

УДК 532.59:539.3:534.1

ЧИСЛЕННОЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ГИДРОУПРУГОМ ПОВЕДЕНИИ ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ НА ВОЛНАХ

А. А. Коробкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построено численное решение плоской задачи о поведении плавающей упругой пластины на волнах. Используется метод нормальных мод. Для жидкости конечной глубины гидродинамические коэффициенты найдены в явном виде. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными для распределения напряжений в пластине, а также с расчетами других авторов. Отмечается хорошее соответствие результатов для не очень коротких волн. Для падающих волн, длина которых сравнима с длиной пластины, предложено длинноволновое приближение решения. В рамках этого приближения решение дано в аналитическом виде.

Рассматривается плоская линейная задача о поведении плавающей упругой пластины на волнах. Изотропная пластина имеет длину $2a$ и толщину h , причем $h/a \ll 1$. Слой жидкости конечной глубины H ограничен снизу непроницаемым дном. Верхняя граница жидкости состоит из свободной поверхности и поверхности плавающей пластины. Колебания пластины вызваны плоской поверхностной волной малой амплитуды. Требуется определить прогиб пластины, распределение напряжений в ней, а также коэффициенты прохождения и отражения падающей волны в зависимости от длины волны и параметров пластины.

Задача исследовалась экспериментально и численно в работах [1, 2]. В экспериментах пластины с размерами $10,0 \times 0,5$ м [1] и 50×5 м [2] помещались в узкий бассейн. При этом течение жидкости, вызванное взаимодействием падающей плоской волны и плавающей пластины, можно приближенно считать плоским (не меняющимся поперек пластины), а пластину рассматривать как балку Эйлера, концы которой свободны от напряжений. При численном исследовании задачи использовался метод нормальных мод [1] и метод граничного интегрального уравнения [2]. В последнем методе исходная линейная задача с помощью функции Грина сводится к двумерному (одномерному в плоском случае) интегральному уравнению Фредгольма относительно распределения гидродинамического давления по пластине. Интегральное уравнение решается численно. В методе нормальных мод [1] прогиб балки представляется в виде суперпозиции форм ее свободных колебаний в воздухе. Взаимодействие балки и жидкости описывается матрицей присоединенных масс, которые определяются для каждой моды колебания балки. Эта матрица играет основную роль в методе нормальных мод. Если она известна, то расчеты сводятся к простым вычислениям по формулам. Элементы матрицы определяются в [1] из решения гидродинамической части полной задачи методом декомпозиции области течения. Результаты расчетов в [1, 2] хорошо согласуются с данными экспериментов для длинных набегающих волн. Однако в случае коротких волн наблюдается существенное расхождение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-15-96882; 97-01-00897).

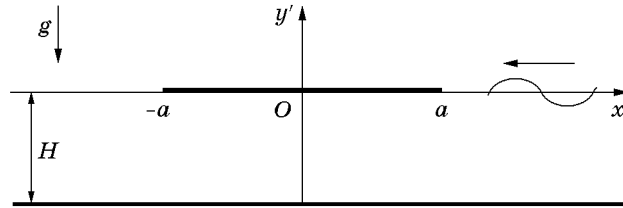


Рис. 1

Метод декомпозиции области течения использован также в работах [3, 4]. Одним из недостатков этого метода является то, что он не допускает обобщения на случай жидкости бесконечной глубины. Вместе с тем метод позволяет эффективно исследовать поведение плавающей пластины, когда ее осадка сравнима с глубиной жидкого слоя.

Целью настоящей работы является сравнение численных результатов, полученных с помощью прямого метода нормальных мод, в рамках которого элементы матрицы присоединенных масс вычисляются явно, с экспериментальными данными [1, 2], расчетами других авторов [1–4] и асимптотическими формулами для длинноволнового приближения.

В настоящее время существуют проекты гигантских плавучих объектов (аэропортов и островов), в основе большинства которых лежит концепция плавающей пластины. Такую конструкцию проще изготовить из стандартных элементов, она устойчива и не требует мощных удерживающих устройств [5]. Гигантские размеры реальной конструкции затрудняют экспериментальное исследование ее поведения в натуральных условиях. Данные лабораторных экспериментов [1, 2] могут быть перенесены на реальные объекты, однако выполнение всех существенных критериев подобия при этом не гарантируется. В этих условиях особое значение приобретают исследования гидроупругого поведения плавающих пластин как численными, так и аналитическими методами и сравнение результатов с данными лабораторных экспериментов. Такие исследования позволяют уточнить используемые модели и область их применимости.

Постановка задачи. В рамках линейной теории исследуется гидроупругое поведение плавающей пластины (рис. 1). Осадка пластины d предполагается малой по сравнению с ее длиной $2a$ и глубиной жидкости H . Периодические по времени колебания пластины вызваны поверхностной волной малой амплитуды A , набегающей на пластину справа. Середина пластины принимается за начало декартовой системы координат $x'Oy'$. Здесь и ниже штрихом отмечены размерные переменные. Слой жидкости $(-H < y' < 0)$ ограничен снизу горизонтальным недеформируемым дном ($y' = -H$). Участки верхней границы ($y' = 0$) жидкого слоя $x' < -a$ и $x' > a$ соответствуют свободной поверхности жидкости, участок $-a < x' < a$ — плавающей пластине. Пластина моделируется балкой Эйлера, концы которой свободны от напряжений. Жидкость предполагается идеальной, весомой и несжимаемой, а ее течение — плоским и безвихревым. В рамках линейной теории течение жидкости описывается потенциалом скоростей $\varphi'(x', y', t')$, а колебания пластины — ее нормальным прогибом $w'(x', t')$, где t' — время. Ниже используются следующие безразмерные переменные: $x' = ax$, $y' = ay$, $t' = t/\omega$, $\varphi' = A\omega a\varphi$, $w' = Aw$, $p' = \rho gAp$, $\eta' = A\eta$. Здесь ω — частота набегающей волны; $p(x, y, t)$ — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; уравнение $y = \eta(x, t)$, где $|x| > 1$, описывает эволюцию свободной границы жидкости. Заметим, что в безразмерных переменных частота падающей на пластину волны и ее амплитуда равны единице.

Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, -H_0 < y < 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = -H_0), \\ \varphi_y = \eta_t, \quad \gamma\varphi_t + \eta = 0 \quad (y = 0, \quad |x| > 1), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \varphi_y = w_t, \quad p(x, 0, t) = -\gamma\varphi_t - w(x, t) \quad (y = 0, \quad |x| < 1), \\ \alpha w_{tt} + \beta w_{xxxx} = p(x, 0, t) \quad (|x| < 1), \quad w_{xx} = w_{xxx} = 0 \quad (x = \pm 1). \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = a\omega^2/g$; $H_0 = H/a$; $\alpha = \gamma(d/a)$; $\beta = EJ/(\rho g a^4)$; E — модуль Юнга материала балки; $J = h^3/12$; h — толщина пластины. В записи формулы для коэффициента α использовано уравнение баланса сил в случае, когда пластина плавает на спокойной воде, $m_b g = \rho g d$ (m_b — масса балки единичной длины).

Решение задачи (1) будем искать при следующих условиях, налагаемых на поведение свободной границы жидкости при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) \sim \cos(kx + t) + A^{(+)} \cos(kx - t + \delta^{(+)}) \quad (x \rightarrow +\infty), \\ \eta(x, t) \sim A^{(-)} \cos(kx + t + \delta^{(-)}) \quad (x \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

где $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ — амплитуды отраженной и прошедшей волн, отнесенные к амплитуде падающей волны; $\delta^{(+)}$ и $\delta^{(-)}$ — соответствующие сдвиги фаз; k — безразмерное волновое число, которое является положительным решением уравнения $k \operatorname{th} kH_0 = \gamma$. Длина падающей волны λ в размерных переменных задается формулой $\lambda = 2\pi a/k$. Величины $A^{(+)}$, $A^{(-)}$, $\delta^{(+)}$ и $\delta^{(-)}$ заранее неизвестны и должны быть определены вместе с параметрами течения жидкости и прогибом пластины $w(x, t)$. Относительные удлинения элементов балки $\varepsilon(x, t)$ определяются формулой

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_s w_{xx}(x, t), \quad \varepsilon_s = Ah/(2a^2). \quad (3)$$

Заметим, что в постановке задачи (1), (2) отсутствуют начальные условия. Предполагается, что при больших временах устанавливается течение, периодически меняющееся по времени и не зависящее от особенностей его начала. Потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$, соответствующий установившемуся волновому движению жидкости, прогиб балки $w(x, t)$ и давление $p(x, y, t)$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = \varphi_{\Pi}(x, y, t) + \operatorname{Re} [i \exp(it)\Phi(x, y)], \quad w(x, t) = \operatorname{Re} [\exp(it)W(x)], \\ p(x, y, t) = \operatorname{Re} [\exp(it)P(x, y)], \quad \varphi_{\Pi}(x, y, t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\operatorname{ch}[k(y + H_0)]}{\operatorname{ch}(kH_0)} \sin(kx + t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi_{\Pi}(x, y, t)$ — потенциал скоростей падающей волны в случае отсутствия пластины. Новые искомые функции $\Phi(x, y)$, $W(x)$ и $P(x, y)$ являются комплексными. Подставляя представления (4) в уравнения (1), находим

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad -H_0 < y < 0); \quad (5)$$

$$\Phi_y = 0 \quad (y = -H_0); \quad (6)$$

$$\Phi_y = \gamma\Phi \quad (y = 0, \quad |x| > 1); \quad (7)$$

$$\Phi_y = W(x) - \exp(ikx) \quad (y = 0, \quad |x| < 1); \quad (8)$$

$$\beta \frac{d^4 W}{dx^4} + (1 - \alpha)W = \gamma\Phi(x, 0) + \exp(ikx) \quad (|x| < 1); \quad (9)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^3 W}{dx^3} = 0 \quad (x = \pm 1); \quad (10)$$

$$P(x, 0) = \gamma\Phi(x, 0) - W(x) + \exp(ikx) \quad (|x| < 1). \quad (11)$$

Условия излучения (2), записанные в новых переменных, имеют вид

$$\Phi(x, 0) \sim B^{(+)} \exp(-ikx) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad \Phi(x, 0) \sim B^{(-)} \exp(ikx) \quad (x \rightarrow -\infty), \quad (12)$$

где коэффициенты $B^{(+)}$ и $B^{(-)}$ подлежат определению, причем $A^{(\pm)} = \gamma B^{(\pm)}$, $\delta^{(+)} = -\arg B^{(+)}$, $\delta^{(-)} = \arg B^{(-)}$.

Требуется определить коэффициенты отражения $A^{(+)}$ и прохождения $A^{(-)}$, а также амплитуды прогиба балки $|W(x)|$ и ее относительных удлинений $E(x) = \max_t |\varepsilon(x, t)| = \varepsilon_s |W_{xx}(x)|$ по известным параметрам падающей волны и балки.

Метод нормальных мод. Согласно методу нормальных мод прогиб пластины и распределение гидродинамического давления вдоль пластины определяются в виде разложений

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x), \quad P(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \psi_n(x) \quad (|x| < 1), \quad (13)$$

где A_n и P_n — неизвестные комплексные коэффициенты; $\psi_n(x)$ — нетривиальные вещественные решения спектральной задачи

$$\psi_n^{IV} = \lambda_n^4 \psi_n \quad (-1 < x < 1), \quad \psi_n''(\pm 1) = \psi_n'''(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm}. \quad (14)$$

Здесь λ_n — соответствующие собственные числа; $\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$ и $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$. Собственные функции с четными номерами являются четными по x , а с нечетными номерами — нечетными:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \sqrt{3/2} x, & \psi_{2n+1}(x) &= D_{2n+1} (\sin \lambda_{2n+1} x + S_{2n+1} \operatorname{sh}(\lambda_{2n+1} x)), \\ \psi_2(x) &= 1/\sqrt{2}, & \psi_{2n}(x) &= D_{2n} (\cos \lambda_{2n} x + S_{2n} \operatorname{ch}(\lambda_{2n} x)), \\ D_{2n+1} &= 1/\sqrt{1 - \cos^2 \lambda_{2n+1} / \operatorname{ch}^2 \lambda_{2n+1}}, & S_{2n+1} &= \cos \lambda_{2n+1} / \operatorname{ch} \lambda_{2n+1}, \\ D_{2n} &= 1/\sqrt{1 + \cos^2 \lambda_{2n} / \operatorname{ch}^2 \lambda_{2n}}, & S_{2n} &= \cos \lambda_{2n} / \operatorname{ch} \lambda_{2n}. \end{aligned}$$

Собственные числа λ_{2n} ($n \geq 2$) и λ_{2n+1} ($n \geq 1$) определяются из дисперсионных соотношений $\operatorname{tg} \lambda_{2n+1} = \operatorname{th} \lambda_{2n+1}$, $\operatorname{tg} \lambda_{2n} = -\operatorname{th} \lambda_{2n}$. Кроме того, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Уравнения (9), (11) и (14) позволяют установить связь между коэффициентами A_n и P_n :

$$P_n = -g_n A_n, \quad g_n = \alpha - \beta \lambda_n^4. \quad (15)$$

Уравнения (7), (8) и (11) показывают, что $\Phi_y - \gamma \Phi = -P(x, 0)$ при $y = 0$. С учетом этого условия потенциал скоростей $\Phi(x, y)$ можно представить в виде

$$\Phi(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \Phi^{(n)}(x, y), \quad (16)$$

где функции $\Phi^{(n)}(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (5), (6), краевому условию на верхней границе жидкого слоя

$$\Phi_y^{(n)} - \gamma \Phi^{(n)} = \psi_n(x) H(1 - x^2) \quad (y = 0)$$

и условиям излучения

$$\Phi^{(n)}(x, 0) \sim b_n^{(+)} \exp(-ikx) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad \Phi^{(n)}(x, 0) \sim b_n^{(-)} \exp(ikx) \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Если функции $\Phi^{(n)}(x, y)$ и числа $b_n^{(+)}$, $b_n^{(-)}$ найдены, то справедливы формула

$$B^{(\pm)} = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n b_n^{(\pm)}$$

и представление

$$\Phi^{(n)}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \psi_m(x) \quad (|x| < 1) \quad (17)$$

с комплексными коэффициентами C_{nm} . Заметим, что эти коэффициенты не зависят от параметров балки.

Подставляя (16), (17) и (13) в (11), с учетом (15) получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов P_n

$$\left(1 - \frac{1}{g_n}\right) P_n + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} P_m C_{mn} = \int_{-1}^1 \psi_n(x) \exp(ikx) dx. \quad (18)$$

Система (18) решается численно методом редукции, если известны гидродинамические коэффициенты C_{mn} . После этого коэффициенты A_n в разложении прогиба по собственным функциям (13) определяются по формулам (15).

Гидродинамические коэффициенты. Функции $\Phi^{(n)}(x, y)$ представимы в виде

$$\Phi^{(n)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \psi_n^F(\xi) \frac{\exp(i\xi x) d\xi}{G(\xi) - \gamma}, \quad (19)$$

где $\psi_n^F(\xi) = \int_{-1}^1 \psi_n(x_0) \exp(-ix_0\xi) dx_0$; $G(\xi) = \xi \operatorname{th} \xi H_0$; $G(k) = \gamma$. Контур интегрирования L

в (19) проходит на плоскости комплексного переменного ξ по действительной оси и обходит полюс в точке $\xi = -k$ снизу, а полюс в точке $\xi = k$ сверху. При таком выборе контура интегрирования условия излучения выполняются автоматически.

Анализ поведения интеграла в (19) при $x \rightarrow \pm\infty$ дает $b_n^{(\pm)} = -i\psi_n^F(\mp k)/G'(k)$, откуда

$$B^{(\pm)} = \frac{i}{G'(k)} \sum_{n=1}^{\infty} P_n \psi_n^F(\mp k). \quad (20)$$

Гидродинамические коэффициенты определяются по формуле

$$C_{nm} = \int_{-1}^1 \Phi^{(n)}(x, 0) \psi_m(x) dx,$$

которая с учетом (19) дает

$$C_{nm} = C_{nm}^R - iC_{nm}^I, \quad C_{nm}^R = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n^F(\xi) \psi_m^F(\xi)}{G(\xi) - \gamma} d\xi, \quad (21)$$

$$C_{nm}^I = \frac{1}{2G'(k)} [\psi_n^F(-k) \psi_m^F(k) + \psi_n^F(k) \psi_m^F(-k)].$$

Видно, что $C_{nm} = C_{mn}$, если $n, m \geq 1$, и $C_{nm} = 0$, если $n + m$ нечетное. Деформируя в случае конечной глубины жидкости контур интегрирования в (21), интеграл, понимаемый в смысле его главного значения по Коши, можно представить в виде ряда, удобного для численных расчетов.

Численные результаты. При решении системы (18) удерживалось 60 четных и 60 нечетных мод. Сравнение полученных по предложенной модели численных результатов

для безразмерной амплитуды изгибающих напряжений с результатами расчетов [4], выполненных для условий экспериментов [1], показано на рис. 2. Кривые, полученные с помощью метода нормальных мод, показаны сплошной линией, расчеты [4] — штриховой. Для удобства сравнения с экспериментальными данными результаты представлены в том же виде, что и в [1]. Здесь $\bar{M} = |M(x)|/(2A\rho a dg) = (\beta a/d)|W''(x)|$, где $|M(x)|$ — амплитуда изгибающих напряжений; T — период падающей волны. Видно, что для достаточно длинных волн (период $T = 1,429$ с соответствует длине волны 3,1 м, период $T = 2,875$ с — длине волны 8,6 м) результаты расчетов, выполненных двумя различными методами, практически совпадают. Однако для коротких волн (период $T = 0,7$ с соответствует длине волны 0,765 м) отличие существенно. Следует отметить, что для коротких волн различные источники дают разные результаты. Экспериментальное значение максимума безразмерной амплитуды изгибающих напряжений равно примерно 0,5, численными расчетами в [1] получено значение 1,2, в [4] — 0,38, в настоящей работе — 0,78. Для длинных волн почти все численные результаты [1, 4] хорошо согласуются с экспериментом.

Длинноволновое приближение. Краевая задача (5)–(12) рассматривается при следующих условиях: $k \ll 1$, $\beta = O(1)$, $H_0 = O(1)$, $\gamma = O(k^2)$ и $d/a = o(1)$. В главном приближении предполагается, что присутствие пластины оказывает слабое влияние на волновое движение, если длина набегающей волны достаточно велика. Тогда из уравнения (9) можно исключить слагаемое $\gamma\Phi(x, 0)$, которое имеет порядок $O(k^2)$ при $k \rightarrow 0$, и найти решение упрощенного уравнения при граничных условиях (10) в виде

$$W(x) \approx N[\exp(ikx) + k^2W_1(x) + ik^3W_2(x)], \quad (22)$$

где $N = (1 - \alpha + \beta k^4)^{-1}$. Функции $W_j(x)$, $j = 1, 2$ удовлетворяют уравнению

$$\beta \frac{d^4W_j}{dx^4} + (1 - \alpha)W_j = 0 \quad (|x| < 1) \quad (23)$$

и граничным условиям

$$\frac{d^2W_1}{dx^2} = \exp(\pm ik), \quad \frac{d^3W_1}{dx^3} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{d^2W_2}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3W_2}{dx^3} = \exp(\pm ik) \quad (x = \pm 1). \quad (25)$$

Из решений краевых задач (23), (24) и (23), (25) следует, что при малых β функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ локализованы вблизи концов балки, причем размеры окрестностей имеют порядок $O(\beta^{1/4})$.

Подставляя (22) в (8), получим краевую задачу для определения поправки к потенциалу скоростей, обусловленной наличием плавающей пластины. В общем случае приближение (22) справедливо, когда указанная поправка мала по абсолютной величине при $|x| < 1$. Анализ длинноволнового приближения показывает, что это условие выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta k^4 \ll 1$. В последнем неравенстве учтено, что $W_1 = O(\beta^{1/2})$ и $W_2 = O(\beta^{3/4})$ при $\beta \rightarrow 0$.

Отметим, что длинноволновое приближение позволяет получить решения для прогиба пластины и напряжений в ней в аналитическом виде. На рис. 3 показаны безразмерные амплитуды изгибающих моментов, полученные в рамках длинноволнового приближения (штриховые линии) и с помощью метода нормальных мод (сплошные линии) при тех же параметрах падающей волны, что и на рис. 2. Видно, что для коротких волн длинноволновое приближение неверно описывает распределение изгибающих моментов вдоль пластины и их амплитуду. Для умеренных длин набегающей волны длинноволновое приближение

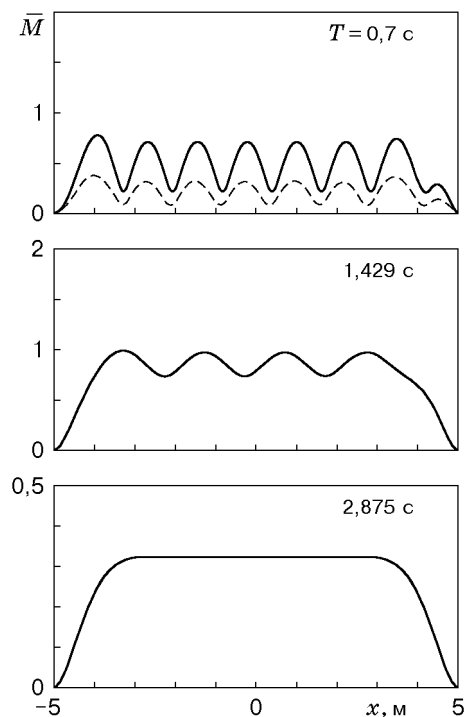


Рис. 2

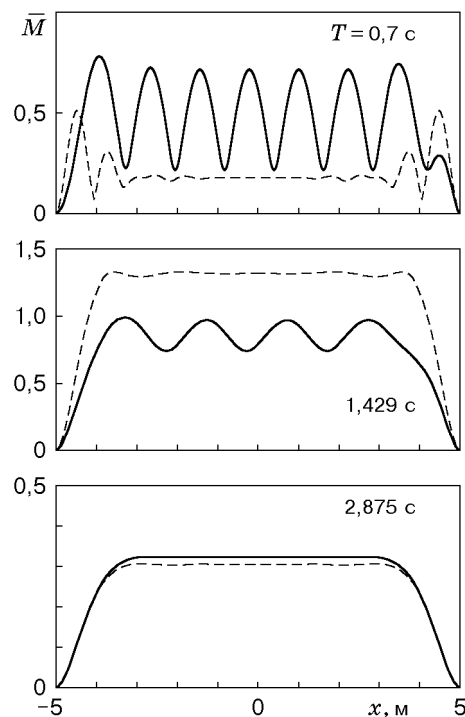


Рис. 3

дает упрощенное описание. Однако для волн, длина которых сравнима с длиной пластины, приближенное аналитическое решение хорошо согласуется с численным, полученным в рамках полной линейной модели.

Результаты настоящей работы показывают, что длинноволновое приближение позволяет описать гидроупругое поведение плавающих пластин при длинах набегающих волн, превышающих полную длину пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wu C., Watanabe E., Utsunomiya T.** An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // *Appl. Ocean Res.* 1995. V. 17, N 5. P. 301–310.
2. **Yago K., Endo H.** On the hydroelastic response of box-shaped floating structure with shallow draft // *J. Soc. Naval Architects Japan.* 1998. V. 182. P. 307–317.
3. **Meylan M., Squire V. A.** Finite-floe wave reflection and transmission coefficients from a semi-infinite model // *J. Geophys. Res.* 1993. V. 98, N C7. P. 12537–12542.
4. **Стурова И. В.** Косое набежание поверхностных волн на упругую полосу // *ПМТФ.* 1999. Т. 40, № 4. С. 62–68.
5. **Mamidipudi P., Webster W. C.** The motions performance of a mat-like floating airport // *Hydroelasticity'94: Proc. of the Intern. conf., Trondheim, Norway, 25–27 May, 1994.* Rotterdam, 1994.

*Поступила в редакцию 11/1 1999 г.,
в окончательном варианте — 26/III 1999 г.*