ПМТФ, № 2, 1963

ОБ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СЛОИСТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

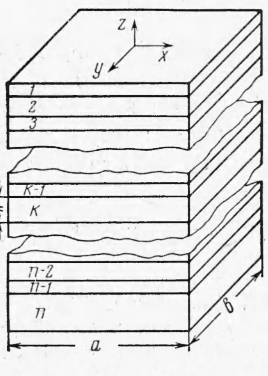
В. М. Гольдфарб, А. В. Степанов

(*Ленинград*)

В работах [1–4] рассматривались некоторые особенности поведения неоднородных сред под действием внешних сил. В работах С. Г. Лехницкого, С. А. Амбарцумяна и ряда других авторов (см., например, [5–10]) рассматривалась задача об изгибе и устойчивости стержней, пластин и оболочек, состоящих из конечного числа слоев (точнее, из такого числа слоев, при котором необходимо учитывать различие напряжений в слоях из-за неоднородности напряженного состояния).

Ниже рассматривается среда, для которой в пределах объема с достаточно однородным напряженным состоянием укладывается большое число слоев. Для такой среды, которую будем называть мелкослоистой, можно определить напряженное состояние и деформации не только для тех случаев, когда напряжения, перпендикулярные к плоскостям слоев, малы, но и при произвольном способе нагружения. Нахождение связи между свойствами отдельных слоев и свойствами среды в целом, т.е. определение упругих постоянных среды позволяет получить некоторые данные о структуре твердого тела, а также сводить решение некоторых задач (растяжение, изгиб, кручение) для мелкослоистых сред к известным решениям этих задач для однородных анизотропных сред.

§ 1. Упругие постоянные слоистой среды. Рассмотрим элемент среды, состоящий из слоев, расположенных в произвольном порядке (фиг. 1). Сделаем следующие предположения.



Фиг. 1. Элемент слоистой среды

1. Слои изотропны; свойства k-го слоя определяются значениями модуля упругости E_k, коэффициента Пуассона ν_k и толщины s_k.

2. Слои жестко связаны между собой (скольжение по плоскостям раздела невозможно).

3. Толщины слоев малы по сравнению с поперечными размерами элемента

$$a / s_k, \quad b / s_k \gg 1$$

4. Распределение внешних усилий таково, что уравновешивающие их усредненные по слоям напряжения, которые будем задавать компонентами $\langle\sigma_x\rangle$, $\langle\sigma_y\rangle$, $\langle\sigma_z\rangle$, $\langle\tau_{yx}\rangle$, $\langle\tau_{xz}\rangle$, $\langle\tau_{yz}\rangle$ по граням элемента, можно считать постоянными в пределах последнего.

Чем менее однородно напряженное состояние, тем более «тонкой» должна быть структура, чтобы достаточное число слоев укладывалось в пределах объема, где напряженное состояние еще может считаться однородным.

5. Напряженное состояние в пределах каждого слоя однородно. Это положение справедливо для больших значений a / s_k, когда можно не принимать во внимание особенности в распределении напряжений вблизи свободных краев каждого слоя. Однородность напряженного состояния во внутренней области каждого слоя показана в работе [11].

Можно отвлечься от неоднородности слоистой структуры и рассматривать ее как однородную анизотропную среду, обладающую симметрией относительно оси, перпендикулярной к плоскости слоев. Тогда усредненные напряжения и усредненные деформации элемента могут быть связаны между собой уравнениями обобщенного закона Гука, который для данной упругой симметрии среды имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle\varepsilon_x\rangle &= s_{11}\langle\sigma_x\rangle + s_{12}\langle\sigma_y\rangle + s_{13}\langle\sigma_z\rangle, & \langle\gamma_{yz}\rangle &= s_{44}\langle\tau_{xz}\rangle \\
\langle\varepsilon_y\rangle &= s_{12}\langle\sigma_x\rangle + s_{11}\langle\sigma_y\rangle + s_{13}\langle\sigma_z\rangle, & \langle\gamma_{xz}\rangle &= s_{44}\langle\tau_{yz}\rangle \qquad (1.1)\\
\langle\varepsilon_z\rangle &= s_{13}\langle\sigma_x\rangle + s_{13}\langle\sigma_y\rangle + s_{33}\langle\sigma_z\rangle, & \langle\gamma_{xy}\rangle &= 2(s_{11}-s_{12})\langle\tau_{xy}\rangle
\end{aligned}$$

где s_{lm} — упругие постоянные.

Теперь, приняв во внимание неоднородность среды, установим зависимость между коэффициентами s_{lm} и свойствами слоев (значениями E_k, ν_k, s_k), а также между напряжениями в отдельных слоях и усредненными напряжениями и деформациями. Равенство усилий, действующих на элемент поверхности раздела между k — 1-м и k-м слоями, приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^{k-1}\cos(nx) + \tau_{xy}^{k-1}\cos(ny) + \tau_{xz}^{k-1}\cos(nz) = \\
&\quad = \sigma_x^k\cos(nx) + \tau_{xy}^k\cos(ny) + \tau_{xz}^k\cos(nz) \\
&\tau_{xy}^{k-1}\cos(nx) + \sigma_y^{k-1}\cos(ny) + \tau_{yz}^{k-1}\cos(nz) = \\
&\quad = \tau_{xy}^k\cos(nx) + \sigma_y^k\cos(ny) + \tau_{yz}^k\cos(nz) \\
&\tau_{xz}^{k-1}\cos(nx) + \tau_{yz}^{k-1}\cos(ny) + \sigma_z^{k-1}\cos(nz) = \\
&\quad = \tau_{xz}^k\cos(nx) + \tau_{yz}^k\cos(ny) + \sigma_z^k\cos(nz) \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Жесткая связь между слоями и однородность деформации в пределах каждого слоя обусловливают равенство составляющих деформации, параллельных поверхности раздела между слоями

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E_{k-1}}[\sigma_x^{k-1} - \nu_{k-1}(\sigma_z^{k-1} + \sigma_y^{k-1})] = \frac{1}{E_k}[\sigma_x^k - \nu_k(\sigma_z^k + \sigma_y^k)] \\
&\frac{1}{E_{k-1}}[\sigma_y^{k-1} - \nu_{k-1}(\sigma_x^{k-1} + \sigma_z^{k-1})] = \frac{1}{E_k}[\sigma_y^k - \nu_k(\sigma_x^k + \sigma_z^k)] \qquad (1.3) \\
&\frac{\tau_{xy}^{k-1}(1-\nu_{k-1})}{2E_{k-1}} = \frac{\tau_{xy}^k(1-\nu_k)}{2E_k}
\end{aligned}$$

Усредненные напряжения и другие усредненные по слоям величины вычисляются по формулам вида

$$\langle A\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_k s_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} s_k \qquad (1.4)$$

где A_k — значение A для k-го слоя.

Из уравнений (1.2), (1.3), (1.4) могут быть получены выражения для коэффициентов

$$s_{11} = \frac{\langle F\rangle + \langle G\rangle\nu_1}{E_1(\langle F\rangle^2 - \langle G\rangle^2)}, \qquad s_{12} = \frac{-\langle G\rangle - \langle F\rangle\nu_1}{E_1(\langle F\rangle^2 - \langle G\rangle^2)}, \qquad s_{44} = \left\langle\frac{1+\nu}{E}\right\rangle$$

$$s_{13} = \frac{\langle H\rangle(\langle F\rangle - \langle G\rangle)(1-\nu_1) - \nu_1(\langle F\rangle^2 - \langle G\rangle^2)}{E_1(\langle F\rangle^2 - \langle G\rangle^2)} \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
s_{33} = \frac{1}{E_1(\langle F\rangle^2 - \langle G\rangle^2)}\{(\langle F\rangle^2 - \langle G\rangle^2) + 2\nu_k[\langle H\rangle(\langle F\rangle - \\
- \langle G\rangle)(F_k + G_k) + H_k]\}
\end{aligned}$$

Здесь F_k (или G_k) представляет собой сумму 2^{k-2} членов, каждый из которых есть произведение $k-1$ множителей f и g, взятых так, что из $k-1$ первоначальных множителей f четное (или соответственно нечетное) число заменено на g, например

$$F_4 = \sum_{i=2}^{4} \Pi f_i g_i = f_2 f_3 f_4 + f_2 g_3 g_4 + g_2 f_3 g_4 + g_2 g_3 f_4$$

$$G_4 = \sum_{i=2}^{4} \Pi f_i g_i = f_2 f_3 f_4 + f_2 f_3 g_4 + f_2 g_3 f_4 + g_2 f_3 f_4$$

$$H_k = \sum_{i=2}^{k} h_i \prod_{j=i+1}^{k} (f_j + g_j)$$

$$f_i = \frac{E_i}{E_{i-1}} \frac{1-\nu_{i-1}\nu_i}{1-\nu_i^2}, \qquad g_i = \frac{E_i}{E_{i-1}} \frac{\nu_i - \nu_{i-1}}{1-\nu_i^2}, \qquad h_i = \frac{\nu_i E_{i-1} - \nu_{i-1} E_i}{E_{i-1}(1-\nu_i)} \qquad (1.6)$$

Уравнения (1.5) упрощаются, если среда состоит только из двух видов слоев, чередующихся между собой. В этом случае

$$s_{11} = \frac{F + G\nu_1}{E_1(F^2 - G^2)}, \qquad s_{13} = \frac{-H(F-G)(1-\nu_1) - \nu_1(F^2-G^2)}{E_1(F^2-G^2)}$$

$$s_{12} = \frac{-G - F\nu_1}{E_1(F^2-G^2)}, \qquad s_{44} = \frac{2E_2(1+\nu_1) + 2kE_1(1+\nu_2)}{E_1E_2(1+k)} \qquad (1.7)$$

$$s_{33} = \frac{(E_2 + kE_1)(G^2 - F^2) - 2\nu_1 E_2 (F-G) H - 2\nu_2 k E_1 [(F-G)H(f-g) + h(F^2-G^2)]}{E_1E_2(1+k)(G^2-F^2)}$$

Здесь

$$F = \frac{1+kf}{1+k}, \qquad G = \frac{kg}{1+k}, \qquad H = \frac{kh}{1+k}, \qquad k = \frac{s_2}{s_1}$$

Если, кроме того, коэффициенты Пуассона слоев одинаковы, то

$$s_{11} = \frac{1+k}{E_1(1+\alpha k)}, \qquad s_{12} = s_{13} = -\nu s_{11} \qquad \left(\alpha = \frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$s_{33} = \frac{s_{44}}{2(1+\nu)} - \frac{2\nu^2 k(1-\alpha)^2}{E(1-\nu)(1+k)\alpha(1+\alpha k)}, \qquad s_{44} = \frac{2(1+\nu)(\alpha+k)}{E_1\alpha(1+k)} \qquad (1.8)$$

Пользуясь формулами (1.7) и (1.8), можно свести некоторые задачи механики неоднородной среды к соответствующим задачам для однородной среды, решение которых известно. На фиг. 2, *а*, *б*, *в* показаны линии равных радиальных напряжений ($\sigma_r = 2$, 1, 0.5, 0.25) в слоистой полуплоскости, находящейся под действием сосредоточенной силы $P = 1$, для случаев, когда направление слоев составляет 0, 90, 45° с направлением действия силы; параметры слоев $E_1 = 1$, $\alpha = 10$, $k = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$. Расчет проводился по формуле [12]

$$\sigma_r = -\frac{P(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1\beta_2 \cos\omega \cos\varphi + \sin\omega \sin\varphi)}{\pi r [\sin^4\varphi + (\beta_1^2 + \beta_2^2)\sin^2\varphi \cos^2\varphi + \beta_1^2\beta_2^2 \cos^4\varphi]}$$

Здесь $\beta_{1,2}$ — корни характеристического уравнения

$$s_{33}\lambda^4 + (2s_{13} + s_{44})\lambda^2 + s_{11} = 0$$

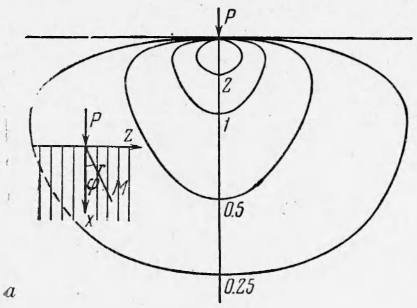
Необходимо отметить, что из-за неоднородности напряженного состояния решение будет приближенным; оно непригодно для расстояний от точки приложения нагрузки, меньших 3—4 толщин слоев.

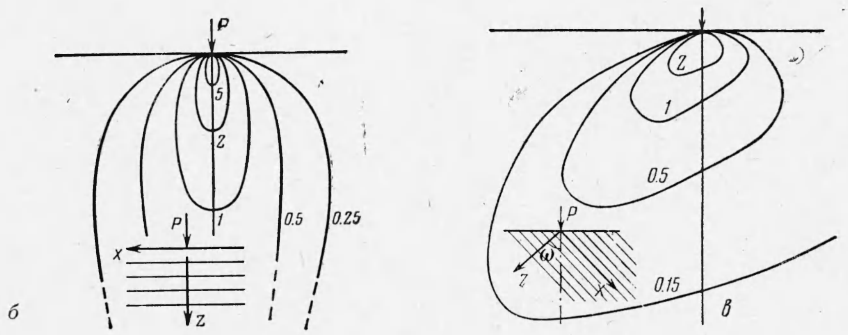
Вместо коэффициентов s_{lm} можно ввести модули Юнга и сдвига и коэффициенты Пуассона. Выражения для этих величин легко получить из формул (1.6), (1.7), (1.8). Пользуясь формулами

$$\frac{1}{E_\varphi} = s_{33}' = s_{11}\sin^4\varphi + s_{33}\cos^4\varphi + 2\,(s_{13} + s_{44})\sin^2\varphi\cos^2\varphi \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{G_\varphi} = \frac{1}{2}\,(s_{44}' + s_{55}') = s_{44} + \left(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2}s_{44}\right)\cos^2\varphi + $$
$$+ 2\,(s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44})\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

(здесь φ — угол между направлением растяжения или осью кручения цилиндрического образца и нормалью к плоскости слоев), можно получить зависимость модуля Юнга и модуля сдвига слоистого материала от ориентации внешних усилий растяжения и сдвига по отношению к слоям. На фиг. 3 и 4 приводятся направляющие кривые модуля Юнга $r = E_\varphi/E_0$ и модуля сдвига $r = G_\varphi/G_0$ для $\alpha = 10$, $k = 1$ и значений $\nu = \nu_1 = \nu_2$, равных 0 и 0.3. Выбирая определенные комбинации E_k, ν_k, s_k, можно «моделировать» в отношении упругих свойств анизотропные материалы с гексагональной симметрией слоистыми материалами.





Фиг. 2, *а*, *б*, *в*. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость при различной ориентации слоев; линии равных радиальных напряжений σ_r

§ 2. Напряжения в слоях. Напряжения в k-м слое могут быть выражены через компоненты усредненного напряженного состояния. Для общего случая получим

$$\sigma_x^k = \frac{1}{\langle G\rangle^2 - \langle F\rangle^2}\{[-\langle F\rangle\langle\sigma_x\rangle + \langle G\rangle\langle\sigma_y\rangle + \langle H\rangle(\langle F\rangle - \langle G\rangle)\langle\sigma_z\rangle]\,F_k +$$
$$+ [\langle G\rangle\langle\sigma_x\rangle - \langle F\rangle\langle\sigma_y\rangle + \langle H\rangle(\langle F\rangle - \langle G\rangle)\langle\sigma_z\rangle]\,G_k + H_k\langle\sigma_z\rangle\}$$

$$\sigma_y^k = \frac{1}{\langle G\rangle^2 - \langle F\rangle^2}\{[-\langle F\rangle\langle\sigma_x\rangle + \langle G\rangle\langle\sigma_y\rangle + \langle H\rangle(\langle F\rangle - \langle G\rangle)\langle\sigma_z\rangle]\,G_k +$$
$$+ [\langle G\rangle\langle\sigma_x\rangle - \langle F\rangle\langle\sigma_y\rangle + \langle H\rangle(\langle F\rangle - \langle G\rangle)\langle\sigma_z\rangle]\,G_k + H_k\langle\sigma_z\rangle\} \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy}^k = \frac{E_k}{1+\nu_k}\,\frac{1}{\langle E/(1-\nu)\rangle}\langle\tau_{xy}\rangle, \qquad \sigma_z^k = \langle\sigma_z\rangle, \qquad \tau_{xz}^k = \langle\tau_{xz}\rangle, \qquad \tau_{yz}^k = \langle\tau_{yz}\rangle$$

Для системы, состоящей из двух слоев с равными ν, выражения для напряжений принимают вид (2.2)

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{1}{1+\alpha k}\left[(1+k)\langle\sigma_x\rangle - \frac{k\nu(1-\alpha)}{1-\nu}\langle\sigma_z\rangle\right], \qquad \tau_{xy}^{(1)} = \frac{1+k}{1+\alpha k}\langle\tau_{xy}\rangle$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{1}{1+\alpha k}\left[\alpha(1+k)\langle\sigma_x\rangle + \frac{\nu(1-\alpha k)}{1-\nu}\langle\sigma_z\rangle\right], \qquad \tau_{xy}^{(2)} = \frac{\alpha(1+k)}{1+\alpha k}\langle\tau_{xy}\rangle$$

$$\sigma_y^{(1)} = \frac{1}{1+\alpha k}\left[(1+k)\langle\sigma_y\rangle - \frac{k\nu(1-\alpha)}{1-\nu}\langle\delta_z\rangle,\right. \qquad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = \langle\sigma_z\rangle$$

$$\sigma_y^{(2)} = \frac{1}{1+\alpha k}\left[\alpha(1+k)\langle\sigma_y\rangle + \frac{\nu(1-\alpha k)}{1-\nu}\langle\sigma_z\rangle\right], \qquad \begin{array}{l}\tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)} = \langle\tau_{xz}\rangle \\ \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = \langle\tau_{yz}\rangle\end{array}$$

качестве простейшего примера рассмотрим напряженное состояние, возникающее в слоистом образце при одноосном растяжении (фиг. 5). Формулы (2.2) дают

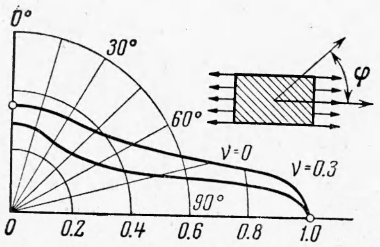
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{p}{1+\alpha k}\left[(1+k)\sin^2\varphi - \frac{k\nu(1-\alpha)}{1-\nu}\cos^2\varphi\right], \qquad \sigma_y^{(1)} = -\frac{p\cos^2\varphi k\nu(1-\alpha k)}{(1+\alpha k)(1-\nu)}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{p}{1+\alpha k}\left[\alpha(1+k)\sin^2\varphi + \frac{\nu(1-\alpha k)}{1-\nu}\cos^2\varphi\right], \qquad \sigma_y^{(2)} = \frac{p\cos^2\varphi\nu(1-\alpha k)}{(1+\alpha k)(1-\nu)}$$

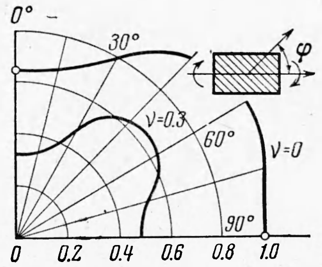
$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = p\cos^2\varphi, \qquad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)} = p\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} = \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = 0 \tag{2.3}$$

Если $\alpha \neq 1$, то каждый слой находится в объемном напряженном состоянии; слои с большим значением E в своей плоскости сжаты, слои с меньшим E — растянуты.



Фиг. 3. Ориентационная зависимость модуля растяжения для $\alpha = 10$, $k = 1$



Фиг. 4. Ориентационная зависимость модуля сдвига для $\alpha = 10$, $k = 1$

§ 3. **Анизотропные слои.** Для среды, состоящей из анизотропных слоев, расчет проводится без затруднений для частного случая. Пусть среда состоит из чередующихся слоев двух видов и материал слоев ориентирован таким образом, что в координатной системе, одна из осей которой перпендикулярна к плоскости слоев, коэффициенты, выражающие связь между нормальными напряжениями и тангенциальными деформациями и тангенциальными напряжениями и нормальными деформациями, обращаются в нуль. Тогда для определения усредненных упругих постоянных и напряжений в слоях получаются следующие формулы:

$$\sigma_x' = \frac{F_2 \langle\sigma_x\rangle - G_1 \langle\sigma_y\rangle + (G_1H_2 - F_2H_1) \langle\sigma_z\rangle}{D}$$

$$\sigma_y' = \frac{-G_2 \langle\sigma_x\rangle + F_1 \langle\sigma_y\rangle + (G_2H_1 - F_1H_2) \langle\sigma_z\rangle}{D}$$

$$\tau_{xy}' = \frac{s_{66}''(1+k)\langle\tau_{xy}\rangle - k(s_{64}' - s_{64}'')\langle\tau_{yz}\rangle - k(s_{65}' - s_{65}')\langle\tau_{xz}\rangle}{s_{66}'' + ks_{66}'} \qquad (3.1)$$

$$\sigma_x'' = f_1\sigma_x' + g_1\sigma_y' + h_1\langle\sigma_z\rangle, \quad \sigma_y'' = g_2\sigma_x' + f_2\sigma_y' + h_2\langle\sigma_z\rangle, \quad \sigma_z' = \sigma_z'' = \langle\sigma_z\rangle$$

$$\tau_{xy}'' = \frac{(s_{64}' - s_{64}'')\langle\tau_{yz}\rangle + (s_{65}' - s_{65}'')\langle\tau_{xz}\rangle + s_{66}'\tau_{xy}'}{s_{66}''}$$

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz}'' = \langle\tau_{xz}\rangle, \qquad \tau_{yz}' = \tau_{yz}'' = \langle\tau_{yz}\rangle$$

$$s_{11} = \frac{1}{D}(F_2s_{11}' - G_2s_{12}'), \qquad s_{21} = \frac{1}{D}(F_2s_{21}' - G_2s_{22}')$$

$$s_{12} = \frac{1}{D}(-G_1s_{11}' - F_1s_{12}'), \qquad s_{22} = \frac{1}{D}(-G_1s_{21}' + F_1s_{22}')$$

$$s_{13} = \frac{1}{D}[Ds_{13}' + (G_1H_2 - F_2H_1)s_{11}' + (G_2H_1 - F_1H_2)s_{12}']$$

$$s_{23} = \frac{1}{D}[Ds_{23}' + (G_1H_2 - F_2H_1)s_{21}' + (G_2H_1 - F_1H_2)s_{22}']$$

$$s_{31} = \frac{1}{D(1+k)}(F_2X - G_2Y), \qquad s_{32} = \frac{1}{D(1+k)}(-G_1X + F_1Y) \qquad (3.2)$$

$$s_{33} = \frac{1}{D(1+k)}[DZ + (G_1H_2 - F_2H_1)X + (G_2H_1 - F_1H_2)Y]$$

$$s_{ij} = \frac{1}{1+k}\left[s_{ij}' + ks_{ij}' - \frac{ks_{i6}'(s_{6j}' - s_{6j}'')}{s_{66}'' + ks_{66}'} + \frac{ks_{i6}''(s_{6j}' - s_{6j}'')}{s_{66}''} - \frac{k^2s_{6j}''s_{66}'}{s_{66}''}\,\frac{s_{6j}' - s_{6j}''}{s_{66}'' + ks_{66}'}\right]$$

$$s_{i6} = \frac{s_{i6}'s_{66}'' + ks_{i6}''s_{66}'}{s_{66}'' + ks_{66}'}, \quad s_{6j} = s_{6j}' - \frac{k(s_{6j}' - s_{6j}'')}{s_{66}'' + ks_{66}'}, \quad s_{66} = \frac{s_{66}''(1+k)}{s_{66}'' + ks_{66}'} \quad (i, j = 4, 5)$$

В формулах (3.1), (3.2) использованы следующие обозначения:

$$f_1 = \frac{s_{11}'s_{22}'' - s_{21}'s_{12}''}{S}, \qquad f_2 = \frac{-s_{12}'s_{22}'' + s_{22}'s_{11}''}{S}$$

$$g_1 = \frac{s_{12}'s_{22}'' - s_{12}'s_{12}''}{S}, \qquad g_2 = \frac{-s_{11}'s_{22}'' + s_{21}'s_{11}''}{S}$$

$$h_1 = \frac{s_{22}''(s_{13}' - s_{13}'') - s_{12}''(s_{23}' - s_{23}'')}{S}, \qquad h_2 = \frac{-s_{21}''(s_{13}' - s_{13}'') + s_{11}''(s_{23}' - s_{23}'')}{S}$$

$$S = s_{11}''s_{21}'' - s_{12}''s_{21}'', \qquad D = F_1F_2 - G_1G_2$$

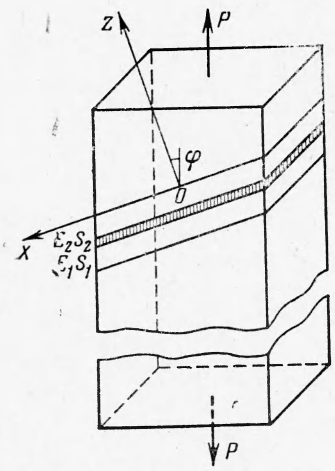
$$F_n = \frac{1 + kf_n}{1+k}, \qquad G_n = \frac{kf_n}{1+k}, \qquad H_n = \frac{kh_n}{1+k} \qquad (n = 1, 2)$$

$$X = s_{31}' + k(s_{31}''f_1 + s_{32}''g_2), \qquad Y = s_{32}' + k(s_{31}''g_1 + s_{32}''f_2)$$

$$Z = s_{33}' + k(s_{31}''h_1 + s_{32}''h_2 + s_{33}'')$$

Здесь s_{lm}', s_{lm}'' — упругие постоянные слоев, отнесенные к прямоугольной системе координат, ось z которой перпендикулярна к плоскости слоев.

Формулы (3.1), (3.2) можно применить к расчету «поликристалла», состоящего из слоев-«зерен» различной ориентации. В таблице приведены напряжения для четырех случаев деформирования поликристалла цинка, в одной группе слоев-зерен которого плоскость базиса параллельна, а в другой — перпендикулярна к границе раздела. В первых трех столбцах таблицы даны компоненты внешних усилий. Приводим значения модулей Юнга для трех направлений (в скобках для сравнения даны значения модулей, вычисленные при отсутствии взаимного стеснения деформации слоев).



Фиг. 5. Растяжение образца слоистой среды

Таблица

$\langle\sigma_x\rangle$	$\langle\sigma_y\rangle$	$\langle\sigma_z\rangle$	σ_x'	σ_x''	σ_y'	σ_y''	σ_z'	σ_z''
1	0	0	0.90	1.10	—0.26	0.26	0	0
0	1	0	—0.34	0.34	1.49	0.51	0	0
0	0	1	0.57	—0.57	0.10	—0.10	1	1
1	1	1	1.13	0.87	1.33	0.17	1	1

$E_x = 13\,900$ (11 900), $E_y = 8250$ (7700)
$E_z = 6250$ (5400) [*кг/см*²]

Результаты этих расчетов совпадают с данными, получаемыми из экспериментов по деформации зерен поликристаллов. Так, напряжения и деформации слоев-зерен различны и не совпадают с усредненными (внешними) напряжениями и деформациями; при одноосном растяжении образца напряженное состояние слоев нелинейно; трехосное растяжение с равными компонентами напряжений создает напряженное состояние слоев с неравными компонентами, что обусловливает возможность пластической деформации отдельных зерен.

§ 4. **Зависимость упругих постоянных от геометрии слоев.** Зависимость упругих постоянных s_{lm} от геометрии слоев, т. е. от значений a/s, b/s, можно получить, зная распределение напряжений вблизи свободных краев слоев (см., например, [5]). Однако при этом результаты трудно представить в аналитической форме. Проще использовать для этого результаты экспериментов по сжатию упругих образцов между жесткими плитами. Измеряемый в условиях стеснения поперечной деформации плитами пресса эффективный модуль упругости E_{eff} оказывается бо́льшим истинного значения модуля упругости материала E.

$$E_{eff} = E\left[1 + m\left(\frac{a}{s}\right)^n f(\nu)\right] \tag{4.1}$$

Здесь m и n — численные коэффициенты, зависящие от формы сечения образца в плане; для цилиндрических образцов и призматических образцов с отношением сторон $<$ 6—8 можно принять $m = 0.1$, $n = 2$. Для материала с малой сжимаемостью (например, резины) $f(\nu) = 1$. Сравнивая (4.1) с очевидной формулой

$$E_{eff} = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_z}{E^{-1}[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)]} = \frac{E\sigma_z}{\sigma_z - 2\nu\sigma_x}$$

и учитывая, что в предельном случае полного стеснения деформации $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \nu / (1-\nu)$, можно получить значения средних по слою поперечных напряжений σ_x и σ_y, которые дают то же значение E_{eff}

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{m(a/s)^n}{1+m(a/s)^n} \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \gamma \tag{4.2}$$

Подобным же образом нетрудно получить поправку на неполное стеснение деформации для элемента слоистой среды, произвольно ориентированной по отношению к внешним усилиям. Для среды, состоящей из слоев двух видов, получим

$$s_{11} = \frac{1}{(1+k)(F^2-G^2)} \left[\frac{F + G\nu_1 \langle\gamma\rangle}{E_1} + k \frac{(Ff-Gg)+(Gf-Fg)\langle\gamma\rangle \nu_2}{E_2}\right]$$

$$s_{12} = \frac{1}{(1+k)(F^2-G^2)} \left[-\frac{G\langle\gamma\rangle - \nu_1 F}{E_1} + k \frac{(Fg-Gf)\langle\gamma\rangle + (Gg-Ff)\nu_2}{E_2}\right]$$

$$s_{13} = \frac{1}{(1+k)(F^2-G^2)} \left\{\frac{-(1-\nu_1)(F-G)H\langle\gamma\rangle - (F^2-G^2)\nu_1}{E_1} + \right.$$
$$\left. + k \frac{-[H(F-G)(f+g)+h(G^2-F^2)](1-\nu_2)\langle\gamma\rangle - \nu_2(F^2-G^2)}{E_2}\right\}$$

$$s_{33} = \frac{1}{(1+k)(F^2-G^2)} \left\{\frac{(F^2-G^2) + 2\nu_1\langle\gamma\rangle H(F-G)}{E_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2k\nu_2\langle\gamma\rangle [H(F-G)(f+g)+h(G^2-F^2)]}{E_2}\right\} + \frac{k(F^2-G^2)}{E_2}$$

$$s_{44} = \frac{2E_2(1+\nu_1) + 2kE_1(1+\nu_2)}{E_1 E_2 (1+k)} \tag{4.3}$$

Здесь

$$\langle\gamma\rangle = \frac{\gamma_1 E_2 + \gamma_2 E_1}{E_1 + E_2}, \quad \gamma_1 = \frac{m(a/s_1)^n}{1+m(a/s_1)^n}, \quad \gamma_2 = \frac{m(a/s_2)^n}{1+m(a/s_2)^n}$$

Поступила 8 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов А. В. Механизм разрушения упруго-анизотропных тел. ЖТФ, 1950, т. 20, вып. 10.
2. Степанов А. В. Трение и износ упруго-анизотропных тел. ЖТФ, 1950, т. 20, вып. 12.
3. Степанов А. В. Причины особенностей разрушения упруго-анизотропных тел. Изв. АН СССР, сер. физ., 1950, т. 14, № 1.
4. Степанов А. В. Основы физического учения о прочности и пластичности кристаллов. Изв. АН СССР, сер. физ., 1953, т. 17, № 3.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Л.— М., Огиз, Гостехиздат, 1947.
6. Амбарцумян С. А. Основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, 1948, т. 8, № 5.
7. Григолюк Э. И. О выборе исходной поверхности в теории неоднородной оболочки. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 8.
8. Рабинович А. Л. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. Тр. ЦАГИ, 1946, № 582.
9. Hoff N. I., Mautner S. E. Bending and buckling of sandwich Beams. J. Aeron. Sci., 1948, vol. 15, No 12.
10. Bijlaard P. P. Analysis of the Elactic and Plastic Stability of sandwich Plates. J. Aeron. Sci., 1951, vol. 18, No 5, 12.
11. Гольдфарб В. М., Степанов А. В. Упругие постоянные и напряженное состояние слоистых неоднородных сред. Рига, АН ЛатвССР, Сб. статей Вопросы динамики и прочности, 1958, вып. 5.
12. Conway H. D. Some Problems of Orthotropic Plane Stress. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No 1.