

УДК 532.516

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ РЕЧНЫМ ПОТОКОМ

В. А. Шлычков

Новосибирский филиал Института водных и экологических проблем СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: slav@iwep.nsc.ru

С использованием двумерной системы уравнений несжимаемой жидкости, записанной для продольно-вертикальной плоскости, исследовано течение в естественных водотоках со свободной поверхностью. В рамках теории подобия с помощью разложения искомых переменных в степенные ряды заданной структуры задача сводится к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых получено аналитическое решение. Решение воспроизводит пространственную картину потока, обтекающего донную поверхность произвольной геометрии. Представлены результаты расчета поля давления вблизи подводного трубопровода, которое может использоваться при анализе устойчивости системы трубопровод — донный грунт в случае появления размывов.

Ключевые слова: речной водоток, обтекание препятствий, уравнения гидродинамики, несжимаемая жидкость, перепад давления, устойчивость донного грунта.

Введение. При обтекании водным потоком неровностей дна в распределениях скорости и давления возникают локальные неоднородности, которые в определенных условиях способствуют размыву донного грунта. Эти процессы представляют потенциальную опасность в окрестности подводных транспортных трубопроводов, пересекающих речные водотоки. На размывом участке дна нередко происходит провисание трубопровода, что приводит к генерации свободных колебаний, вызывающих механическое повреждение трубы, и утечке транспортируемых веществ в воду.

Основной причиной появления первоначального размыва является перепад давления по разные стороны трубы, возникающий вследствие динамических процессов. При достижении критических значений градиента давления происходит быстрый выброс водопесчаной смеси с образованием локализованного канала (туннеля) протечки под трубой, который далее увеличивается по ширине и глубине [1]. Для оценки устойчивости дна под трубопроводом требуется определить поле давления при заданных параметрах речного потока. Такая задача может быть решена методами гидравлического или численного моделирования, однако эти подходы являются ресурсозатратными. Для проведения инженерно-технических и проектных расчетов, экспресс-диагностики подводных переходов необходимо использовать сравнительно простые методы, обеспечивающие быстрый анализ динамических характеристик потока для разработки средств защиты трубопровода.

Упрощенные модели для расчета поля придонного давления в рамках двумерного описания течений предложены в [2]. При этом продольная скорость в каждом сечении потока

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта № 109 СО РАН.

считалась постоянной и равной среднему значению по вертикали. Это позволило проинтегрировать уравнение неразрывности и получить простую связь горизонтальной и вертикальной компонент скорости. Однако в реальном речном потоке скорость неоднородна по вертикали, в частности быстро затухает вблизи дна, поэтому предположение о ее неизменности по глубине не соответствует физической картине течения. Вертикальный сдвиг скорости значительно влияет на динамическую структуру потока при обтекании препятствия [3], поэтому при получении решения желательно учитывать изменение скорости по глубине.

Целью работы является построение параметрической модели для расчета поля давления в потоке с переменным по вертикали профилем скорости, который формируется при обтекании подводных препятствий несжимаемой жидкостью со свободной поверхностью.

Постановка задачи и аналитическое решение. Рассмотрим водный поток со свободной поверхностью, обтекающий донный рельеф. Считая рельеф и параметры потока однородными в поперечном направлении [4], будем описывать течение двумерными уравнениями гидродинамики несжимаемой турбулентной жидкости. Пусть x, z — оси декартовой системы координат, направленные по горизонтали и вертикали соответственно, u, w — составляющие вектора скорости вдоль этих осей.

Предполагая сопоставимыми характерные горизонтальные и вертикальные масштабы возмущений, введем безразмерные величины (переменные с чертой)

$$x = H\bar{x}, \quad z = H\bar{z}, \quad u = U\bar{u}, \quad w = U\bar{w}, \quad p = P\bar{p}$$

(p — давление; $H, U, P = \rho gH$ — масштабы соответствующих величин; ρ — плотность воды). Обозначим число Фруда $Fr = U^2/(gH)$ и запишем уравнения движения в стационарном приближении в безразмерном виде (черта над переменными опущена)

$$\begin{aligned} Fr \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{K} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{K} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ Fr u^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{u} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - 1 + \frac{\partial}{\partial x} \bar{K} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{K} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\bar{K} = UK/(gH^2)$ — безразмерный коэффициент турбулентности. Левая часть второго уравнения движения в (1) преобразована с помощью уравнения неразрывности.

Сформулируем краевые условия, необходимые на данном этапе решения:

$$z = z_b: \quad w = u \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad z = \zeta: \quad w = u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

($z = z_b(x), z = \zeta(x)$ — функции, задающие форму дна и свободной поверхности соответственно).

Основная трудность получения решений системы (1) заключается в необходимости одновременного интегрирования уравнений количества движения и неразрывности. Сначала будем искать решение уравнения неразрывности в виде полиномов по z

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^N u_n (z - z_0)^n, \quad w = u(a + bz), \quad (2)$$

где u_n, a, b — искомые функции x ; z_0 — заданная точка разложения функции в ряд. Из краевых условий и (2) с учетом связи $\zeta = h + z_b$, где h — глубина потока, получаем соотношения

$$a = z'_b - \frac{h'}{h} z_b, \quad b = \frac{h'}{h} \quad (3)$$

(штрих над переменными означает производную по x).

Подставляя выражения (2) в уравнение неразрывности, запишем систему для определения u_n

$$u'_n + (n+1)au_{n+1} + (n+1)bu_n = 0, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad u'_N + (N+1)bu_N = 0. \quad (4)$$

Последнее уравнение в (4) интегрируется в виде $h^{N+1}u_N = C_N$, где C_N — произвольная постоянная. Подставляя найденное значение u_N в уравнение для u'_{N-1} , можно получить интеграл вида $h^N u_{N-1} + NrC_N = C_{N-1}$, где $r = z_b/h$; C_{N-1} — постоянная. Уравнения для u_n с меньшими значениями n решаются путем последовательной подстановки выражений для u_{n+1} . При этом текущее решение u_n представляет собой многочлен от функции $r(x)$ со старшим членом r^{n+1} и коэффициентами, рекуррентно зависящими от коэффициентов многочлена u_{n+1} . Выражения для коэффициентов можно получить методом обратной индукции (с уменьшением параметра индукции n); в силу громоздкости формул приведем лишь сравнительно простую, которой заканчиваются вычисления:

$$hu_0 = \sum_{k=0}^N (-1)^k C_k r^k$$

(C_k — постоянные интегрирования).

Расчет завершается определением постоянных C_k , для чего используется краевое условие по x . Рассмотрим область $-\infty \leq x \leq \infty$, в которой на входной границе $x = -\infty$ горизонтальные неоднородности отсутствуют, т. е. $a = b = r = 0$, и задан некоторый профиль скорости $\tilde{u}(z)$ набегающего потока. Анализ точного решения показывает, что при этих условиях на границе выполняется равенство $h^{n+1}u_n = C_n$. Поскольку в безразмерных переменных $h = 1$, значения констант C_n равны заданным коэффициентам разложения

граничного профиля скорости по степеням $z - z_0$, $\tilde{u}(z) = \tilde{u}(x, z)|_{x=-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{u}_n (z - z_0)^n$,

т. е. $C_n = \tilde{u}_n$ согласно (2).

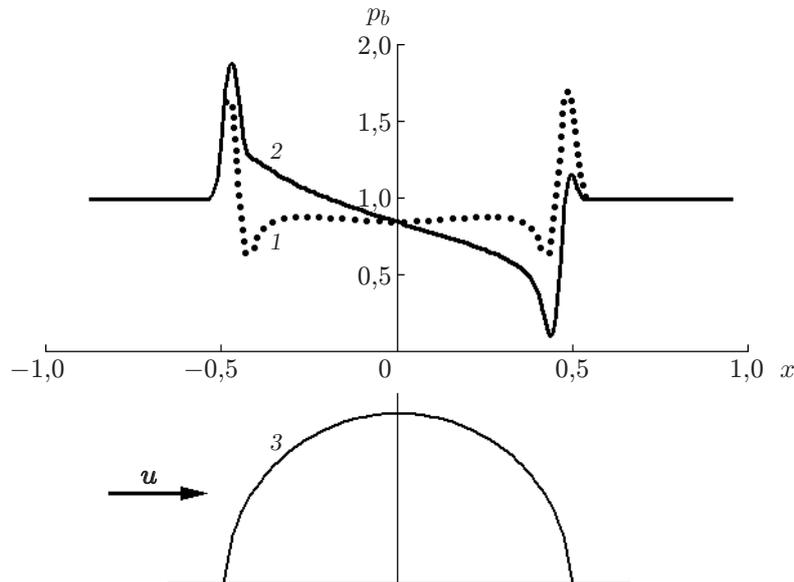
Таким образом, с учетом представления (2) можно утверждать, что найдено точное решение $u(x, z)$, $w(x, z)$ уравнения неразрывности для двумерного потока, обтекающего донные препятствия, при произвольных функциях рельефа и глубины. Полученное решение обобщает решение, найденное в [4], на случай переменного по вертикали профиля невозмущенной скорости во входном сечении, что необходимо для адекватного воспроизведения параметров реальных водотоков.

С использованием решения (2) давление определяется из второго уравнения движения в (1). В пренебрежении слагаемым $\partial(\bar{K} \partial w / \partial x) / \partial x$ и после интегрирования уравнения по z от свободной поверхности ζ до дна z_b с краевым условием $p = 0$ при $z = \zeta$ получаем выражение для придонного давления

$$p_b = h + \text{Fr} \int_{z_b}^{\zeta} u^2(a' + b'z) dz - \bar{K} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=\zeta} + \bar{K} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=z_b}, \quad (5)$$

где $p_b = p|_{z=z_b}$. Величина h в правой части (5) соответствует вкладу гидростатической компоненты, остальные слагаемые характеризуют избыточное динамическое давление. С помощью уравнения неразрывности слагаемые вида $\bar{K} \partial w / \partial z$ преобразуются к виду $-\bar{K} \partial u / \partial x$.

В формулу (5) входит неизвестная величина $\zeta(x)$, которая должна быть определена в ходе решения задачи. Для расчета ζ используется первое уравнение в (1). Однако если



Горизонтальное распределение безразмерного давления без учета (1) и с учетом (2) турбулентной вязкости при обтекании донного препятствия (3)

предположить, что возмущения свободной поверхности невелики ($F_r \ll 1$), то можно принять $\zeta \approx 1$ и выразить из (5) $h = 1 - z_b$. В формулах (3) получаем $a = -b = (\ln(1/(1 - z_b)))'$, и решение упрощается.

В качестве примера на рисунке приведено распределение давления, полученное по формуле (5) в случае обтекания круглой трубы, погруженной в донный грунт на глубину, равную половине диаметра. Профиль скорости на входной границе задавался в виде линейной функции, возрастающей от 0 до 1 на свободной поверхности. Решение получено при $F_r = 0,1$. Продольному распределению $p_b(x)$ соответствует кривая 1 на рисунке, полученная с использованием (5) при $\bar{K} = 0$.

На рисунке видно, что придонное давление симметрично относительно центра трубы, т. е. на передней и задней кромках препятствия перепада давления не наблюдается. Результаты расчетов, выполненных по двумерной конечно-разностной модели, подтверждают этот вывод.

Кривая 2 получена с учетом турбулентной вязкости. На переднем фронте трубы возникает повышенное давление, сопоставимое с невозмущенным гидростатическим давлением (см. рисунок). Наличие скачка обусловлено увеличением сопротивления при натекании потока на препятствие. На периметре трубы давление постепенно уменьшается, а в окрестности задней стенки возникает скачок разрежения, где давление уменьшается до минимального значения. Перепад давления на профиле трубы является искомой величиной. Результаты расчета показывают, что амплитуда падения давления, являющаяся функцией основных параметров потока, в значительной степени зависит от интенсивности турбулентного обмена, поэтому при описании структуры поля давления в численных моделях необходимо применять максимально полные и физически обоснованные методы турбулентного замыкания.

Следует отметить, что падение давления за препятствием подтверждено теоретически и экспериментально и является причиной возникновения эффекта подсоса, когда позади трубы появляется возвратная рециркуляция в виде вихревой структуры, заполняющей область разрежения [5].

Заключение. Задача определения стационарного поля давления при поперечном обтекании трубы с полукруглым сечением, лежащей на дне в потоке воды, решена аналитическими методами. Рассмотрен случай, когда скорость набегающего потока не является постоянной по вертикали, а меняется в зависимости от глубины. Получены конечные разрешающие формулы, позволяющие рассчитать перепад давления на поверхности трубы в зависимости от параметров потока. Это дает возможность оценить вероятность появления размывов песчаного дна под трубой. Показано, что для адекватного описания градиентов давления необходимо учитывать турбулентный обмен в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sumer B. M., Truelsen C., Sichmann T., Fredsoe J.** Onset of scour below pipelines and self-burial // Coastal Engng. 2001. V. 42. P. 313–335.
2. **Naghdì P. M., Vongsarnpigoon L.** The downstream flow beyond an obstacle // J. Fluid Mech. 1986. V. 162. P. 223–236.
3. **Белоцерковский С. М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ. М.: Наука, 1988.
4. **Castro-Orgaz O., Hager W. H.** Turbulent near-critical open channel flow: Serre's similarity theory // J. Hydraulic Engng. ACSE. 2011. N 5. P. 497–503.
5. **Чжен П.** Отрывные течения. М.: Мир, 1972. Т. 1.

Поступила в редакцию 21/V 2013 г.
