

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФАЗ В КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

Ю. А. Бувевич (Москва)

В предельно разбавленных дисперсных системах каждую частицу (твердую, жидкую или газообразную) можно рассматривать как находящуюся в невозмущенном гидродинамическом поле дисперсионной среды. В этом приближении сила межфазового вязкого взаимодействия аддитивна по частицам и представляет в простейшем случае силу Стокса, умноженную на число частиц в некотором объеме смеси. Исследованию взаимного влияния на движение друг друга частиц, перемещающихся относительно жидкой фазы (например, под действием силы тяжести) посвящено огромное количество теоретических и экспериментальных работ. В большинстве из них рассматриваются лишь конечное число близко расположенных частиц, падающих в жидкости, и возникающие в такой системе гидродинамические обменные силы. При этом оказывается, что влияние этих сил ведет к увеличению скорости падения каждой отдельной частицы по сравнению со стоксовской скоростью. Между тем, в протяженных дисперсных системах наблюдается прямо противоположный эффект, который не может быть объяснен только из рассмотрения обменных сил между парами частиц. Например, для поддержания твердых частиц в псевдооживленном состоянии необходимо, чтобы жидкая фаза перемещалась относительно этих частиц со средней скоростью, часто на порядок меньшей стоксовской. Ниже предлагается простое соотношение между скоростью скольжения фаз и вязкой силой, действующей на одну частицу дисперсной системы, которое находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными фактами.

Рассмотрим взвесь сферических образований радиуса a в жидкой среде, находящуюся, например, в поле тяжести. При высокой объемной концентрации сфер можно считать, что влияние каждой из них на течение жидкой фазы распространяется лишь на конечные, зависящие от концентрации расстояния от этой сферы. Иными словами, в концентрированной дисперсной системе имеет место некое эффективное экранирование дальнего гидродинамического взаимодействия, а обусловленное частицей возмущение течения существенно только в некотором ограниченном объеме, примыкающем к частице. Близкие модели использовались ранее при вычислении вязкости суспензий, в теории фильтрации аэрозолей и т. п. (см., например, [1-3]). Точное определение среднего такого объема, его величины и формы, при отсутствии детальных сведений о микроструктуре системы и о силах взаимодействия между частицами, невозможно. Однако в первом приближении этот объем может быть описан при помощи «ячеечной модели» системы, аналогичной соответствующей модели в кинетической теории плотных газов. А именно, допустим, что в среднем каждой частице соответствует сферическая ячейка, концентрическая с частицей и имеющая радиус $a' > a$, причем возмущения течения вне этой ячейки не влияют на течение жидкости внутри нее, и наоборот. Математически это выражается в задании на поверхности такой «сферы влияния» граничного условия обращения в нуль радиальной компоненты скорости возмущения, вносимого рассматриваемой частицей внутри сферы.

Оценим величину a' . Удельный объем одной частицы $\tau = 1/n = \theta/\rho$, где θ — объем частицы, а n и ρ — счетная и объемная концентрации частиц. Очевидно,

$$a' = ka\rho^{-1/3} \quad (1)$$

Здесь k — параметр, близкий к единице; вообще говоря, k может слабо зависеть от ρ .

Задачу о стесненном обтекании частицы решаем методом, используемым в [4]. Линеаризованные уравнения Стокса вне частицы имеют вид

$$\mu\Delta\mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla\mathbf{v} = 0$$

Отсюда следует

$$\Delta[\nabla\times\mathbf{v}] = 0 \quad (2)$$

Аналогичные уравнения имеют место и внутри сферы радиуса a . Для определенности все величины, относящиеся к внутреннему течению, помечаем в дальнейшем штрихом.

Дивергенция вектора \mathbf{v} тождественно равна нулю, поэтому \mathbf{v} можно выразить в виде ротора некоторого аксиального вектора \mathbf{w} , который должен линейно зависеть от вектора средней скорости межфазового скольжения \mathbf{u} . Такой вектор можно построить единственным образом, т. е. получим

$$\mathbf{v} = \nabla\times[\nabla\times(f\mathbf{u})] \quad (3)$$

Здесь f — некая скалярная функция от расстояния от центра частицы r . Из (2) и (3) имеем

$$\Delta[\nabla\times\mathbf{v}] = \Delta(\nabla\nabla - \Delta)[\nabla\times f\mathbf{u}] = -\Delta^2[\nabla\times f\mathbf{u}] = 0$$

Поскольку вектор \mathbf{u} постоянен и произволен, получим отсюда

$$\Delta^2 (\nabla f) = 0, \quad \Delta^2 f = \text{const}$$

Общее решение этого уравнения, зависящее только от r , представимо в виде

$$f = \alpha r^4 + \beta r^2 + \gamma r + \delta r^{-1}$$

Вычисляя, получим для давлений и компонент скоростей внутри и вне сферы во введенной обычным образом сферической системе координат

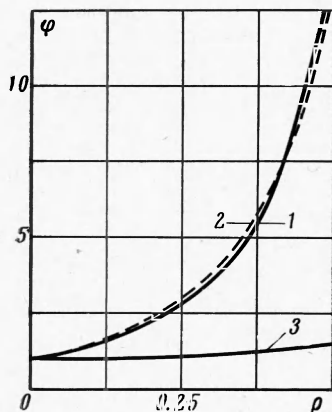
$$\begin{aligned} v_r &= \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + Cr^2 + u \right) \cos \theta, & v_r' &= (cr^2 + d) \cos \theta \\ v_\theta &= \left(\frac{A}{2r^3} - \frac{B}{2r} - 2Cr^2 - u \right) \sin \theta, & v_\theta' &= (-2cr^2 - d) \sin \theta \\ p &= \mu (B/r^2 + 10Cr) \cos \theta, & p' &= \mu' (10cr + e) \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь A, B, C, c, d и e — постоянные. Граничные условия задачи имеют вид

$$v_r = v_r' = 0, \quad v_\theta = v_\theta', \quad r = a, \quad v_r = u \cos \theta, \quad r = a'$$

$$\begin{aligned} -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -p' + 2\mu' \frac{\partial v_r'}{\partial r}, & r &= a \\ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) &= \mu' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta'}{\partial r} - \frac{v_\theta'}{r} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

После вычисления постоянных из условий (5) и подстановки их в (4) получим для компонент тензора вязких напряжений вне сферы



$$\sigma_{rr} = \frac{3\mu u}{2P(\xi)} \left[1 + \frac{2}{\kappa} - 10\xi^3 + \left(4 - \frac{2}{\kappa} \right) \xi^5 \right] \cos \theta$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{3\mu u}{aP(\xi)} (1 + 5\xi^3 - \xi^5) \sin \theta$$

$$P(\xi) = 2 \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) - 5\xi^3 + \left(3 - \frac{2}{\kappa} \right) \xi^5.$$

$$\xi = \frac{a}{a'}, \quad \kappa = \frac{\mu'}{\mu}$$

Вычисление силы \bar{F} , действующей на одну частицу, дает

$$\begin{aligned} F &= 4\pi a \mu u \lambda (1 + G(\xi, \kappa)), & \lambda &= \frac{3\mu' + 2\mu}{2(\mu' + \mu)} \\ G(\xi, \kappa) &= \frac{\xi^3}{P(\xi)} \left\{ 5 - \left[3 - \frac{2}{\kappa} + \frac{2}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \right] \xi^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим предельные случаи. При $\kappa \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 3/2$ (твердые частицы)

$$F = 6\pi a \mu u (1 + {}^{5/3}M(\xi)), \quad M(\xi) = \frac{\xi^3 (3 - \xi^2)}{2 - 5\xi^3 + 3\xi^5} \quad (7)$$

При $\kappa \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 1$ (пузырьки газа в вязкой жидкости) имеем

$$F = 4\pi a \mu u (1 + 2N(\xi)), \quad N(\xi) = \xi^5 (1 - \xi^5)^{-1} \quad (8)$$

Легко видеть, что при $\xi \rightarrow 0$ из (6) получается известная формула Рыбчинского — Адамара, а из (7) или (8) — ее частные случаи. Из (6) легко усмотреть, что F обращается в бесконечность при $\xi \sim \rho^{1/3} \rightarrow 1$, как это и должно быть; в действительности, конечно, максимально возможные значения ρ равны таковым для плотных упаковок (кубической, гексагональной), т. е. меньше единицы. Заметим, что полученные выражения справедливы лишь в случае, когда частицы имеют сферическую или близкую к сферической форму. Для капель и пузырьков это допущение справедливо, если поверхностное натяжение на поверхности раздела фаз достаточно велико, либо же линейные размеры частиц достаточно малы.

Представляет интерес сравнить результаты работы с опытными данными. Известно [5], что сила вязкого сопротивления взвешенного слоя в области малых чисел Рейнольдса удовлетворительно описывается соотношением вида (7), в котором вместо $1 + \frac{5}{3}M$ стоит величина $\psi = (1 - \rho)^{-3.75}$. Результаты численного расчета функций $\varphi = 1 + \frac{5}{3}M$ с ξ , вычисленной из (1) при $k \approx 1.1$, и ψ представлены на фигуре (кривые 1 и 2 соответственно). Видно, что соответствие между экспериментальными данными и развитой теорией весьма хорошее. На этой же фигуре показана функция $1 + 2N$ (кривая 3). Из сравнения кривых 1 и 3 следует интересный вывод, что различие между силами вязкого взаимодействия твердой и газообразной диспергированных фаз с жидкой фазой в концентрированных дисперсных системах оказывается значительно более сильным, чем различие в силах Стокса, действующих на изолированные пузырьки и твердую частицу одинаковых размеров.

Поступила 29 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Simha R. Treatment of the Viscosity of Concentrated Suspensions. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 9, p. 1020.
2. H a p p e l J. Viscous Flow in Multiparticle Systems: Slow Motion of Fluids Relative to Beds of Spherical Particles. A. I. Chem. Engng. J., 1958, vol. 4 p. 197.
3. A d l e r I. L., H a p p e l J. The Fluidization of Uniform Smooth Spheres in Liquid Media. Chem. Engng. Progr. Sympos. Series, 1962, vol. 58, No. 38, p. 98.
4. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
5. Г о р о ш к о В. Д., Р о з е н б а у м Р. Б., Т о д е с О. М. Приближенные закономерности гидравлики псевдооживленного слоя. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, 1958, т. 1, № 1, стр. 125.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ

Л. И. Мальцев (Новосибирск)

Рассматривается задача о построении кавитационного обтекания криволинейной дуги по схеме Рябушинского по заданному распределению скорости. Впервые обратная задача была поставлена и решена для случая отрывного обтекания по схеме Кирхгоффа в безграничном потоке Г. Г. Тумашевым [1], а Г. Н. Пыхтеевым [2] — для дуги в канале. Им же решена обратная задача обтекания дуги по схеме Гильберга — Эффроса [3].

1. Рассмотрим кавитационное обтекание симметричной криволинейной дуги L плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости по схеме Рябушинского с зеркалом, изображенной на фиг. 1.

Буквами V_∞ , V_0 , $2S_0$, φ_0 обозначим соответственно величину скорости невозмущенного потока, величину скорости на свободных струях, длину обтекаемой дуги L , значение потенциала скорости в точках отрыва.

Пусть на обтекаемой дуге задано распределение модуля скорости в виде функции дуговой абсциссы

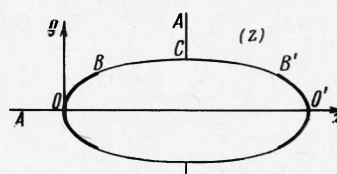
$$V = V_0 f(s) \quad (s = S / S_0, \quad 0 \leq s \leq 1)$$

Функция $f(s)$ предполагается однозначной, положительной, удовлетворяющей условию Гельдера и условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Требуется построить форму контура L и форму свободных струй, а также найти сопротивление дуги. В силу симметрии будем рассматривать течение только во второй четверти физической плоскости z .

2. Комплексный потенциал скорости $W = \varphi + i\psi$ в точке C , а также функцию тока ψ на линии тока $AOBVC'O'A$ примем равными нулю. Тогда область изменения W будет представлять собой вторую четверть плоскости. Функция $W(\zeta)$, отображающая область изменения W на первую четверть вспомогательного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ с соответствием точек, указанным на фиг. 1, 2, 3, легко найдется

$$W(\zeta) = \frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\zeta^2+a^2}} \quad (2.1)$$



Фиг. 1