \sum_{k=1}^n \frac{C_{k-1}^1 R^k}{3 - 2k} \frac{(g^+)_k^n}{(k-1)!},$$

$$\beta_n^1 = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \beta_n^2 = \frac{n}{2n+1}, \quad \gamma_{12,0}^j = \sum_{n=1}^2 \beta_n^j \Omega_{12,n}^2 \frac{\partial Q_n^{j-2}(iq)}{\partial \xi},$$

$$\gamma_{12,n}^j = \beta_{n+1}^j \Omega_{12,n+1}^2 \frac{\partial Q_{n+1}^{j-2}(iq)}{\partial \xi} + \beta_{n-1}^{3-j} \Omega_{12,n-1}^2 \frac{\partial Q_{n-1}^{j-2}(iq)}{\partial \xi} \quad (n > 1),$$

$$\omega_{12,0}^{2j} = \sum_{n=0}^1 \gamma_{12,n}^j \beta_n^j, \quad \omega_{12,n}^{2j} = \gamma_{12,n+1}^j \beta_{n+1}^j + \gamma_{12,n-1}^j \beta_{n-1}^{3-j},$$

$$\Omega_{12,n}^3 = \sum_{k=0}^n \frac{C_k^1}{1 - 2k} R^{k+1} B_k^n, \quad \omega_{12,n}^{3j} = qQ_n^{j-1}(iq) + pQ_n^{2-j}(iq),$$

$$S_{2,0}^j = \delta_{j1} \omega_{12,0}^{3j} + \omega_{12,1}^{3j} / 3,$$

$$S_{2,n}^j = \frac{\delta_{j2}n + 1}{2n + 3} \omega_{12,n+1}^{3j} + \frac{\delta_{j2}n - \delta_{j1}}{2n - 1} \omega_{12,n-1}^{3j} \quad (n > 1),$$

$$T_{12,0}^j = (\delta_{j1}q + \delta_{j2}p)(\delta_{j1}\Omega_{12,0}^1 Q_0(iq) + \Omega_{12,1}^1 Q_1(iq)),$$

$$T_{12,n}^j = (\delta_{j1}q + \delta_{j2}p) \left(\frac{\delta_{j1} + \delta_{j2}n}{2n + 1} \Omega_{12,n+1}^1 Q_{n+1}(iq) + \frac{\delta_{j2}(n+1) - \delta_{j1}}{2n - 1} \Omega_{12,n+1}^1 Q_{n+1}(iq) \right) \quad (n > 1).$$

Здесь $(g^\pm)_n^k$ — коэффициенты в векторных теоремах сложения общих базисных решений уравнения Ламе для шара и сжатого сфероида, полученные в работах [2, 5].

Частное решение неоднородного уравнения Ламе (2), соответствующее сфероидальной составляющей температуры (8), ищем в виде

$$\mathbf{U}_2^T = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z \mathbf{U}_{1,n}^-.$$

Коэффициенты β_n определяются при подстановке \mathbf{U}_2^T в уравнение Ламе (2):

$$\beta_n = \alpha \frac{2 - 2\sigma}{4\sigma - 3} \frac{C_n^2}{P_n(iq_0)}.$$

Создаваемые усилия найдем по формуле (7), взяв в качестве нормали \mathbf{e}_ξ . В результате получаем

$$\mathbf{F}_2^T(\xi_0, \eta) = 2G\alpha h \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 - 2\sigma}{4\sigma - 3} \tau_{22,n}^j - \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} T_{22,n}^j \right) P_n^{2-j}(\cos \eta) \mathbf{e}_j,$$

$$\tau_{22,0}^j = \frac{C_0^2 \omega_{22,0}^{1j}}{P_0(iq_0)} + \frac{C_1^2 \omega_{22,1}^{1j}}{P_1(iq_0)}, \quad \tau_{22,n}^j = \frac{C_{n-1}^2 \omega_{22,n-1}^{1j}}{P_{n-1}(iq_0)} + \frac{C_{n+1}^2 \omega_{22,n+1}^{2j}}{P_{n+1}(iq_0)},$$

$$\omega_{22,n}^{j1} = \frac{1}{2n + 1} \left(\chi_n^1(n + \delta_{j1}) - (\delta_{j1} - \delta_{j2}) \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} q P_n(iq) \right),$$

$$\begin{aligned}\omega_{22,n}^{j2} &= \frac{n + \delta_{j2}}{2n + 1} \left(\chi_n^2 + (\delta_{j1} - \delta_{j2})(n + \delta_{j1}) \frac{qP_n^{-1}(iq)}{2} \right), \\ \chi_n^1 &= \left(\frac{q^2}{p} (n + 1) - \frac{p}{2} \right) P_n^{-1}(iq) + i \frac{q}{p} (n + 1) P_{n+1}^{-1}(iq), \\ \chi_n^2 &= -qP_n^1(iq) - \frac{1 - \sigma}{1 - 2\sigma} pP_n(iq), \quad T_{22,0}^j = (\delta_{j1}q + \delta_{j2}p) \left(\delta_{j1}C_0^2 + \frac{1}{3}C_1^2 \right), \\ T_{22,n}^j &= (\delta_{j1}q + \delta_{j2}p) \left(\frac{\delta_{j1} + \delta_{j2}n}{2n + 3} C_{n+1}^2 + \frac{\delta_{j2}n - \delta_{j1}}{2n - 1} C_{n-1}^2 \right) \quad (n > 1).\end{aligned}$$

Используя теоремы сложения, усилия, соответствующие U_2^T и сфероидальной составляющей температуры, на поверхности сферы можно записать в виде

$$F_2^T(R, \theta) = 2G\alpha \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 - 2\sigma}{4\sigma - 3} \tau_{21,n}^j - \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} T_{21,n}^j \right) P_n^{2-j}(\cos \theta) e_j,$$

$$\omega_{21,0}^j = \sum_{k=0}^1 R^k \Omega_{21,k}^1 \omega_{21,k}^{2j},$$

$$\tau_{21,n}^j = \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} \Omega_{21,n-1}^1 \omega_{21,n-1}^{2j} + \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \Omega_{21,n+1}^1 \omega_{21,n+1}^{1j},$$

$$\omega_{21,n}^{j1} = \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \frac{\delta_{j2} - \delta_{j1}}{2n + 1} + \left(\frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{2n + 2} \right) \frac{n + \delta_{j2}}{2n + 1},$$

$$\omega_{21,n}^{j2} = \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{\delta_{j1} - \delta_{j2}}{2n+2} + \left(\frac{1 - \sigma}{1 - 2\sigma} + n \right) \frac{n + \delta_{j1}}{2n + 1},$$

$$\Omega_{21,n}^1 = - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^2}{P_n(iq_0)} (g^-)_k,$$

$$T_{21,0}^j = \delta_{j1} \Omega_{21,0}^T + \frac{\Omega_{21,1}^T}{3}, \quad \Omega_{21,n}^T = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^2}{P_n(iq_0)} A_k^n,$$

$$T_{21,n}^j = \frac{1 + n\delta_{j2}}{2n + 3} R^{n+1} \Omega_{21,n+1}^T + \frac{n\delta_{j2} - \delta_{j1}}{2n - 1} R^{n-1} \Omega_{21,n-1}^T \quad (n > 1).$$

Удовлетворяя условиям на граничных поверхностях (5) и (6), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n^s, b_n^s

$$\sum_{i=1}^2 \left(s_{n,j}^i a_n^i + \sum_{k=0}^n t_{n,k}^{i,j} b_k^i \right) = A_{n,j}^1, \quad \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} s_{n,j}^{i+2,n} a_n^i + t_{n,j}^{i+2} b_n^i \right) = A_{n,j}^2 \quad (10)$$

$$(j = 1, 2, n = 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты системы (10) получаются из коэффициентов аналогичной системы для вытянутого сфероида, приведенных в работе [1], путем подстановки $a = 0$ и замены ξ на $\xi + i\pi/2$ и c на $-ic$. Так же, как в работе [1], с помощью оценок, приведенных в работе [6], можно показать, что в случае непересечения граничных поверхностей операторы систем (9), (10) являются фредгольмовыми, что позволяет решать систему методом редукции.

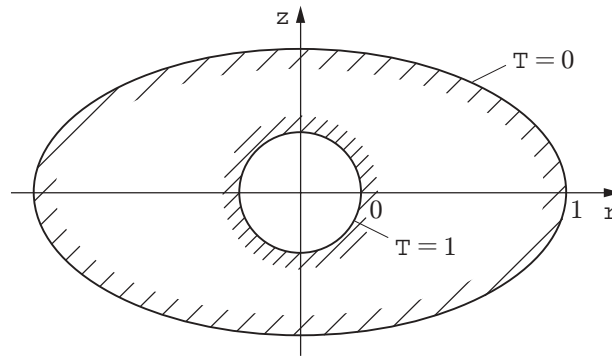


Рис. 1

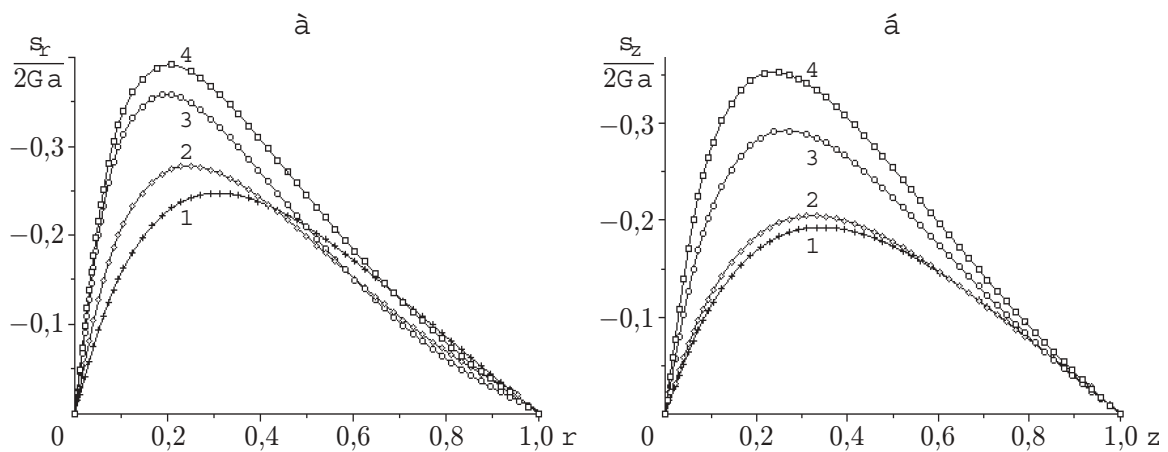


Рис. 2

В системе (10) правые части имеют вид

$$A_{n,j}^1 = v_n^j - \alpha \frac{1 + \sigma}{2(1 - \sigma)} \tau_{11,n}^j - \alpha \frac{2 - 2\sigma}{4\sigma - 3} \tau_{21,n}^j + \alpha \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} (T_{11,n}^j + T_{21,n}^j),$$

$$A_{n,j}^2 = w_n^j - \alpha \frac{1 + \sigma}{2(1 - \sigma)} \tau_{12,n}^j - \alpha \frac{2 - 2\sigma}{4\sigma - 3} \tau_{22,n}^j + \alpha \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} (T_{22,n}^j + T_{12,n}^j).$$

2. Численный анализ задачи проводился для следующих параметров: $R = 1$, $\sigma = 0,25$. Границы свободны от нагрузки; температура внутренней поверхности ($r = R$) равна единице, а внешней ($\xi = \xi_0$) — нулю (рис. 1).

На рис. 2,а приведены распределения термоупругих напряжений на площадках, нормальных e_r , в фокальной плоскости сфероида, на рис. 2,б — распределения термоупругих напряжений на площадках, расположенных на оси z и нормальных e_z . Кривые 1–4 соответствуют длинам большей и меньшей полуосей сфероида $(2,0; 1,5)$, $(2,5; 1,5)$, $(10/3; 2,0)$, $(10/3; 2,5)$, которые получаются при следующих значениях ξ_0 и c : $(1,323; 0,973)$, $(2,0; 0,693)$, $(2,667; 0,693)$, $(2,205; 0,973)$.

Результаты исследования напряженно-деформированного состояния показывают, что характер распределения напряжений зависит от расстояния между граничными поверхностями в выбранном направлении, причем значения напряжений минимальны как в случае, если размеры сфероида близки к размеру сферы (кривые 1, 2), так и в случае, если размеры сфероида превышают размеры сферы на порядок. Последнее можно объяснить уменьшением влияния внешней поверхности на напряженно-деформированное состояние в окрестности сферы: сфероид не оказывает влияния на сферу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Николаев А. Г., Проценко В. С.** Первая и вторая основные осесимметричные задачи теории упругости для двусвязных областей, ограниченных поверхностями сферы и сфероида // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 1. С. 65–74.
2. **Николаев А. Г.** Теоремы сложения решений уравнения Ламе / Харьк. авиац. ин-т. Харьков, 1993. Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178-Ук93.
3. **Николаев А. Г., Томилова Е. П.** Некоторые стационарные осесимметричные задачи термоупругости для полупространства со сферической полостью / Харьк. авиац. ин-т. Харьков, 1988. Деп. в ВИНТИ 21.09.88, № 7062-В88.
4. **Проценко В. С.** Формулы переразложения гармонических функций в сферической и сжато-сфероидальной системах координат // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 6. С. 33, 34.
5. **Николаев А. Г.** Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат // Математические методы анализа динамических систем: Темат. сб. науч. тр. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1984. Вып. 8. С. 100–104.
6. **Николаев А. Г.** Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. 1998. № 6. С. 78–83.

*Поступила в редакцию 18/IX 2002 г.,
в окончательном варианте — 2/VI 2003 г.*
