

УДК 532.5.032

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ КОНТАКТНОЙ ЛИНИИ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ

А. А. Алабужев, Д. В. Любимов*

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

* Пермский государственный университет, 614990 Пермь

E-mails: alabuzhev@psu.ru, lyubimov@psu.ru

Исследуются собственные колебания цилиндрической капли невязкой жидкости, окруженной другой жидкостью и ограниченной в осевом направлении твердыми плоскостями. Для описания движения контактной линии используется эффективное граничное условие. Найдена зависимость частоты и коэффициента затухания от капиллярного параметра. Показано, что начиная с некоторого значения капиллярного параметра основная частота трансляционной моды обращается в нуль. В зависимости от отношения радиального и осевого размеров капли основная частота осесимметричной моды и мод более высоких, чем трансляционная, может обращаться в нуль в некотором интервале значений капиллярного параметра. Такая зависимость частот собственных колебаний от параметров задачи позволяет определить капиллярный параметр.

Ключевые слова: цилиндрическая капля, контактная линия, собственные колебания.

Введение. Механическое равновесие жидкого столба (жидкой зоны) и струи относительно малых свободных капиллярных колебаний теоретически и экспериментально исследовалось в работах Ж. А. Ф. Плато [1, 2] и Дж. У. Рэлея [3, 4]. В этих работах найдено предельное соотношение между высотой жидкого столба h и его радиусом R : $h = 2\pi R$. При больших значениях h столб становится неустойчивым и разрушается (неустойчивость Рэлея). В [4] рассматривается также неустойчивость цилиндрической струи, окруженной другой жидкостью. Собственные частоты свободного жидкого столба приведены в [5].

Интерес к подобным конфигурациям обусловлен использованием их в различных технологических процессах. Например, жидкая зона используется при выращивании полупроводниковых кристаллов. Основное внимание обычно уделяется течению внутри жидкой зоны при наличии нагрева, вертикальных вибраций, магнитного поля. Отметим, что большинство работ посвящено исследованию цилиндрического жидкого столба (жидкой зоны), окруженного газом, влияние которого не учитывается. Таким образом, боковая поверхность столба рассматривается как свободная.

В работе [6] изучались осесимметричные собственные колебания цилиндрического жидкого моста с закрепленной контактной линией в сосуде конечных размеров в условиях невесомости. Сравнение полученных значений частот с экспериментальными данными, также приведенными в [6], показало, что они хорошо согласуются. Аналогичные исследования проводились для нелинейных мод собственных колебаний [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00442), Американского фонда гражданских исследований и развития (грант № PE-009-0/B2M409) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1981.2003.1).

Задачи, в которых учитывается динамика контактной линии, рассматривались в различной постановке. Большая часть этих исследований посвящена изучению высокочастотных колебаний малой амплитуды (свободных или вынужденных). В этом случае, как и во многих других задачах о колебаниях жидкости, можно пренебречь вязкими и нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье — Стокса. Тогда наибольший интерес будут вызывать условия, налагаемые на движение линии контакта трех сред.

Наиболее часто используется условие (в силу его простоты), примененное в [8], где изучается затухание стоячих волн между двумя вертикальными стенками. Указанное условие предполагает линейную связь между скоростью движения контактной линии и краевым углом (в случае прямого равновесного краевого угла):

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = \Lambda \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*. \quad (1)$$

Здесь ζ^* — отклонение поверхности от равновесного положения; Λ — феноменологическая постоянная (так называемый капиллярный параметр или параметр смачивания); \mathbf{k} — вектор нормали к твердой поверхности. Отметим, что условия фиксированной контактной линии и постоянного краевого угла являются частными случаями граничных условий $\Lambda = 0$ и $\Lambda = \infty$ соответственно. В [8] показано, что в силу граничного условия (1) колебания жидкости затухают, за исключением случаев $\Lambda = 0$ и $\Lambda = \infty$. Там же приведены результаты качественного сравнения с экспериментальными данными.

Формула (1) хорошо описывает результаты эксперимента [9] при малом изменении краевого угла. Кроме того, в [8] при качественном сравнении теоретических результатов с экспериментальными данными [9] показано, что шлифовка поверхности приводит к увеличению параметра смачивания в несколько раз, т. е. параметр Λ характеризует также степень обработки поверхности подложки. Возможно, формула (1) является результатом линеаризации некоторого более сложного граничного условия (см., например, [10, 11]).

В большинстве работ при изучении динамики контактной линии исследуется растекание жидкости (капли) и взаимодействие с подложкой (см., например, [11, 12]). В работе [13] выполнен теоретический анализ осесимметричных собственных колебаний жидкой зоны со свободной боковой поверхностью в поле силы тяжести. Для описания движения контактной линии использовалось условие (1), рассматривалась также диссипация в тонком динамическом пограничном слое на твердых поверхностях. Показано, что основной вклад в затухание вносит диссипация, обусловленная движением контактной линии. В работе [14] изучались неосесимметричные собственные колебания вязкой жидкой зоны со свободной боковой поверхностью в поле силы тяжести с закрепленной контактной линией.

Постановка задачи. Рассмотрим собственные колебания капли жидкости плотностью ρ_i^* , окруженной другой жидкостью плотностью ρ_e^* . Здесь и в дальнейшем величины с индексом i соответствуют капле, величины с индексом e — окружающей жидкости. Система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (рис. 1). Сосуд замкнут на бесконечности. В отсутствие внешних сил капля имеет форму цилиндра радиусом R . Краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями в равновесии равен $\pi/2$. Расстояние между ограничивающими поверхностями равно h .

Характерная амплитуда колебаний капли A^* мала по сравнению с равновесным радиусом R . Будем предполагать, что, с одной стороны, основная частота колебаний ω^* достаточно велика, чтобы можно было пренебречь вязкостью, с другой — частота вибраций достаточно мала, чтобы можно было использовать условие несжимаемости $\delta = \sqrt{\nu/\omega^*} \ll R$, $\omega^* R \ll c$ (δ — толщина пограничного слоя; c — скорость звука; ν — кинематическая вязкость). Например, для капли воды радиусом 10^{-2} м значения частоты ω^* , удовлетворяющие указанным требованиям, находятся в широком диапазоне от 0,1 до 100 Гц. Наимень-

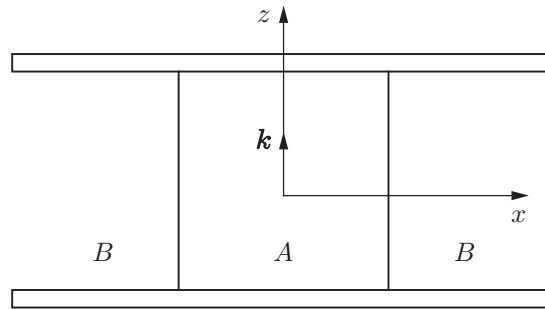


Рис. 1. Геометрия задачи:

A — капля; B — окружающая жидкость

шая частота собственных колебаний свободного водяного столба, окруженного жидкостью с близкими параметрами, $\omega^* \approx 10$ Гц.

Удобно использовать цилиндрическую систему координат (r^*, α, z^*) , в которой поверхность капли описывается соотношением $r^* = R + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$, где $\zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ — отклонение поверхности от равновесного положения; угол α отсчитывается от оси x .

В пренебрежении вязким затуханием уравнения Бернулли и неразрывности запишем в безразмерном виде:

$$p = -\rho(\varphi_t + \varepsilon(\nabla\varphi)^2/2), \quad \Delta\varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь потенциал скорости жидкости вводится соотношением $\mathbf{v} = \nabla\varphi$; p — давление; индекс у неизвестных функций обозначает операцию дифференцирования по соответствующим переменным. На поверхности раздела жидкостей должны выполняться условие непрерывности нормальной компоненты скорости, кинематическое условие и условие баланса нормальных напряжений:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta: \quad [\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi] = 0, \quad F_t + \varepsilon\nabla\varphi \cdot \nabla F = 0, \quad [p] = -\operatorname{div} \mathbf{n}. \quad (3)$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей; ζ — отклонение поверхности от равновесного положения; $F = r - 1 - \varepsilon\zeta$; $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$ — вектор нормали к боковой поверхности капли.

Скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению контактного угла от равновесного значения [8]:

$$r = 1 + \varepsilon\zeta, \quad z = \pm 1/2: \quad \zeta_t = \lambda \mathbf{k} \cdot \nabla\zeta \quad (4)$$

(λ — капиллярный параметр).

На твердых поверхностях необходимо поставить условие непротекания:

$$z = \pm 1/2: \quad \mathbf{k} \cdot \nabla\varphi = 0. \quad (5)$$

В качестве масштабных величин выбраны следующие параметры:

$$t_0 = \sqrt{(\rho_e^* - \rho_i^*)R^3/\sigma}, \quad v_0 = A^* \sqrt{\sigma/((\rho_e^* + \rho_i^*)R^3)}, \quad p_0 = A^* \alpha/R^2$$

(σ — коэффициент поверхностного натяжения). Краевая задача (2)–(5) содержит пять безразмерных параметров: малую относительную характерную амплитуду $\varepsilon = A^*/R$, капиллярный параметр $\lambda = \Lambda/\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R^3 h^2/\sigma}$, геометрический параметр $b = R/h$, плотность внешней жидкости $\rho_e = \rho_e^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$, плотность жидкости в капле $\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$. Последние два параметра связаны соотношением $\rho_i + \rho_e = 1$.

Четные моды. Под четностью мод собственных колебаний будем понимать четность функций относительно смены знака вертикальной координаты z . Линеаризуем краевую задачу (2)–(5) по малому параметру ε :

$$\Delta\varphi = 0, \quad p = -\rho\varphi_t; \quad (6)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow 0; \quad (7)$$

$$r = 1: \quad [\varphi_r] = 0, \quad \zeta_t = \varphi_r, \quad [p] = \zeta + \zeta_{\alpha\alpha} + b^2\zeta_{zz}; \quad (8)$$

$$z = \pm 1/2: \quad \varphi_z = 0; \quad (9)$$

$$r = 1, z = \pm 1/2: \quad \zeta_t = \mp\lambda\zeta_z. \quad (10)$$

С учетом аксиальной симметрии решение уравнения Лапласа (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} R_{mk}^i(r) \cos(2\pi kz) \cos(m\alpha) \exp(i\Omega t), \\ \varphi_e &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mk} R_{mk}^e(r) \cos(2\pi kz) \cos(m\alpha) \exp(i\Omega t), \end{aligned} \quad (11)$$

где $R_{m0}^i(r) = r^m$; $R_{m0}^e(r) = 1/r^m$; $R_{mk}^i(r) = I_m(2\pi bkr)$ при $k \geq 1$; $R_{mk}^e(r) = K_m(2\pi bkr)$ при $k \geq 1$; I_m , K_m — модифицированные функции Бесселя; Ω — частота собственных колебаний. С использованием кинематического условия и условия баланса нормальных напряжений (8) функцию отклонения поверхности $\zeta(\alpha, z, t)$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \zeta &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk} \cos(2\pi kz) \cos(m\alpha) + d_1 z^2 \cos(\alpha) + d_2 \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=2}^{\infty} e_m \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b} z\right) \cos(m\alpha) \right) \exp(i\Omega t), \end{aligned} \quad (12)$$

где три последних слагаемых являются частными решениями, вытекающими из третьего граничного условия в (8). Отметим, что в работе [13] подобные слагаемые не учитывались. Подставляя решения (11), (12) в (6)–(10), получаем спектрально-амплитудную задачу, собственными числами которой являются значения частоты Ω собственных колебаний. Из решения этой задачи следует, что собственные числа находятся из уравнений

$$\begin{aligned} i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4b\Omega^3}{\gamma_{0k}^2(\omega_{0k}^2 - \Omega^2)} + i2b\Omega - i\Omega \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2b}\right) + \lambda \frac{1}{b} &= 0, \quad m = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega^4}{\pi^2 k^2(\omega_{1k}^2 - \Omega^2)} + \frac{1}{6} \Omega^2 - i\lambda\Omega - 2b^2 &= 0, \quad m = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$i\Omega^3 \left(\frac{2b}{\gamma_{m0}(\omega_{m0}^2 - \Omega^2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4b\gamma_{m0}}{\gamma_{mk}^2(\omega_{mk}^2 - \Omega^2)} \right) + \lambda \frac{\gamma_{m0}}{b} + i\Omega \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_{m0}}{2b}\right) = 0, \quad m \geq 2,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{mk}^2 &= m^2 - 1 + 4\pi^2 b^2 k^2, \\ \omega_{mk}^2 &= \gamma_{mk}^2 \frac{R_{mkr}^i(1)}{F_{mk}}, \quad F_{mk} = \rho_i R_{mk}^i(1) - \rho_e \frac{R_{mkr}^i(1)}{R_{mkr}^e(1)} R_{mk}^e(1), \end{aligned}$$

ω_{mk} — частоты собственных колебаний свободно скользящей цилиндрической капли [5].

Комплексные алгебраические уравнения (13) имеют комплексные решения, что приводит к затуханию колебаний, обусловленному диссипацией на линии контакта.

Нечетные моды. По аналогии с решением в случае четных мод решение уравнения Лапласа (6) запишем в виде

$$\varphi_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mk} R_{mk}^i(r) \sin[(2k+1)\pi z] \cos(m\alpha) \exp(i\Omega t),$$

$$\varphi_e = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{mk} R_{mk}^e(r) \sin[(2k+1)\pi z] \cos(m\alpha) \exp(i\Omega t),$$

где $R_{mk}^i(r) = I_m((2k+1)\pi br)$; $R_{mk}^e(r) = K_m((2k+1)\pi br)$; I_m , K_m — модифицированные функции Бесселя.

Используя полученные выше результаты (12), для функции отклонения поверхности запишем выражение

$$\zeta = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk} \sin[(2k+1)\pi z] \cos(m\alpha) + d_1 z \cos(\alpha) + d_2 \sin\left(\frac{z}{b}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=2}^{\infty} e_m \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b} z\right) \cos(m\alpha) \right] \exp(i\Omega t).$$

Проведя вычисления, аналогичные случаю четных мод, получим уравнения для нахождения частот нечетных мод собственных колебаний:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i4b\Omega^3}{\delta_{0m}^2(\omega_{0k}^2 - \Omega^2)} + i\Omega \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2b}\right) + \lambda \frac{1}{b} = 0, \quad m = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\Omega^2}{(2k+1)^2\pi^2(\omega_{1k}^2 - \Omega^2)} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{i\Omega} = 0, \quad m = 1, \quad (14)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\Omega^2 b \delta_{m0}}{\delta_{mk}^2(\omega_{mk}^2 - \Omega^2)} + \frac{\lambda \delta_{m0}}{i\Omega b} + \operatorname{th}\left(\frac{\delta_{m0}}{2b}\right) = 0, \quad m \geq 2.$$

Здесь

$$\delta_{mk}^2 = m^2 - 1 + (2k+1)^2\pi^2 b^2,$$

$$\omega_{mk}^2 = \delta_{mk}^2 \frac{R_{mkr}^i(1)}{F_{mk}}, \quad F_{mk} = \rho_i R_{mk}^i(1) - \rho_e \frac{R_{mkr}^i(1)}{R_{mkr}^e(1)} R_{mk}^e(1).$$

Результаты. Уравнения (13), (14) решались численно методом двумерных секущих. На рис. 2 представлены вещественная $\Omega_{\operatorname{Re}}$ (частота колебаний) и мнимая $\Omega_{\operatorname{Im}}$ (коэффициент затухания) части комплексной собственной частоты Ω для мод колебаний Ω_{01} (т. е. при $m = 0$, $k = 1$, где m — номер радиальной моды; k — волновое число) и Ω_{11} . Здесь и далее в индексах частот используется сплошная нумерация волнового числа: четные k соответствуют четным модам (решение уравнений (13)), нечетные k — нечетным модам (решение уравнений (14)). Действительная часть частоты Ω_{01} в некотором интервале значений λ может обращаться в нуль в зависимости от значения геометрического параметра b (рис. 2, а). При больших значениях b этот интервал отсутствует. С уменьшением b значение λ увеличивается и стремится к бесконечности при $b = 1/\pi$. Обращению $\Omega_{\operatorname{Re}}$ в нуль

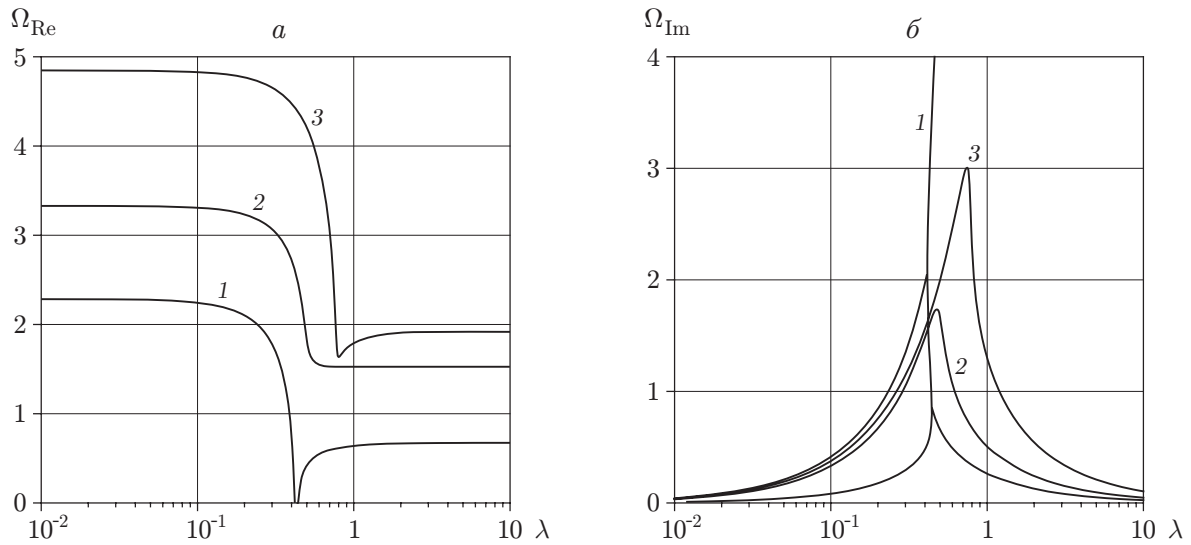


Рис. 2. Зависимости частоты (а) и коэффициента затухания (б) собственных колебаний от капиллярного параметра для частот Ω_{11} и Ω_{01} :
 1, 3 — частота Ω_{01} (1 — $b = 0,4$; 3 — $b = 0,6$); 2 — частота Ω_{11} ($\rho_i = 0,75, b = 0,4$)

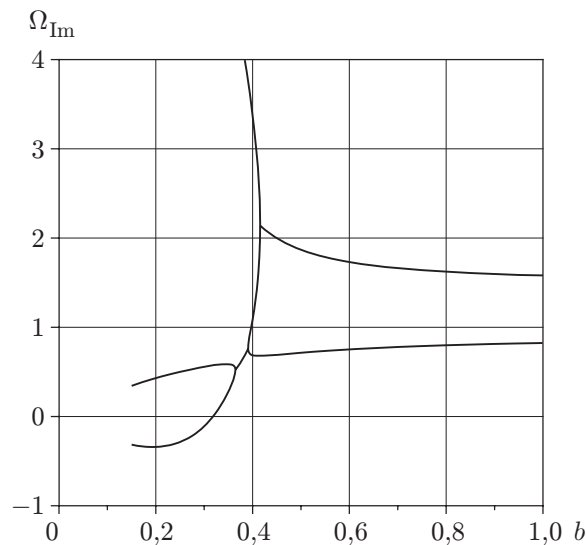


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания от геометрического параметра для частоты Ω_{01} при $\lambda = 0,44, \rho_i = 0,75$

соответствует раздвоение ветви значений инкремента Ω_{Im} (кривая 1 на рис. 2, б). При больших значениях капиллярного параметра λ действительная часть частоты Ω_{01} обращается в нуль согласно данным рис. 2, а, а также согласно выражению для ω_{01} при $b \leq 1/\pi$. Это обусловлено неустойчивостью Рэлея для жидкого столба, если $h = 2\pi R$, т. е. $b = 1/(2\pi)$. Таким образом, при $b = 1/\pi$ толщина слоя равна половине длины волны неустойчивости Рэлея.

На рис. 3 показана зависимость инкремента затухания Ω_{Im} от геометрического параметра b при $m = 0$. Инкремент принимает отрицательные значения при $b < 1/\pi$, что соответствует возникновению монотонной неустойчивости, так как $\Omega_{Re} = 0$.

Из рис. 2 следует, что с увеличением λ частота монотонно уменьшается, коэффициент затухания имеет максимум при конечном значении капиллярного параметра и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$. В первом случае ($\lambda \rightarrow 0$) для четных мод справедливы выражения

$$\begin{aligned} & -8b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{0\text{Im}}^2 \Omega_{0\text{Re}}}{\gamma_{0k}^2 (\omega_{0k}^2 - \Omega_{0\text{Re}}^2)} + \Omega_{0\text{Im}} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2b} \right) + \lambda \frac{1}{b} = 0, \\ & 4\Omega_{1\text{Re}}^2 \Omega_{1\text{Im}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{1k}^2}{\pi^2 k^2 (\omega_{1k}^2 - \Omega_{1\text{Re}}^2)^2} + \frac{1}{3} \Omega_{1\text{Im}} - \lambda = 0, \\ & 3\Omega_{m\text{Re}}^2 \Omega_{m\text{Im}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b^2 \omega_{mk}^2 \gamma_{m0}}{\gamma_{mk}^2 (\omega_{mk}^2 - \Omega_{m\text{Re}}^2)^2} + \Omega_{m\text{Im}} \operatorname{cth} \left(\frac{\gamma_{m0}}{2b} \right) = \lambda \frac{\gamma_{m0}}{b}, \end{aligned}$$

где $\Omega_{0\text{Re}}$, $\Omega_{1\text{Re}}$, $\Omega_{m\text{Re}}$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b\Omega_{0\text{Re}}^2}{\gamma_{0k}^2 (\omega_{0k}^2 - \Omega_{0\text{Re}}^2)} - \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2b} \right) &= 0, & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{1\text{Re}}^4}{\pi^2 k^2 (\omega_{1k}^2 - \Omega_{1\text{Re}}^2)} + \frac{1}{6} \Omega_{1\text{Re}}^2 &= 2b^2, \\ \Omega_{m\text{Re}}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b^2 \omega_{mk}^2 \gamma_{m0}}{\gamma_{mk}^2 (\omega_{mk}^2 - \Omega_{m\text{Re}}^2)^2} + \operatorname{cth} \left(\frac{\gamma_{m0}}{2b} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Во втором случае ($\lambda \rightarrow \infty$) выражения для коэффициентов затухания имеют вид

$$\Omega^{(1k)} = \frac{\omega_{1k}^2}{2\lambda\pi^2 k^2}, \quad \Omega^{(mn)} = \frac{\omega_{mk}^2}{\lambda\gamma_{mk}^2}, \quad m \neq 1.$$

При этом собственные частоты колебаний капли совпадают с собственными частотами свободно скользящей цилиндрической капли [5].

Как и в случае четных мод, с увеличением λ частота нечетной моды монотонно уменьшается, коэффициент затухания имеет максимум при конечном значении капиллярного параметра и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$. В первом случае справедливы выражения

$$\begin{aligned} 4b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3\Omega_{0\text{Im}}^2 \Omega_{0\text{Re}}}{\delta_{0k}^2 (\omega_{0k}^2 - \Omega_{0\text{Re}}^2)} + \Omega_{0\text{Re}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2b} \right) &= \lambda \frac{1}{b}, & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\Omega_{1\text{Re}}^2 \Omega_{1\text{Im}}}{\pi^2 (2k+1)^2 (\omega_{1k}^2 - \Omega_{1\text{Re}}^2)} + \frac{1}{2} \Omega_{1\text{Re}} &= \lambda, \\ 3\Omega_{m\text{Re}}^2 \Omega_{m\text{Im}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4b\gamma_{m0}}{\delta_{mk}^2 (\omega_{mk}^2 - \Omega_{m\text{Re}}^2)} + \Omega_{m\text{Im}} \operatorname{th} \left(\frac{\gamma_{m0}}{2b} \right) &= \lambda \frac{\gamma_{m0}}{b}, \end{aligned}$$

где $\Omega_{0\text{Re}}$, $\Omega_{1\text{Re}}$, $\Omega_{m\text{Re}}$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4b\Omega_{0\text{Re}}^2}{\delta_{0k}^2 (\omega_{0k}^2 - \Omega_{0\text{Re}}^2)} + \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2b} \right) &= 0, & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega_{1\text{Re}}^2}{(2k+1)^2 \pi^2 (\omega_{1k}^2 - \Omega_{1\text{Re}}^2)} + \frac{1}{2} &= 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4b\Omega_{m\text{Re}}^2 \gamma_{m0}}{\delta_{mk}^2 (\omega_{mk}^2 - \Omega_{m\text{Re}}^2)} + \operatorname{th} \left(\frac{\gamma_{m0}}{2b} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Во втором случае ($\lambda \rightarrow \infty$) выражения для коэффициентов затухания имеют вид

$$\Omega^{(1k)} = \frac{2\omega_{1k}^2}{\lambda(2k+1)^2 \pi^2}, \quad \Omega^{(mk)} = \frac{\omega_{mk}^2}{\lambda\delta_{mk}^2}, \quad m \neq 1.$$

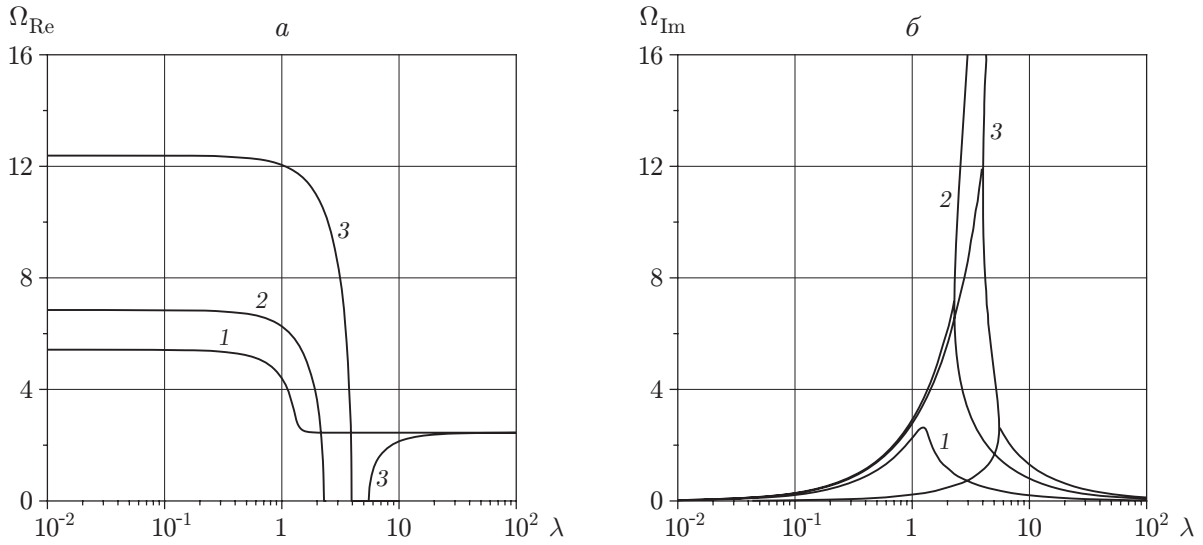


Рис. 4. Зависимости вещественной (*a*) и мнимой (*б*) частей частоты от капиллярного параметра:
 1, 3 — частота Ω_{20} ($1 - b = 1$; $3 - b = 2,5$); 2 — частота Ω_{10} ($b = 2$)

Первая трансляционная мода описывает смещение капли как целого. В рассматриваемом случае (при учете динамики контактной линии) в средней части столба смещение больше, чем вблизи торцов. Упругие силы стремятся придать капле первоначальный вид, что является причиной возникновения обратного движения ее центра масс. С увеличением капиллярного параметра происходит уменьшение сдвига между центром и периферией поверхности капли. При некотором значении капиллярного параметра различие в величине сдвига исчезает и частота первой моды собственных колебаний обращается в нуль (рис. 4, *a*). При бóльших значениях λ коэффициент затухания принимает два значения (рис. 4, *б*). Для частот Ω_{m0} ($m = 2, 3, \dots$) существует некоторый интервал значений капиллярного параметра λ , в котором действительные части этих частот обращаются в нуль. Длина этого интервала увеличивается с ростом параметра b (рис. 4), в отличие от осесимметричной моды. Из рис. 4 следует, что с увеличением параметра b (т. е. с увеличением равновесного радиуса или с уменьшением высоты капли) частота собственных колебаний капли растет.

Закключение. Рассмотрены колебания цилиндрической капли жидкости, окруженной другой жидкостью и находящейся между двумя твердыми поверхностями. Учитывалась динамика контактной линии: скорость движения контактной линии предполагалась пропорциональной отклонению контактного угла от равновесного значения. Коэффициент пропорциональности, так называемый капиллярный параметр (параметр смачивания), характеризует свойства жидкости и материала подложки. Равновесный краевой угол равен $\pi/2$.

Показано, что увеличение капиллярного параметра приводит к уменьшению частоты собственных колебаний. Наименьшую собственную частоту имеет свободно скользящая по твердым поверхностям капля.

Частота осесимметричной моды собственных колебаний может обращаться в нуль в некотором интервале значений капиллярного параметра λ в зависимости от значения геометрического параметра b . При $b \leq 1/\pi$ и некотором характерном значении λ частота обращается в нуль и инкремент становится отрицательным, что соответствует возникновению неустойчивости Рэлея. С увеличением значения b длина этого интервала уменьшается.

С увеличением капиллярного параметра частота трансляционной моды уменьшается и при некотором значении λ обращается в нуль при любом b .

Для основных частот с азимутальными числами $m = 2, 3, \dots$ существует некоторый интервал значений капиллярного параметра λ , в котором действительные части этих частот также обращаются в нуль. Однако в отличие от осесимметричной моды длина этого интервала увеличивается с ростом параметра b .

Таким образом, можно подобрать такое соотношение радиуса и высоты капли, чтобы характерная частота какой-либо моды была равна нулю, и в конечном счете определить капиллярный параметр λ .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Plateau J. A. F.** Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur // Mem. Acad. Roy. Belgique. 1849. Nonv. Ser. 23. P. 5.
2. **Plateau J. A. F.** Experimental and theoretical researches on the figures of equilibrium of a liquid mass withdrawn from the action of gravity // Ann. Rep. Smithsonian Inst. 1863. P. 207–285.
3. **Rayleigh, Lord.** On the stability of jets // Proc. London Math. Soc. 1879. V. 10. P. 4–13.
4. **Rayleigh, Lord.** On the stability of cylindrical fluid surface // Philos. Mag. 1892. V. 34. P. 177–180.
5. **Lamb H.** Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.
6. **Sanz A.** The influence of the outer bath in the dynamics of axisymmetric liquid bridges // J. Fluid Mech. 1985. V. 156. P. 101–140.
7. **Sanz A., Diez J. L.** Non-axisymmetric oscillations of liquid bridges // J. Fluid Mech. 1989. V. 205. P. 503–521.
8. **Hocking L. M.** The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 253–266.
9. **Keulegan G. H.** Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 33–50.
10. **Miles J. W.** Surface-wave damping in closed basins // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1967. V. 297. P. 459–475.
11. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 76–84.
12. **Veretennikov I., Indeikina A., Chang H.-C.** Front dynamics and fingering of a driven contact line // J. Fluid Mech. 1998. V. 373. P. 81–110.
13. **Borkar A., Tsamopoulos J.** Boundary-layer analysis of the dynamics of axisymmetric capillary bridges // Phys. Fluids. Ser. A. 1991. V. 3, N 12. P. 2866–2874.
14. **Tsamopoulos J., Chen T., Borkar A.** Viscous oscillations of capillary bridges // J. Fluid Mech. 1992. V. 235. P. 579–609.

Поступила в редакцию 23/VI 2006 г.