

УДК 539.374

ОБ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. В. Алехин, Б. Д. Аннин, В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: annin@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача Коши о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой поверхности, на которой действуют нормальное давление и касательные усилия. Известно, что в случае полной пластичности система квазистатических уравнений идеальной пластичности Треска, описывающих напряженно-деформированное состояние среды, является гиперболической и подобна системе, описывающей установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости. Для численного решения этой системы использована разностная схема, применяемая для гиперболических систем законов сохранения. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: идеальная пластичность Треска, полная пластичность, опорная функция контура, эквидистантная поверхность, гиперболическая система законов сохранения.

В случае полной пластичности квазистатические уравнения идеальной пластичности Треска для определения напряжений имеют вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial x_3} = 0; \quad (1)$$

$$\mathbf{t}_1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})^T, \quad \mathbf{t}_2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})^T, \quad \mathbf{t}_3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})^T; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + 2k\varepsilon(n_i n_j - \delta_{ij}/3), \quad \sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij}/3, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

где σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; σ — среднее напряжение; δ_{ij} — символ Кронекера; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3; k — предел текучести при чистом сдвиге; $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ — единичный собственный вектор, соответствующий главному напряжению

$$\sigma_1 = \sigma + 4k\varepsilon/3, \quad (4)$$

два других главных напряжения совпадают:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma - 2k\varepsilon/3. \quad (5)$$

Определяемый равенствами (2) с учетом (3) тензор напряжений удовлетворяет условию пластичности Треска

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = 2k.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00728) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (гранты № НШ-6481.2006.1, НШ-5873.2006.1).

Зависящие от x_1, x_2, x_3 функции σ, n_1, n_2, n_3 определяются из системы уравнений первого порядка, получаемой путем подстановки выражений (2) и (3) в (1). Эта система является гиперболической и имеет вид

$$\begin{aligned} n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} + n_1 \theta &= -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ n_1 \frac{\partial n_2}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial x_3} + n_2 \theta &= -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ n_1 \frac{\partial n_3}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial n_3}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} + n_3 \theta &= -\frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \quad \theta = \frac{\partial n_1}{\partial x_1} + \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + \frac{\partial n_3}{\partial x_3}, \quad p = \frac{\sigma}{2k\varepsilon} - \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Характеристические соотношения для системы (6) получены в [2].

Систему (6), подобную системе, описывающей установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости [3. С. 73], можно записать в виде [4. С. 105]

$$2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) + \theta \mathbf{n} = -\nabla p, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad \boldsymbol{\omega} = (1/2)\nabla \times \mathbf{n}. \quad (7)$$

Аналогично [4] можно рассмотреть следующие случаи:

1. Единичный собственный вектор представляется в виде

$$\mathbf{n} = \mu \nabla f, \quad (8)$$

где $f = f(x_1, x_2, x_3)$ — некоторая функция; $\mu = |\nabla f|^{-1}$.

2. Единичный собственный вектор представляется в виде

$$\mathbf{n} = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad (9)$$

где $\lambda = |\boldsymbol{\omega}|^{-1}$. В этом случае уравнение (7) существенно упрощается:

$$\theta \mathbf{n} = -\nabla p.$$

3. Имеет место равенство

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (10)$$

Для определения функций $p = p(x_1, x_2, x_3)$, $n_i = n_i(x_1, x_2, x_3)$ требуется совместность систем (6), (8) в случае 1, систем (6), (9) в случае 2 и систем (6), (10) в случае 3. Эти варианты рассмотрены в [5, 6].

Для решения задачи о распространении зон пластического состояния от границы выпуклой поверхности, на которой действуют нормальное давление и касательные усилия, используем численные алгоритмы, применяемые в гидромеханике [7–9].

Пусть S — достаточно гладкая замкнутая выпуклая поверхность, причем начало координат системы (x, y, z) лежит внутри S (рис. 1, *a*). Поверхность S образована вращением выпуклой кривой L (рис. 1, *b*), расположенной в плоскости (r, z) , где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, причем кривая L пересекает ось z под прямыми углами, а радиус кривизны ρ кривой L в любой ее точке не меньше $\rho_* > 0$.

Уравнения кривой L запишем в параметрическом виде:

$$r(\gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma, \quad z(\gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - F(\gamma) \cos \gamma. \quad (11)$$

Здесь γ — угол между касательной и осью r ; $F(\gamma)$ — опорная функция контура L . Очевидно, что $r(\gamma) \geq 0$ при $0 \leq \gamma \leq \pi$. Радиус кривизны кривой L вычисляется по формуле

$$\rho = \rho(\gamma) = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{dr(\gamma)}{d\gamma} = F(\gamma) + \frac{d^2 F(\gamma)}{d\gamma^2} \geq \rho_* > 0. \quad (12)$$

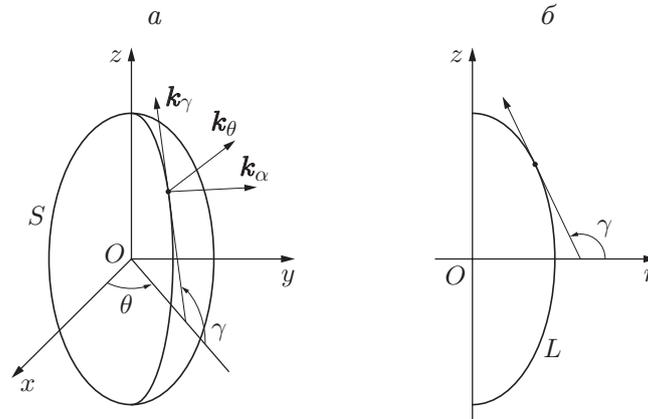


Рис. 1. Ортогональная криволинейная система координат (α, θ, γ) :
 а — координатная поверхность S ($\alpha = 0$) и базисные векторы $\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\theta, \mathbf{k}_\gamma$; б — образующая L координатной поверхности S

Уравнения поверхности S запишем в виде

$$\begin{aligned} x_S(\theta, \gamma) &= \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma \right) \cos \theta, \\ y_S(\theta, \gamma) &= \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma \right) \sin \theta, \\ z_S(\theta, \gamma) &= \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - F(\gamma) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем ортогональную криволинейную систему координат (α, θ, γ) :

$$\begin{aligned} x(\alpha, \theta, \gamma) &= \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + (F(\gamma) + \alpha) \sin \gamma \right) \cos \theta, \\ y(\alpha, \theta, \gamma) &= \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + (F(\gamma) + \alpha) \sin \gamma \right) \sin \theta, \\ z(\alpha, \theta, \gamma) &= \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - (F(\gamma) + \alpha) \cos \gamma, \\ \alpha &\geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (14)$$

Якобиан преобразования координат $J(\alpha, \theta, \gamma)$ неотрицателен:

$$J(\alpha, \theta, \gamma) = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \theta, \gamma)} = (\rho(\gamma) + \alpha)(r(\gamma) + \alpha \sin \gamma) \geq 0.$$

Из (14) следует, что поверхность $\alpha = \text{const}$ представляет собой поверхность, равноудаленную от поверхности S . Выражения для единичных векторов координатных линий (см. рис. 1, а) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha &= (\sin \gamma \cos \theta, \sin \gamma \sin \theta, -\cos \gamma)^T, \\ \mathbf{k}_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0)^T, \quad \mathbf{k}_\gamma = (\cos \gamma \cos \theta, \cos \gamma \sin \theta, \sin \gamma)^T. \end{aligned} \quad (15)$$

Запишем уравнения равновесия в ортогональной системе координат (α, θ, γ) . Напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{t}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{t}_\gamma}{\partial \gamma} = 0, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{t}_\alpha = H_\theta H_\gamma (\sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\alpha\theta} \mathbf{k}_\theta + \sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\gamma), \quad (17)$$

$$\mathbf{t}_\theta = H_\alpha H_\gamma (\sigma_{\alpha\theta} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\theta\theta} \mathbf{k}_\theta + \sigma_{\theta\gamma} \mathbf{k}_\gamma), \quad \mathbf{t}_\gamma = H_\alpha H_\theta (\sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\theta\gamma} \mathbf{k}_\theta + \sigma_{\gamma\gamma} \mathbf{k}_\gamma);$$

$$H_\alpha = 1, \quad H_\theta = r(\gamma) + \alpha \sin \gamma, \quad H_\gamma = \rho(\gamma) + \alpha. \quad (18)$$

Исключая из системы (16) с учетом (17) базисные векторы (15), запишем ее в форме системы законов сохранения

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial \gamma} = \mathbf{f}, \quad (19)$$

где

$$\bar{\mathbf{u}} = H_\theta H_\gamma \mathbf{u}, \quad \bar{\mathbf{v}} = H_\gamma \mathbf{v}, \quad \bar{\mathbf{w}} = H_\theta \mathbf{w}; \quad (20)$$

$$\mathbf{u} = (\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma})^T, \quad \mathbf{v} = (\sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\gamma})^T, \quad \mathbf{w} = (\sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma})^T; \quad (21)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} H_\gamma \sigma_{\theta\theta} \sin \gamma + H_\theta \sigma_{\gamma\gamma} \\ -H_\gamma (\sigma_{\theta\gamma} \cos \gamma + \sigma_{\alpha\theta} \sin \gamma) \\ (\partial H_\theta / \partial \gamma) \sigma_{\theta\theta} - H_\theta \sigma_{\alpha\gamma} \end{pmatrix};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = p + n_\alpha^2, \quad \sigma_{\alpha\theta} = n_\alpha n_\theta, \quad \sigma_{\alpha\gamma} = n_\alpha n_\gamma; \quad (22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p + n_\theta^2, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = p + n_\gamma^2, \quad \sigma_{\theta\gamma} = n_\theta n_\gamma. \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23) напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\theta}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, $\sigma_{\theta\gamma}$ — компоненты напряжения σ_{ij} (3) в ортогональной криволинейной системе координат (α, θ, γ) , деленные на $2k\varepsilon$; $p = \sigma/(2k\varepsilon) - 1/3$. Величины n_α , n_θ , n_γ представляют собой компоненты единичного собственного вектора \mathbf{n} , соответствующего главному напряжению (4) в системе координат (α, θ, γ) :

$$\mathbf{n} = n_\alpha \mathbf{k}_\alpha + n_\theta \mathbf{k}_\theta + n_\gamma \mathbf{k}_\gamma, \quad n_\alpha^2 + n_\theta^2 + n_\gamma^2 = 1. \quad (24)$$

Векторное уравнение (19) и соотношение (24) образуют замкнутую систему для определения величин p , n_α , n_θ , n_γ как функций α , θ , γ .

Для системы (19), (24) поставим следующую задачу Коши. На поверхности S , определяемой формулами (13), т. е. при $\alpha = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \gamma \leq \pi$, заданы начальные значения функций p , n_α , n_θ , n_γ . Требуется найти эти функции при $\alpha > 0$. При такой постановке задачи Коши величина α представляет собой независимую эволюционную переменную, а система (19), (24), по крайней мере вблизи поверхности S , является α -гиперболической [7, 8]. Поэтому для ее численного решения можно использовать стандартные разностные схемы, применяемые для гиперболических систем законов сохранения [7, 9].

В прямоугольной области

$$\Pi = \{\theta, \gamma: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \gamma \leq \pi\}$$

введем равномерную разностную сетку

$$\theta_i = ih_1, \quad \gamma_j = jh_2, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2},$$

где $h_1 = 2\pi/N_1$, $h_2 = \pi/(N_2 - 1)$ — постоянные шаги сетки. При $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{2, N_2 - 1}$ аппроксимируем систему (19) следующей явной двухслойной по времени и симметричной по пространству разностной схемой:

$$\frac{\bar{\mathbf{u}}_{ij}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{ij}^n}{\tau_n} + \frac{\bar{\mathbf{v}}_{i+1,j}^n - \bar{\mathbf{v}}_{i-1,j}^n}{2h_1} + \frac{\bar{\mathbf{w}}_{i,j+1}^n - \bar{\mathbf{w}}_{i,j-1}^n}{2h_2} = \mathbf{f}_{ij}^n + \mathbf{W}_{ij}^n, \quad (25)$$

где

$$\mathbf{W}_{ij}^n = C_1 \frac{\bar{\mathbf{v}}_{i+1,j}^n - 2\bar{\mathbf{v}}_{ij}^n + \bar{\mathbf{v}}_{i-1,j}^n}{h_1} + C_2 \frac{\bar{\mathbf{w}}_{i,j+1}^n - 2\bar{\mathbf{w}}_{ij}^n + \bar{\mathbf{w}}_{i,j-1}^n}{h_2} -$$

искусственная вязкость, коэффициенты C_1 и C_2 которой подбираются из тестовых расчетов.

В (25) и ниже для всех сеточных функций введены сокращенные обозначения:

$$\bar{\mathbf{g}}_{ij}^n = \bar{\mathbf{g}}(\alpha_n, \theta_i, \gamma_j), \quad \mathbf{g}_{ij}^n = \mathbf{g}(\alpha_n, \theta_i, \gamma_j), \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \quad \alpha_0 = 0$$

(τ_k — переменный шаг по эволюционной переменной α). Поскольку искомое решение является периодическим по переменной θ , в формуле (25) предполагается, что $\theta_0 = \theta_{N_1}$, $\theta_{N_1+1} = \theta_1$.

В граничных узлах $j = 1$ и $j = N_2$, т. е. в полюсах $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$, происходит вырождение уравнений (19) по переменной θ . Известно, что для гладкой поверхности вращения S (13) в каждом из полюсов главные радиусы кривизны $r_1(\gamma) = \rho(\gamma)$ (12) и $r_2(\gamma) = r(\gamma)/\sin \gamma$, где $r(\gamma)$ определяется формулой (11), совпадают, т. е. равны $\rho(0)$ и $\rho(\pi)$ соответственно. Анализ уравнений (19) показывает, что при $\gamma \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow \pi$ систему (19) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\gamma^2 \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (26)$$

где

$$\mathbf{f} = H_\gamma(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\gamma\gamma}, -\sigma_{\alpha\theta}, -\sigma_{\alpha\gamma})^T, \quad H_\gamma = \rho(\gamma) + \alpha, \quad \gamma = 0, \pi.$$

Для приближенного вычисления сеточных функций

$$\mathbf{g}_{i1}^n = \tilde{\mathbf{g}}_1^n, \quad \mathbf{g}_{iN_2}^n = \tilde{\mathbf{g}}_{N_2}^n, \quad i = \overline{1, N_1}$$

в граничных узлах $j = 1$ и $j = N_2$ можно использовать следующую разностную схему при аппроксимации системы (26):

$$\frac{(H_\gamma^2 \tilde{\mathbf{u}}_m^{n+1}) - (H_\gamma^2 \tilde{\mathbf{u}}_m^n)}{\tau_n} = \tilde{\mathbf{f}}_m^n, \quad m = 1, N_2. \quad (27)$$

После нахождения величин $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\theta}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$ на $(n+1)$ -м слое из разностных уравнений (25), (27) с учетом (18), (20), (21) основные сеточные функции p , n_α , n_θ , n_γ в каждом узле (i, j) этого слоя определяются из системы алгебраических уравнений (22), (24). Решая эту систему в предположении, что в процессе счета $d \equiv \sigma_{\alpha\theta}^2 + \sigma_{\alpha\gamma}^2 < 1/4$, получим

$$n_\alpha = \sqrt{(1 + \sqrt{1 - 4d})/2}, \quad p = \sigma_{\alpha\alpha} - n_\alpha^2, \quad n_\theta = \sigma_{\alpha\theta}/n_\alpha, \quad n_\gamma = \sigma_{\alpha\gamma}/n_\alpha.$$

Величины $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, $\sigma_{\theta\gamma}$, входящие в систему (19)–(21), вычисляются по формулам (23).

Шаг τ_n по эволюционной переменной α определяется из условия устойчивости Куранта [9] по формуле

$$\tau_n = \frac{\varkappa(\alpha_n + \min_j \rho(\gamma_j)) \min(h_1, h_2)}{\max_{i,j} (\lambda_{ij}^n, (\lambda^{-1})_{ij}^n)},$$

где λ , λ^{-1} — скорости распространения малых возмущений вблизи поверхности $S(\alpha_n)$; $\lambda = \sqrt{(1+2q)/(1-2q)}$; $q = n_\alpha \sqrt{n_\theta^2 + n_\gamma^2}$; $\varkappa \leq 1$ — коэффициент запаса в условии устойчивости.

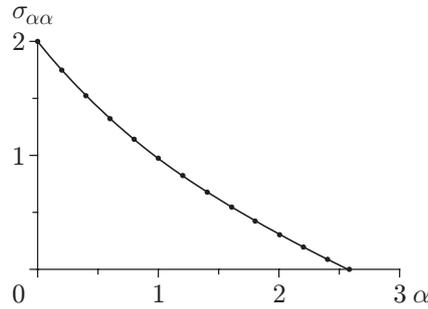


Рис. 2. Распределение напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ в толстостенной сфере: сплошная линия — аналитическое решение; точки — численное решение

Разностная схема (25), (27) была протестирована на задаче, имеющей аналитическое решение. Рассматривалась толстостенная сфера с внутренним радиусом $a = 1,5$ и внешним радиусом $b = 1,5e$, находящаяся под действием внутреннего давления \tilde{p} . Решение данной задачи известно:

$$\sigma_{rr} = -\tilde{p} + 4k \ln(r/a), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2k, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{rr} + 2k. \quad (28)$$

Здесь $\tilde{p} = 4k \ln(b/a)$ — предельное давление; σ_{rr} соответствует первому главному напряжению (4), $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ — двум другим главным напряжениям (5) с $\varepsilon = -1$.

В переменных p , n_α , n_θ , n_γ аналитическое решение (28) имеет вид

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha) = p(\alpha) + n_\alpha^2(\alpha), \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha) = p(\alpha), \quad (29)$$

где

$$p(\alpha) = p(0) - 2 \ln(1 + \alpha/a), \quad p(0) = \tilde{p}/(2k) - 1, \\ n_\alpha(\alpha) = 1, \quad n_\theta(\alpha) = n_\gamma(\alpha) = 0.$$

В численном решении на внутренней поверхности сферы при $\alpha = 0$ задавались следующие начальные значения функций p , n_α , n_θ , n_γ :

$$p(0) = 1, \quad n_\alpha(0) = 1, \quad n_\theta(0) = n_\gamma(0) = 0.$$

В результате получено решение, не зависящее от θ и γ .

На рис. 2 приведены зависимости $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha)$ для точного решения (29) (сплошная линия) и численного решения (точки). Полученные зависимости хорошо согласуются, что свидетельствует об эффективности предложенной схемы.

В качестве примера решена задача о распространении зон пластического состояния от границы эллипсоидальной полости, образованной вращением вокруг оси z выпуклой кривой L с опорной функцией $F(\gamma) = \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}$, где a , b — полуоси эллипса.

В численном решении принимались следующие значения параметров: $a = 2$, $b = 1$, $N_1 = 200$, $N_2 = 101$ (N_1 , N_2 — число узлов разбиения по переменным θ и γ соответственно). При $\alpha = 0$ на поверхности полости задавались начальные значения $p(0) = 1$, $n_\alpha(0) = 1$, $n_\theta(0) = n_\gamma(0) = 0$. В силу осевой симметрии задачи полученное численное решение не зависит от угла θ .

На рис. 3 приведена зависимость напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ от координаты α при $\gamma = 0; \pi/2$. При $\gamma = 0; \pi/2$ компонента n_α единичного собственного вектора \mathbf{n} (24) равна 1 для любых значений α , поэтому согласно формулам (22), (23) $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\alpha\alpha} - 1$.

На рис. 4 показаны зависимости напряжений $\sigma_{\alpha\alpha} = p + n_\alpha^2$, $\sigma_{\theta\theta} = p$ и $\sigma_{\gamma\gamma} = p + n_\gamma^2$ от α при $\gamma = \pi/4$.

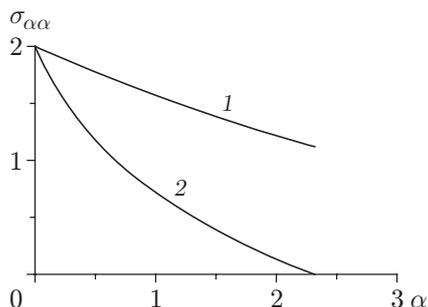


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ от координаты α :

1 — $\gamma = 0$; 2 — $\gamma = \pi/2$

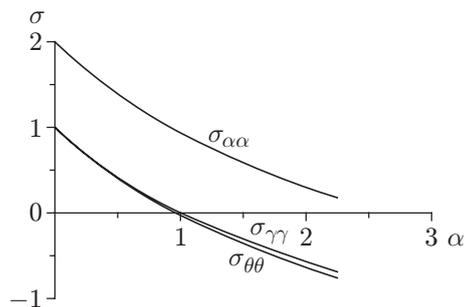


Рис. 4

Рис. 4. Зависимости напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ от координаты α ($\gamma = \pi/4$)

Заметим, что при начальных условиях, зависящих от θ , получится неосесимметричное решение.

При известном тензоре напряжений вектор скорости может быть определен из условий несжимаемости и изотропии [1] по аналогичной схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
2. **Ивлев Д. Д., Ишлинский А. Ю., Непершин Р. И.** О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 5. С. 616–622.
3. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Громека И. С.** Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
5. **Радаев Ю. Н.** К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 5. С. 102–120.
6. **Радаев Ю. Н.** Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006.
7. **Воеводин А. Ф.** Методы решения одномерных эволюционных систем / А. Ф. Воеводин, С. М. Шугрин. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
8. **Остапенко В. В.** Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды (курс лекций). Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004.
9. **Куликовский А. Г.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию 25/VI 2007 г.