

ЛИТЕРАТУРА

1. Шер Е. Н. Динамика растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза в условиях антиплоской деформации.— ПМТФ, 1977, № 4.
2. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
3. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
4. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний.— В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, 1957.
5. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Автомодельная задача динамической теории упругости для полуплоскости.— В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М., Наука, 1975.

УДК 539.31

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРТОТРОПИИ НА СПЕКТР В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК

В. М. Ермоленко

(Новосибирск)

Необходимость исследования распределения собственных частот колебаний тонких упругих оболочек выявилась после появления работы [1], где было обнаружено, что спектр в задачах колебаний имеет точки сгущения, существование которых обусловлено спецификой уравнений. В обзоре [2] изложено современное состояние теории распределения частот. Подобный подход применен к исследованию спектров колебаний ортотропных круговых цилиндрических оболочек [3]. Полученный интеграл гиперэллиптического типа вычислялся на ЭВМ. В работе [4] исследован спектр колебаний пологих ортотропных оболочек произвольной кривизны, интеграл гиперэллиптического типа сводится к эллиптическому путем введения приближенного соотношения. В связи с механическими приложениями наибольший интерес представляют начальные точки и точки сгущения спектра, а также их взаимное расположение в зависимости от геометрии оболочки и свойств материала. Ниже рассматривается асимптотическая функция распределения, асимптотическая плотность собственных частот, точки сгущения спектра.

1. Уравнения свободных колебаний пологих ортотропных оболочек запишем в виде [5]

$$(1.1) \quad L_1(c_{jk})w + \Delta_k \psi = \rho h \Omega^2 w, \quad L_2(c_{jk})\psi - \Delta_k w = 0,$$

$$L_1(c_{jk}) = \frac{h^3}{12} \left[c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(c_{12} + 2c_{33}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right],$$

$$L_2(c_{jk}) = \frac{1}{h(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \left[c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}}{c_{33}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right],$$

$$\Delta_k = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где c_{jk} ($j, k = 1, 2$), c_{33} — упругие константы материала; R_1, R_2 — радиусы кривизны оболочки.

Асимптотическая формула для частот колебаний оболочки, прямоугольной в плане, имеет вид [6]

$$(1.2) \quad \Omega^2 R^4 \rho h^{-2} = c_{11} k_m^4 + 2(c_{12} + 2c_{33}) k_m^2 k_n^2 + c_{22} k_n^4 + \\ + \chi^4 (k_m + \chi k_n)^2 \left[c_{11} k_m^4 + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 + 2c_{12}c_{33}}{c_{33}} k_m^2 k_n^2 + c_{22} k_n^4 \right],$$

$$k_m = m\pi R/a, \quad k_n = n\pi R/b, \quad \kappa^4 = \frac{12R^4(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}{R_2^2 h^2}, \quad \chi = R_2/R_1,$$

где a, b — размеры оболочки в плане, $|\chi| \leq 1$, так как всегда можем поменять местами оси координат. Применимость формулы (1.2) для определения частот колебаний обсуждалась в работе [6], где определены условия вырождения динамического краевого эффекта. Для шарнирно-опертых оболочек формула (1.2) является точной.

На плоскости волновых чисел k_m, k_n введем систему координат

$$(1.3) \quad k_m = r \cos \theta, \quad k_n = r \sin \theta \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2).$$

Подставим выражения для k_m, k_n в (1.2). Из полученного соотношения найдем формулу для r , которая после еще одной замены $\xi = \sin^2 \theta$ ($0 \leq \xi \leq 1$) примет вид

$$(1.4) \quad r = \{\kappa^2 \sqrt{\omega^2 W_2 - [1 - \xi(1 - \chi)]^2 / (W_1 W_2)}\}^{1/2},$$

$$W_1 = c_{11}(1 - \xi)^2 + 2(c_{12} + 2c_{33})\xi(1 - \xi) + c_{22}\xi^2, \quad \omega = R^4 \rho h^{-3} \Omega^2 / \kappa^2,$$

$$W_2 = c_{11}(1 - \xi)^2 + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}}{c_{33}}\xi(1 - \xi) + c_{22}\xi^2.$$

На плоскости $k_m k_n$ данная формула определяет области волновых чисел $k_m k_n$, соответствующих одинаковым значениям ω . По смыслу величина r такова, что выражение под радикалом в фигурных скобках в (1.4) должно быть неотрицательно хотя бы для одного значения ξ из интервала $[0, 1]$. Минимальное значение ω , при котором это условие выполняется, дает нам начальную точку спектра задачи, т. е. вопрос об определении начала спектра сводится к исследованию функции

$$f(\omega, \xi) = \omega^2 W_2 - [1 - \xi(1 - \chi)]^2,$$

имеющей второй порядок относительно ξ и сложным образом зависящей от параметров ортотропии c_{jk}, c_{33} и параметра χ , характеризующего геометрию оболочки.

2. Число собственных частот (меньше заданного значения ω_0) определяем, следуя Р. Куранту (см. обзор [2]), как отношение площади S на плоскости волновых чисел $k_m k_n$, внутри которой $\omega \leq \omega_0$, к площади одной ячейки $\Delta k_m \Delta k_n$

$$(2.1) \quad N(\omega) = \frac{1}{\Delta k_m \Delta k_n} \int_S dk_m dk_n.$$

После введения новой системы координат для k_m, k_n (1.3) выражение (2.1) проинтегрируем по r

$$(2.2) \quad N(\omega) = \frac{ab}{2\pi^2 R^2} \int_{\theta_1(\omega)}^{\theta_2(\omega)} r^2 d\theta.$$

Асимптотическую плотность собственных частот находим, дифференцируя (2.2) по ω

$$(2.3) \quad M(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{ab}{2\pi^2 R^2} \left\{ \int_{\theta_1(\omega)}^{\theta_2(\omega)} \frac{dr^2(\omega, \theta)}{d\omega} d\theta - r^2(\omega, \theta_1) \frac{d\theta_1}{d\omega} + \right. \\ \left. + r^2(\omega, \theta_2) \frac{d\theta_2}{d\omega} \right\}.$$

Подставим сюда выражение для r из (1.4). Внеинтегральные члены здесь равны нулю. Формула (2.3) принимает вид

$$(2.4) \quad M(\omega) = \frac{ab}{2\pi^2 R^2} I, \quad I = \int_{\alpha_1(\omega)}^{\alpha_2(\omega)} \omega \left[\frac{W_2}{\xi(1-\xi)f(\omega, \xi)} \right]^{1/2} d\xi.$$

Пределы интегрирования определяются из условия неотрицательности подкоренного выражения в I , что равносильно выполнению соотношения $f(\omega, \xi) \geq 0$. Функции W_1, W_2 для всех параметров ортотропии при $0 \leq \xi \leq 1$ положительны. Точки сгущения спектра определяются из условия расходимости интеграла (2.4). Необходимое требование при этом — равенство нулю знаменателя в I

$$(2.5) \quad f_1(\omega, \xi) = \xi(1-\xi)\{\omega^2 W_2 - [1 - \xi(1-\chi)]^2\} = 0.$$

В работе [4] выражение для границы интегрирования (1.4) заменялось приближенным соотношением, благодаря чему интеграл I можно было выразить через полные эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра.

3. Для параметров ортотропии, входящих в (2.5) через W_2 , могут представиться следующие возможные соотношения:

если $c_{22} > c_{11}$, то

$$(3.1) \quad c_{33} \leq c_{33}^*, \quad c_{33}^* \leq c_{33} \leq c_{33}^{**}, \quad c_{33} \geq c_{33}^{**},$$

если $c_{11} > c_{22}$, то

$$(3.2) \quad c_{33} \leq c_{33}^{**}, \quad c_{33}^{**} \leq c_{33} \leq c_{33}^*, \quad c_{33} \geq c_{33}^*,$$

где

$$c_{33}^* = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2(c_{22} + c_{12})}, \quad c_{33}^{**} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2(c_{11} + c_{12})}.$$

Пусть параметры ортотропии удовлетворяют первому соотношению из (3.1). Существенным образом на спектр задачи влияет кривизна оболочки χ . В зависимости от кривизны оболочки возможны три различных случая.

1. В первом случае

$$(3.3) \quad \chi \geq \frac{2c_{22}c_{33}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}} = \chi_1.$$

Выражение в правой части больше нуля, но меньше или равно 1. Условие $f(\omega, \xi) \geq 0$, из которого ищем начало спектра, начинает выполняться при частоте $\omega = \omega_*$, где

$$(3.4) \quad \omega_* = \left\{ \frac{4c_{33} [c_{11}c_{33}\chi^2 - (c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33})\chi + c_{11}c_{33}]}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) [(c_{12} + 2c_{33})^2 - c_{11}c_{22}]} \right\}^{1/2}.$$

При данном значении ω уравнение $f(\omega, \xi) = 0$ имеет кратный корень $\xi_1 = \xi_2$ внутри интервала изменения $0 \leq \xi \leq 1$. Во всех остальных точках $\xi \in [0, 1]$ функция $f(\omega, \xi) < 0$. При вычислении r по формуле (1.4), а также при определении плотности собственных частот по формуле (2.4) нужны пределы изменения переменной ξ , т. е. те ее значения, для которых $f(\omega, \xi) \geq 0$. Обозначим их через $\alpha_1(\omega)$ и $\alpha_2(\omega)$. Введем также обозначения

$$\omega_1 = |\chi| / c_{22}^{1/2}, \quad \omega_2 = 1 / c_{11}^{1/2}.$$

Пределы изменения переменной ξ следующие:

$$\begin{aligned} \omega &\leq \omega_*, M(\omega) = 0, \\ \omega_* &\leq \omega \leq \omega_1, \alpha_1(\omega) = \xi_1, \alpha_2(\omega) = \xi_2, \\ \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = \xi_2, \\ \omega &\geq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Для определения точек сгущения спектра используем признак Коши сходимости несобственных интегралов. Интеграл I расходится при следующих значениях параметра: $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$. При этих значениях ω уравнение (2.5) имеет кратный корень в 0 или в 1 и эти значения переменной ξ являются пределами интегрирования. Если в первом соотношении из (3.1) выполняется равенство, то выражение в правой части (3.3) равно 1, если равенство выполняется в (3.3), то $\omega_* = \omega_1$.

2. Пусть теперь кривизна оболочки удовлетворяет соотношению

$$0 \leq \chi \leq \frac{2c_{22}c_{33}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}}.$$

Спектр начинается с точки $\omega = \omega_1$

$$\begin{aligned} \omega &\leq \omega_1, M(\omega) = 0, \\ \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = \xi_1, \\ \omega &\geq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Точка сгущения спектра при $\omega = \omega_2$.

3. Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны ($\chi < 0$) начало спектра в точке $\omega = 0$. Переменная ξ меняется в пределах

$$(3.5) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \omega \leq \omega_1, \alpha_1(\omega) = \xi_1, \alpha_2(\omega) = \xi_2, \\ \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = \xi_2, \\ \omega &\geq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Точки сгущения спектра

$$(3.6) \quad \omega = \omega_1, \omega = \omega_2.$$

Рассмотрим для параметров ортотропии второе соотношение из (3.4). Распределение собственных частот для оболочек положительной гауссовой кривизны начинается с частоты $\omega = \omega_1$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \omega &\leq \omega_1, M(\omega) = 0, \\ \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = \xi_1, \\ \omega &\geq \omega_2, \alpha_1(\omega) = 0, \alpha_2(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Сгущение собственных частот при $\omega = \omega_2$. При $\chi < 0$ спектр аналогичен спектру задачи, основные характеристики которой даны формулами (3.5), (3.6).

Пусть теперь для коэффициентов ортотропии выполняется третье соотношение из (3.1), а кривизна оболочки удовлетворяет условию

$$(3.8) \quad \chi \geq \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}}{2c_{11}c_{33}} = \chi_2,$$

здесь в принципе возможны два случая: оболочки с кривизной, удовлетворяющей данному условию, могут быть как положительной, так и отри-

цательной гауссовой кривизной. При $\chi \geq 0$ начальная точка спектра $\omega = \omega_1$

$$\begin{aligned} \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \quad \alpha_1(\omega) = 0, \quad \alpha_2(\omega) = \xi_1, \\ \omega_2 \leq \omega \leq \omega_*, \quad \begin{cases} \alpha_1(\omega) = 0, & \alpha_2(\omega) = \xi_1, \\ \alpha_1(\omega) = \xi_2, & \alpha_2(\omega) = 1, \end{cases} \\ \omega \geq \omega_*, \quad \alpha_1(\omega) = 0, \quad \alpha_2(\omega) = 1. \end{aligned}$$

При $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_*$ интервал изменения переменной ξ состоит из двух, соответственно интеграл I разбивается на два, в первом интегрирование ведем от 0 до ξ_1 , во втором — от ξ_2 до 1. При $\omega = \omega_*$, где ω_* определяется формулой (3.4), уравнение (2.5) имеет внутри интервала кратный корень $\xi_1 = \xi_2$. Интеграл I при этом значении частоты расходится. В смысле главного значения он не существует. Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны при $\chi < 0$

$$\begin{aligned} 0 < \omega \leq \omega_1, \quad \alpha_1(\omega) = \xi_1, \quad \alpha_2(\omega) = \xi_2, \\ \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \quad \alpha_1(\omega) = 0, \quad \alpha_2(\omega) = \xi_2, \\ \omega_2 \leq \omega \leq \omega_*, \quad \begin{cases} \alpha_1(\omega) = 0, & \alpha_2(\omega) = \xi_1, \\ \alpha_1(\omega) = \xi_2, & \alpha_2(\omega) = 1, \end{cases} \\ \omega \geq \omega_*, \quad \alpha_1(\omega) = 0, \quad \alpha_2(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Точки сгущения собственных частот

$$\omega = \omega_1, \quad \omega = \omega_*.$$

Если в (3.8) выполняется равенство, то $\omega_2 = \omega_*$, если равенство выполняется в третьем соотношении из (3.1), то в (3.8) правая часть равна 1. Тогда рассматривается только следующий случай (ср. ограничения (3.8)):

$$\chi \leq \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}}{2c_{11}c_{33}}.$$

Аналогично предыдущему здесь возможны два случая. Если $\chi \geq 0$, то при $\omega \leq \omega_1$ $M(\omega) = 0$ и дальше все так же, как в (3.7). Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны справедливы формулы (3.5), (3.6).

Выше предполагали, что $c_{22} > c_{11}$. Считаем теперь, что $c_{11} > c_{22}$, т. е. для коэффициентов ортотропии возможны соотношения (3.2), которые получаются из условий (3.1), если в них поменять местами c_{11} и c_{22} . Результаты анализа, полученного при соотношениях (3.1), будут верны и при соотношениях (3.2), если при кривизне $|\chi| \geq (c_{22}/c_{11})^{1/2}$ во всех приведенных здесь выражениях поменять местами ω_1 и ω_2 . Это связано с тем, что при $c_{22} > c_{11}$ всегда $\omega_1 < \omega_2$. Но при $c_{22} < c_{11}$ и $|\chi| \geq (c_{22}/c_{11})^{1/2}$ выполняется условие $\omega_1 < \omega_2$. Если же $|\chi| \leq (c_{22}/c_{11})^{1/2}$, то все результаты переносятся без изменения.

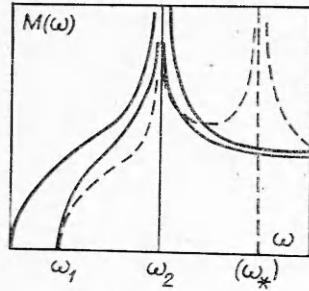
И наконец, если $c_{11} = c_{22} = c$, то в (3.1), (3.2) выполняется равенство $c_{33}^* = c_{33}^{**} = (c - c_{12})/2$, т. е. для коэффициентов ортотропии вместо трех соотношений надо рассматривать только два соотношения

$$c_{33} \leq c, \quad c_{33} \geq c.$$

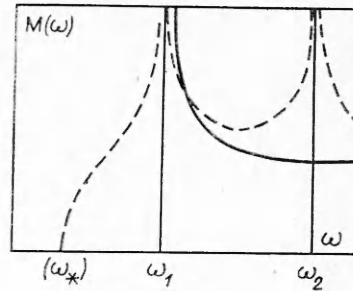
Для частот ω_1 и ω_2 имеем $\omega_1 \leq \omega_2$. Равенство здесь выполняется только для оболочек с кривизной $|\chi| = 1$, в частности для сферической панели.

4. Рассмотренные соотношения (3.1) между параметрами ортотропии через технические постоянные можно записать в виде

$$(4.1) \quad G \leq E_1/2(E_1/E_2 + \nu_1), \quad E_1/2(E_1/E_2 + \nu_1) \leq G \leq E_1/2(1 + \nu_1), \\ G \geq E_1/2(1 + \nu_1).$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

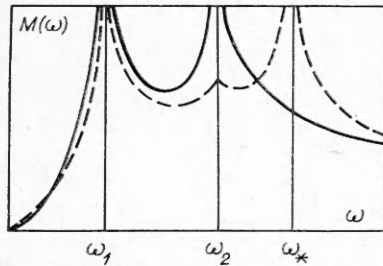
аналогично записываются соотношения (3.2), нужно только в записи (4.1) поменять местами индексы 1 и 2. В работе [7] приводятся материалы, механические характеристики которых удовлетворяют подобным соотношениям. Даны также ссылки на источники, из которых взяты эти данные. Соотношения типа (3.1), (3.2) не выходят за рамки ограничений, накладываемых на коэффициенты ортотропии в теории упругости.

Параметры ортотропии материала и геометрии оболочек в принципе можно связать между собой в другой форме, например,

$$c_{33} \leq c_{\chi}, \quad c_{\chi} \leq c_{33} \leq c_{\chi\chi}, \quad c_{33} \geq c_{\chi\chi},$$

$$c_{\chi} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2(c_{22} + c_{12}\chi)} \chi, \quad c_{\chi\chi} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2(c_{22}\chi + c_{12})} \quad (\chi \geq 0, \quad c_{22} \geq c_{11}).$$

Каждому соотношению соответствует свой тип спектра. Полученные результаты характеризуют влияние коэффициентов системы (1.1) на спектр задачи. В таблице приведены асимптотические выражения для начальных точек и точек сгущения спектра для случая $c_{22} >$

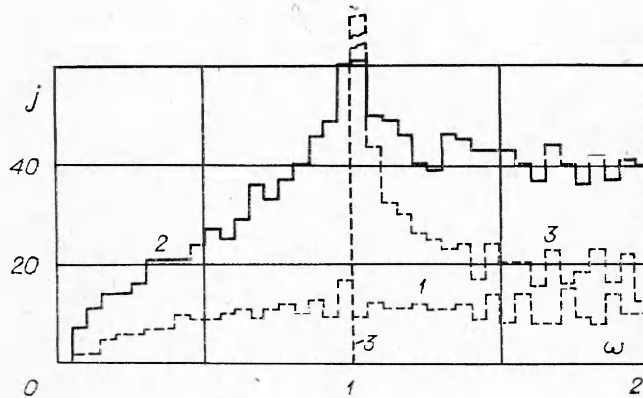


Ф и г. 3

$> c_{11}$. Если $c_{22} < c_{11}$, то в таблице нужно поменять местами c_{33}^* и c_{33}^{**} . Также при $|\chi| > (c_{22}/c_{11})^{1/2}$ меняются местами ω_1 и ω_2 . На фиг. 1—3 приведены асимптотики всех типов спектров, характерные для ортотропных оболочек. Сплошными линиями выделены графики для $M(\omega)$, характерные и для изотропных оболочек, штриховыми — характерные только для ортотропных оболочек; обозначения в таблице и на фиг. 1—3 совпадают. Пользуясь таблицей, можно легко определить, какой спектр соответствует тому или иному соотношению между параметрами ортотропии и геометрии. Частоты вычислялись по формуле (1.2), затем группировались по интервалам с шагом 0,05. Все расчеты проводились при следующих значениях параметров ортотропии: $c_{11} = 1$, $c_{22} = 0,25$, $c_{12} = 0,1$ и при трех значениях $c_{33} = 0,05$; 0,2; 0,5. При этом последовательно выполнялось одно из условий (3.1). Здесь параметры ортотропии отнесены к максимальному, соответственно частота на фиг. 4—6 $\omega = \omega c_{11}^{-1/2}$. На фиг. 4 кривые 1, 2 характеризуют распределение собственных частот цилиндрической оболочки при отношении $l/R = 2$ и $c_{33} = 0,2$, причем нижний график соответствует оболочке с $R/h = 100$, верхний — с $R/h = 400$; кривая 3 соответствует оболочке с кривизной $\chi = 1/2$, $a/b = 1$, т. е. при наших параметрах ортотропии точка сгущения $\omega_1 = \omega_2 = 1$ совпадает с началом спектра. Это

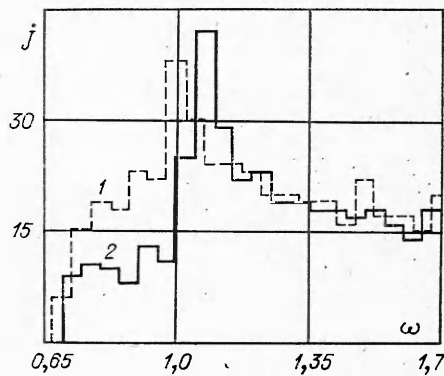
на фиг. 1—3 совпадают. Пользуясь таблицей, можно легко определить, какой спектр соответствует тому или иному соотношению между параметрами ортотропии и геометрии. Частоты вычислялись по формуле (1.2), затем группировались по интервалам с шагом 0,05. Все расчеты проводились при следующих значениях параметров ортотропии: $c_{11} = 1$, $c_{22} = 0,25$, $c_{12} = 0,1$ и при трех значениях $c_{33} = 0,05$; 0,2; 0,5. При этом последовательно выполнялось одно из условий (3.1). Здесь параметры ортотропии отнесены к максимальному, соответственно частота на фиг. 4—6 $\omega = \omega c_{11}^{-1/2}$. На фиг. 4 кривые 1, 2 характеризуют распределение собственных частот цилиндрической оболочки при отношении $l/R = 2$ и $c_{33} = 0,2$, причем нижний график соответствует оболочке с $R/h = 100$, верхний — с $R/h = 400$; кривая 3 соответствует оболочке с кривизной $\chi = 1/2$, $a/b = 1$, т. е. при наших параметрах ортотропии точка сгущения $\omega_1 = \omega_2 = 1$ совпадает с началом спектра. Это

c_{33}	χ	Начало спектра	Точки сгущения
$c_{33} \leq c_{33}^*$	$\chi \geq \chi_1$	ω	ω_1, ω_2
	$0 \leq \chi < \chi_1$	ω_1	ω_2
	$\chi \leq 0$	0	ω_1, ω_2
$c_{33}^* \leq c_{33} \leq c_{33}^{**}$	$\chi \geq 0$	ω_1	ω_2
	$\chi < 0$	0	ω_1, ω_2
$c_{33} \geq c_{33}^{**}$	$\chi \geq 0$	$\chi \geq \chi_2$	ω_1
	$\chi \leq 0$		0
	$\chi \geq 0$	$\chi \leq \chi_2$	ω_1
	$\chi \leq 0$		0



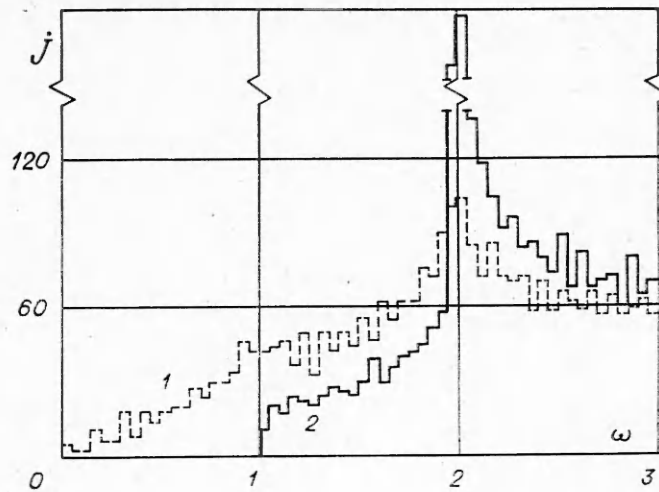
Ф и г. 4

хорошо видно на графике, где максимум равен $j = 96$. Вычисления проводились при $c_{33} = 0,2$. На фиг. 5 приведены распределения частот оболочек со следующими параметрами: $\chi = 1/3, R/h = 1600, a/b = 1$, кривая 1 при $c_{33} = 0,2$, кривая 2 — $c_{33} = 0,5$, хорошо выражена точка сгущения при $\omega = 1$. Плотность собственных частот для оболочек отрицательной гауссовой кривизны представлена на фиг. 6 кривой 1, где $\chi = -1, R/h = 6400, a/b = 1, c_{33} = 0,5$, здесь же дано распределение частот для сферической панели ($\chi = 1$, кривая 2) с параметрами $R/h = 6400, a/b = 1, c_{33} = 0,5$.



Ф и г. 5

Формула (2.4) дает асимптотическое распределение плотности соб-



Фиг. 6

ственных частот. Результаты численного расчета начального участка спектра по формуле (1.2) совпадают с выводами, полученными при анализе асимптотической плотности. Меняя геометрию оболочек, механические свойства материала, можно управлять спектром, смещая или начало спектра, или точки сгущения из нежелательной области. При этом уменьшается возможность резонансных явлений [2].

Поступила 5 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. — ПММ, 1963, т. 27, № 2.
2. Болотин В. В. Теория распределения собственных частот упругих тел и ее применение к задачам случайных колебаний. — ПМ, 1972, т. 8, № 8.
3. Жинжер Н. И., Хроматов В. Е. Плотность частот свободных колебаний ортотропных круговых цилиндрических оболочек. — В кн.: Теория оболочек и пластин. М., Наука, 1973.
4. Хроматов В. Е. Плотность собственных частот тонких пологих ортотропных оболочек. — ПМ, 1977, т. 13, № 7.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
6. Жинжер Н. И. Динамические краевые эффекты в ортотропных упругих оболочках. — ПММ, 1975, т. 39, № 4.
7. Чу (K. S. Chu). Некоторые характеристики волокнистых композиционных материалов. — Ракетн. техника и космонавтика, 1971, № 9.