УДК 519.929

Численно-аналитический метод исследования некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений

В.Б. Черепенников

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033
E-mail: vbcher@mail.ru

Черепенников В.Б. Численно-аналитический метод исследования некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 3. — С. 275–285.

В настоящей работе излагаются результаты исследования скалярного линейного функционально-дифференциального уравнения (ЛФДУ) запаздывающего типа $\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t)$, $q > 1$. Основное внимание уделяется начальной задаче с начальной точкой, когда начальное условие задается в начальной точке и ищется классическое решение, подстановка которого в исходное уравнение обращает его в тождество. В качестве метода исследования применяется метод полиномиальных квазирешений, который основан на представлении неизвестной функции $x(t)$ в виде полинома степени N. При подстановке этой функции в исходное уравнение возникает невязка $\Delta(t) = O(t^N)$, для которой получено точное аналитическое представление. Тогда под полиномиальным квазирешением понимается точное решение в виде полинома степени N возмущенной на невязку исходной начальной задачи. Доказаны теоремы существования у рассматриваемого ЛФДУ полиномиальных квазирешений и точных полиномиальных решений. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: *функционально-дифференциальные уравнения, начальная задача, полиномиальные квазирешения, точные решения.*

Cherepennikov V.B. Numerical analytical method of studying some linear functional differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 3. — P. 275–285.

This paper presents the results of studies of the scalar linear functional-differential equation of a delay type $\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t)$, $q > 1$. The main attention is being given to the original problem with the initial point, when the initial condition is specified at the initial point, and the classical solution, whose substitution into the original equation transforms it into the identity, is sought for. The method of polynomial quasi-solution, based on representation of an unknown function $x(t)$ as polynomial of degree N is applied as the method of investigation. Substitution of this function in the original equation results in the residual $\Delta(t) = O(t^N)$, for which an accurate analytical representation is obtained. In this case, the polynomial quasi-solution is understood as exact solution in the form of polynomial of degree N, disturbed because of the residual of the original initial problem. The theorems of existence of polynomial quasi-solutions for the considered linear functional-differential equation and exact polynomial solutions have been proved. The results of the numerical experiment are presented.

Keywords: *functional differential equations, initial value problem, polynomial quasi-solutions, exact solutions.*

1. Введение

Изучение многих динамических процессов связано с созданием и исследованием математических моделей этих процессов. Как правило, в качестве таких моделей выступают дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. При этом предполагалось, что будущее состояние системы не зависит от ее прошлых состояний и определяется только настоящим. Поскольку реакция практически любой системы запаздывает на внешние возмущения, уравнения, которые более адекватно отражают реальные зависимости, включают состояния системы в различные моменты времени. Впервые дифференциальные уравнения, учитывающие предысторию процесса и названные дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом (или функционально-дифференциальными уравнениями), были рассмотрены в работе И. Бернулли [1]. Интенсивное исследование таких уравнений началось в XX веке в связи с потребностями решения ряда прикладных задач. Отметим здесь фундаментальные монографии А.Д. Мышкиса [2], Р. Беллмана и К. Кука [3], Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной [4]. За последние 50 лет теория функционально-дифференциальных уравнений нашла многочисленные приложения в самых разнообразных областях механики, физики, биологии, технических и экономических наук. При исследовании линейных функционально-дифференциальных уравнений в основном рассматриваются две начальные задачи: первая — начальная задача с начальной функцией, когда на начальном множестве тем или иным способом задается начальная функция, порождающая решение искомой задачи, и вторая — начальная задача с начальной точкой, когда ищется классическое решение, подстановка которого в исходное уравнение обращает его в тождество. Решение первой начальной задачи может быть получено методом шагов, который сводится к последовательному решению обыкновенных дифференциальных уравнений (без запаздывания) на интервалах, зависящих от структуры запаздывания. Известно, что найденное таким способом решение имеет в некоторых точках разрывы производной. Для решения второй начальной задачи в случае постоянных коэффициентов и постоянного отклонения аргумента применим метод Эйлера, приводящий к исследованию корней характеристического квазиполинома. Поскольку последний имеет на комплексной плоскости бесконечное множество корней, такое линейное дифференциально-разностное уравнение имеет и бесконечное множество аналитических решений, каждое из которых порождается соответствующим корнем характеристического квазиполинома. В случае переменных коэффициентов и (или) переменного запаздывания вопросы разрешимости линейных дифференциально-разностных уравнений в классе аналитических функций на сегодняшний день остаются открытыми.

В статье внимание уделяется второй начальной задаче для линейного функционально-дифференциального уравнения (ЛФДУ) с линейными коэффициентами запаздывающего типа, в котором наряду с постоянным имеется переменное (бесконечное) запаздывание. Для решения поставленной задачи используется метод полиномиальных квазирешений [5–7], основанный на представлении неизвестной функции в виде полинома некоторой степени N. Подстановка этого полинома в исходное уравнение приводит к невязке $\Delta(t) = O(t^N)$, для которой получено точное аналитическое представление. Тогда под полиномиальным квазирешением понимается точное решение в виде полинома степени N возмущенной на невязку исходной начальной задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим скалярное линейное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + \bar{f}(t), \quad q > 1, \tag{2.1}$$

где

$$a(t) = a_0 + a_1 t, \quad b(t) = b_0 + b_1 t, \quad \bar{f}(t) = \sum_{n=0}^{F} \bar{f}_n t^n. \tag{2.2}$$

Исследуем начальную задачу с начальной точкой для уравнения (2.1), задав в точке $t = 0$ начальное условие

$$x(0) = x_0. \tag{2.3}$$

Известно, что при $a(t) \equiv 0$ начальная задача (2.1)–(2.3) имеет единственное аналитическое решение (см., напр., [8]), а при $b(t) \equiv 0$, $a(t) = a$ — const и $f(t) \equiv 0$ эта задача имеет бесконечное множество аналитических решений, каждое из которых порождается соответствующим корнем характеристического квазиполинома. В общем случае условия существования аналитических решений начальной задачи (2.1)–(2.3) автору не известны.

Пусть

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n t^n, \quad t \in R, \tag{2.4}$$

есть формальное решение начальной задачи (2.1)–(2.3). В этом случае

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} n\bar{x}_n t^{n-1}, \quad \bar{x}(t-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n t^n, \quad \bar{x}(t/q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}_n}{q^n} t^n. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\tilde{x}_n = \bar{x}_n + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}^i_{n+i} \bar{x}_{n+i}, \tag{2.6}$$

где $\bar{C}^q_p = (-1)^q C^q_p$, $C^q_p = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$n\bar{x}_n = \begin{cases} a_0\tilde{x}_0 + b_0\bar{x}_0 + \bar{f}_0, & n = 1; \\ \sum\limits_{i=0}^{1} a_i \tilde{x}_{n-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{1} b_i \dfrac{\bar{x}_{n-1-i}}{q^{n-1-i}} + \bar{f}_{n-1}, & 2 \le n \le F+1; \\ \sum\limits_{i=0}^{1} a_i \tilde{x}_{n-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{1} b_i \dfrac{\bar{x}_{n-1-i}}{q^{n-1-i}}, & n \ge F+2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Если бы в исходной начальной задаче (2.1)–(2.3) запаздывание отсутствовало, то $\tilde{x}_n = \bar{x}_n$ и формула (2.7) представляла собой рекуррентную формулу, из которой последовательность $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ определялась бы единственным способом. Это означало бы существование в силу теоремы Коши единственного аналитического решения. В данном случае наличие запаздывания проявляется в том, что, как видно из (2.6), каждый коэффициент $\tilde{x}_n$ зависит от всех последующих коэффициентов $\bar{x}_{n+i}$, $i = \overline{0, \infty}$. Построить рекуррентную формулу здесь не представляется возможным. Следовательно, применить классический метод неопределенных коэффициентов, основанный на представлении решения в виде ряда (2.4), не удается, поскольку полученная в этом случае бесконечномерная линейная система относительно неизвестных коэффициентов $\bar{x}_n$ пока не поддается анализу в смысле однозначной вычисляемости последовательности $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Введем по отношению к формальному решению (2.4) полином

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R. \tag{2.8}$$

Тогда
$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{N} n x_n t^{n-1}, \quad x(t-1) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{x}_n t^n, \quad x(t/q) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{q^n} t^n, \tag{2.9}$$
где
$$\tilde{x}_n = x_n + \sum_{i=1}^{N-n} \bar{C}_{n+i}^{i} x_{n+i}, \quad n = \overline{1, N-1}; \quad \tilde{x}_N = x_N. \tag{2.10}$$
При подстановке полиномов (2.8) и (2.9) в уравнение (2.1) возникает некорректность в смысле размерности полиномов. Так, производная $\dot{x}(t)$ имеет размерность $N-1$, слагаемые $a(t)x(t-1)$ и $b(t)x(t/q)$ имеют размерность $N+1$, а $\bar{f}(t)$ — размерность F. С другой стороны, как следует из (2.7), для того, чтобы последний коэффициент x_N в (2.8) определялся последним коэффициентом $\bar{f}_F$ в (2.5), необходимо, чтобы в формуле (2.8) $N = F+1$. В этом случае в (2.1) слагаемые $a(t)x(t-1)$ и $b(t)x(t/q)$ будут полиномами степени $N+1$. Полагая в (2.8) $N = F+1$, определим функцию $f(t)$ в виде:
$$f(t) = \bar{f}(t) + \Delta(t) = \sum_{n=0}^{N+1} f_n t^n, \tag{2.11}$$
где $f_n = \bar{f}_n$, $n = \overline{0, N-1}$, а невязка $\Delta_N(t) = f_N t^N + f_{N+1}$, f_N и f_{N+1} — неизвестные коэффициенты.

С учетом введенных обозначений рассмотрим начальную задачу
$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in R. \tag{2.12}$$

Определение 2.1. Задачу (2.12) будем называть согласованной по размерности полиномов относительно задачи (2.1)–(2.3).

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.12), методом неопределенных коэффициентов получаем
$$n x_n = \begin{cases} a_0 \tilde{x}_0 + b_0 x_0 + f_0, & n = 1; \\ \sum\limits_{i=0}^{1} a_i \tilde{x}_{n-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{1} b_i \dfrac{x_{n-1-i}}{q^{n-1-i}} + f_{n-1}, & 2 \le n \le N; \end{cases} \tag{2.13}$$
$$0 = \sum_{i=0}^{1} a_i \tilde{x}_{n-1-i} + \sum_{i=0}^{1} b_i \frac{x_{n-1-i}}{q^{n-1-i}}, \qquad n = N+1, N+2.$$

Отметим следующее

Замечание 2.1. Поскольку степень полинома $x(t)$ равна $F+1$, это позволяет выбрать степень полинома $\bar{f}(t)$ в (2.2) в зависимости от желаемой степени полинома $x(t)$, добавляя к $\bar{f}(t)$ соответствующее число нулевых членов.

Определение 2.2. Если существует полином степени $N = F+1$:
$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R, \tag{2.14}$$
тождественно удовлетворяющий начальной задаче (2.12), то этот полином будем называть полиномиальным квазирешением (ПК-решением) задачи (2.1)–(2.3).

3. Теорема существования ПК-решений

Согласно определению 2.2, вопросы существования ПК-решений заключаются в установлении условий, при которых могут быть вычислены коэффициенты x_n, $n = \overline{0, N}$, ПК-решения (2.8) и коэффициенты f_N и f_{N+1} невязки $\Delta_N(t)$. С этой целью рассмотрим соотношения (2.13). Полагая здесь $n = 1, 2, \dots, (F+2)$ и учитывая (2.9) и (2.10), перепишем эти формулы в виде:

$$
\begin{gathered}
(-a_0 - 1)x_1 + a_0 x_2 - a_0 x_3 + \dots + (-1)_0^N a x_N = -(a_0 + b_0)x_0 - f_0;\\
\left(a_0 - a_1 + \frac{b_0}{q}\right)x_1 + (-C_2^1 a_0 + a_1 - 2)x_2 + (C_3^2 a_0 - a_1)x_3 +\\
\dots + (-1)^{N-1}\big(C_N^{N-1}a_0 - a_1\big)x_N = -(a_1 + b_1)x_0 - f_1;\\
\left(a_1 + \frac{b_1}{q}\right)x_1 + \left(a_0 - C_2^1 a_1 + \frac{b_0}{q^2}\right)x_2 + \big(-C_3^1 a_0 + C_3^2 a_1 - 3\big)x_3 +\\
\dots + (-1)^{N-2}\big(C_N^{N-2}a_0 - C_N^{N-1}a_1\big)x_N = -f_2;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(a_1 + \frac{b_1}{q^{N-2}}\right)x_{N-2} + \left(a_0 - C_N^1 a_1 + \frac{b_0}{q^{N-1}}\right)x_{N-1} + \big(-C_N^1 a_0 + C_N^2 a_1 - N\big)x_N = -f_F;\\
\left(a_1 + \frac{b_1}{q^{N-1}}\right)x_{N-1} + \left(a_0 - C_N^1 a_1 + \frac{b_0}{q^N}\right)x_N + f_N = 0;\\
\left(a_1 + \frac{b_1}{q^N}\right)x_N + f_{N+1} = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Данные соотношения представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x_n, $n = \overline{0, N}$, и коэффициентов f_N и f_{N+1}, которая в матричном виде запишется так:

$$M_N x_N^* = g_N^*, \tag{3.2}$$

где

$$
M_N = \left(\begin{matrix}
-a_0 - 1 & a_0 & -a_0 & \dots \\
a_0 - a_1 + \dfrac{b_0}{q} & -C_2^1 a_0 + a_1 - 2 & C_3^2 a_0 - a_1 & \dots \\
a_1 + \dfrac{b_1}{q} & a_0 - C_2^1 a_1 + \dfrac{b_0}{q^2} & -C_3^1 a_0 + C_3^2 a_1 - 3 & \dots \\
0 & a_1 + \dfrac{b_1}{q^2} & a_0 - C_3^1 a_1 + \dfrac{b_0}{q^3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots
\end{matrix}\right.
$$
$$
\left.\begin{matrix}
\dots & (-1)^N a_0 & 0 & 0 \\
\dots & (-1)^{N-1}\big(C_N^{N-1}a_0 - a_1\big) & 0 & 0 \\
\dots & (-1)^{N-2}\big(C_N^{N-2}a_0 - C_N^{N-1}a_1\big) & 0 & 0 \\
\dots & (-1)^{N-3}\big(C_N^{N-3}a_0 - C_N^{N-2}a_1\big) & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & a_0 - C_N^1 a_1 + \dfrac{b_0}{q^N} & 1 & 0 \\
\dots & a_1 + \dfrac{b_1}{q^N} & 0 & 1
\end{matrix}\right), \tag{3.3}
$$

$$x_N^* = (x_1, x_2, \dots, x_N, f_N, f_{N+1})^\top, \tag{3.4}$$

$$g_N^* = (-(a_0+b_0)x_0 - f_0, -(a_1+b_1)x_0 - f_1, -f_2, \dots, -f_F, 0, 0)^\top.$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть матрица* M_N *линейной системы* (3.2), *определенная в силу уравнения* (2.1), — *невырожденная. Тогда для любого* $x_0 \in R$ *начальная задача* (2.1)–(2.3) *будет иметь ПК-решение в виде полинома* (2.14) *степени* $N = F+1$ *с невязкой* $\Delta(t) = f_N t^N + f_{N+1}t^{N+1}$.

Доказательство. Действительно, в этом случае существует матрица M_N^{-1}, обратная матрице M_N, и из (3.2) получаем

$$x_N^* = M_N^{-1} g_N^*.$$

Следовательно, коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_N$ ПК-решения (2.14) и коэффициенты f_N и f_{N+1} невязки $\Delta(t)$ вычисляются единственным образом, что и доказывает теорему. □

4. Точные решения ЛФДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим начальную задачу (2.1)–(2.3), когда $a(t) = a$ и $b(t) = b$ — постоянные коэффициенты. В этом случае соотношения (3.1) с учетом (2.6) перепишутся в виде:

$$\begin{gathered}
(-a-1)x_1 + ax_2 - ax_3 + \dots + (-1)^N a x_N = -(a+b)x_0 - f_0;\\
\left(a + \frac{b}{q}\right)x_1 + (\bar C_2^1 - 2)x_2 + \dots + \bar C_k^{k-1} a x_k + \dots + \bar C_N^{N-1} a x_N = -f_1;\\
\left(a + \frac{b}{q^2}\right)x_2 + (\bar C_3^1 - 3)x_3 + \dots + \bar C_k^{k-2} a x_k + \dots + \bar C_N^{N-2} a x_N = -f_2;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(a + \frac{b}{q^k}\right)x_k + (\bar C_{k+1}^1 - (k+1))x_{k+1} + \dots + \bar C_{k+m}^m a x_{k+m} + \dots + \bar C_N^{N-k} a x_N = -f_k;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(a + \frac{b}{q^{N-1}}\right)x_{N-1} + \left(\bar C_N^1 a - N\right)x_N = -f_F;\\
\left(a + \frac{b}{q^N}\right)x_N + f_N = 0.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Обозначим:

$$a_{s,s} = -s(a+1),\ s = \overline{1,N}; \qquad a_{1,s} = (-1)^s a,\ s = \overline{2,N}; \qquad a_{s,s-1} = a + \frac{b}{q^{s-1}},\ s = \overline{2,N+1};$$

$$a_{2+i,3+i+j} = \bar C_{3+i+j}^{2+j} a, \quad i = \overline{0, N-3}, \quad j = \overline{0, N-3-i}; \tag{4.2}$$

$$\bar x_N = (x_1, x_2, \dots, x_N, f_N)^\top, \qquad \bar g_N = (-(a+b)x_0 - f_0, -f_1, -f_2, \dots, -f_F, 0)^\top$$

и перепишем систему линейных алгебраических уравнений (3.2) в матричном виде:

$$M_N \bar x_N = \bar g_N, \tag{4.3}$$

где

$$M_N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N-1} & a_{1,N} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,N-1} & a_{2,N} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,N-1} & a_{3,N} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \dots & a_{4,N-1} & a_{4,N} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N-1} & a_{N,N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Пусть существует целое число $k < F$ такое, что в (4.1):

$$a + \frac{b}{q^k} = 0, \tag{4.5}$$

и пусть в (2.2):

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=0}^{k} \bar{f}_n t^n + \sum_{n=k}^{F} \bar{f}_n t^n, \tag{4.6}$$

где с учетом замечания 2.1 $\bar{f}_n = 0$, $n = \overline{k, F}$.

Выпишем линейную систему, состоящую из последних $N - k + 1$ строк линейной системы (4.3):

$$M_{k_N} \bar{x}_{k_N} = \bar{g}_{k_N}, \tag{4.7}$$

где $\bar{x}_{k_N} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_N, f_N)^\top$, $\bar{g}_{k_N} = (0, 0, 0, \dots, 0)^\top$ — $(N - k + 1)$-мерный нуль-вектор,

$$M_{k_N} = \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2} & a_{k+1,k+3} & \dots & a_{k+1,N-1} & a_{k+1,N} & 0 \\ a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} & a_{k+2,k+3} & \dots & a_{k+2,N-1} & a_{k+2,N} & 0 \\ 0 & a_{k+3,k+2} & a_{k+3,k+3} & \dots & a_{k+3,N-1} & a_{k+3,N} & 0 \\ 0 & 0 & a_{k+4,k+3} & \dots & a_{k+4,N-1} & a_{k+4,N} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N-1} & a_{N,N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Теорема 4.1. *Пусть для начальной задачи* (2.12) *при* $k < N$ *выполняется условие* $a + \frac{b}{q^k} = 0$ *и в формуле* (2.2) $F > k$. *Тогда, если матрица* M_N, *определенная формулой* (4.4), *и матрица* M_{k_N} *— невырожденные, то для любого* $x_0 \neq 0$ *полином*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{k} x_n t^n \tag{4.9}$$

будет точным решением начальной задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Поскольку по условию теоремы $\det M_{k_N} \neq 0$, существует матрица $M_{k_N}^{-1}$, обратная матрице M_{k_N}. Тогда из (4.7) находим

$$\bar{x}_{k_N} = M_{k_N}^{-1} \bar{g}_{k_N}.$$

А так как, согласно (4.7), вектор $\bar{g}_{k_N}$ является нуль-вектором, то вектор $\bar{x}_{k_N}$ тоже будет нуль-вектором, т. е. $x_{k+i} = 0$, $i = \overline{1, N-k}$, и $f_N = 0$. В силу этого из (4.3) получаем

$$\hat{M}_k \hat{x}_k = \hat{g}_k. \tag{4.10}$$

Здесь

$$\hat{M}_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \dots & a_{4,k-1} & a_{4,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k,k-1} & a_{k,k} \end{pmatrix},$$

$$\hat{x}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)^\top, \qquad \hat{g}_k = (-(a+b)x_0, 0, \dots, 0)^\top.$$

Так как по условию теоремы в (4.3) $\det M_N \neq 0$, то с учетом теоремы 3.1 $\det \hat{M}_k \neq 0$. Тогда существует матрица $\hat{M}_k^{-1}$, обратная матрице $\hat{M}_k$, и согласно (4.9) $\hat{x}_k = \hat{M}_k^{-1}\hat{g}_k$. Из этого соотношения вытекает, что коэффициенты x_i, $i = \overline{1, k}$, вычисляются единственным образом, что и доказывает существование решения начальной задачи (2.1)–(2.3) в виде полинома (4.8). □

5. Численный эксперимент

5.1. Рассмотрим начальную задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \left(1 + \frac{1}{2}t\right)x(t-1) + (1+t)x(t/2), \quad x(0) = 1, \quad t \in R. \tag{5.1}$$

Определим ПК-решение в виде полинома $x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n$. Тогда, согласно определения 2.1, запишем начальную задачу, согласованную по размерности полиномов

$$\dot{x}(t) = \left(1 + \frac{1}{2}t\right)x(t-1) + (1+t)x(t/2) + f_N t^N + f_{N+1}t^{N+1}, \quad x(0) = 1.$$

В этом уравнении с учетом замечания 2.1 и формулы (2.11) $f(t) = \sum_{n=0}^{N} f_n t^n$, $f_n = 0$, $n = \overline{0, N-1}$, а f_N и f_{N+1} — неизвестные коэффициенты, которые определяют невязку в виде

$$\Delta(t) = f_N t^N + f_{N+1}t^{N+1}.$$

Приведем алгоритм нахождения ПК-решения и невязки при $N = 4$. Для нахождения коэффициентов x_n, $n = \overline{1, 4}$, воспользуемся матричным уравнением (3.2):

$$M_4 x_4^* = g_4^*.$$

где

$$M_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.5 & 2.5 & -3.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & -4.5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & -0.375 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 & -0.4375 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5625 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_4^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, f_4, f_5)^\top, \qquad g_4^* = (-2, -1.5, 0, 0, 0, 0)^\top.$$

Так как $\det M_4 = 152.438 \neq 0$, то находим обратную матрицу

$$M_4^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5567 & -0.1511 & 0.0377 & 0.0246 & 0 & 0 \\ -0.2481 & -0.3501 & -0.1460 & 0.0787 & 0 & 0 \\ -0.1599 & -0.0935 & -0.2263 & -0.1476 & 0 & 0 \\ -0.0252 & -0.0455 & -0.0049 & -0.1771 & 0 & 0 \\ 0.0889 & 0.0385 & 0.01393 & 0.0148 & 1 & 0 \\ 0.0142 & 0.0256 & 0.0028 & 0.0996 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x_4^* = M_4^{-1} g_4^* = \begin{pmatrix} 1.3400 \\ 1.0213 \\ 0.4600 \\ 0.1187 \\ -0.2356 \\ -0.0668 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_4(t) = 1 + 1.3400t + 1.0213t^2 + 0.4600t^3 + 0.1187t^4, \qquad \Delta_4(t) = -0.2356t^4 - 0.06687^5.$$

Приведем результаты вычислений ПК-решений и соответствующих невязок при $N = \overline{5,8}$:

$$x_5(t) = 1 + 1.3513t + 1.01489t^2 + 0.4321t^3 + 0.1598t^4 + 0.0400t^5,$$
$$\Delta_5(t) = -0.0311t^5 - 0.0213t^6;$$
$$x_6(t) = 1 + 1.3508t + 1.0189t^2 + 0.4310t^3 + 0.1540t^4 + 0.0450t^5 + 0.0046t^6,$$
$$\Delta_6(t) = -0.0148t^6 - 0.0023t^7;$$
$$x_7(t) = 1 + 1.3495t + 1.0173t^2 + 0.4353t^3 + 0.1529t^4 + 0.0411t^5 + 0.0073t^6 + 0.0021t^7,$$
$$\Delta_7(t) = 0.0014t^7 - 0.0011t^8;$$
$$x_8(t)=1 + 1.3517t+1.0139t^2+0.4315t^3+0.1616t^4+0.0405t^5+0.0028t^6+0.0045t^7+0.0016t^8,$$
$$\Delta_8(t) = 0.0026t^8 - 0.0008t^9.$$

Графики полученных ПК-решений приведены на рис. 5.1. Как видно из графиков, при увеличении степени полиномов ПК-решений последние имеют тенденцию взаимного притяжения при уменьшении невязки.

Определение 5.1. Под взаимной ε-притяжимостью ПК-решений на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ будем понимать свойство взаимного притяжения последовательности ПК-решений, порождаемых увеличением степени N полинома ПК-решения, в смысле, что существует такое N_*, при котором для $N \geq N_*$ и заданного ε:

$$|x_{N+i}(t) - x_{N+i-1}(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2 \dots k, \ \forall t \in [t_0, t_1].$$

Обозначим:

$$\delta_{54}(t) = x_5(t) - x_4(t), \ \delta_{65}(t) = x_6(t) - x_5(t), \ \delta_{76}(t) = x_7(t) - x_6(t), \ \delta_{87}(t) = x_8(t) - x_7(t).$$

Графики этих функций приведены на рис. 5.2. Из приведенных на рис. 5.1 и рис. 5.2 графиков следует, что ПК-решения начальной задачи (5.1) при $\varepsilon = 0.01$ и $N_* = 5$ на отрезке $[-1, 1]$ обладают свойством взаимной ε-притяжимости.

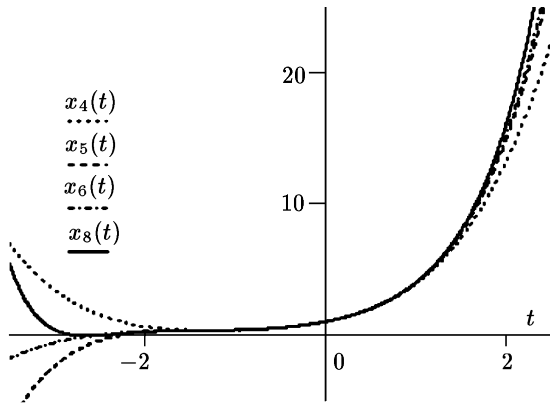

Рис. 5.1

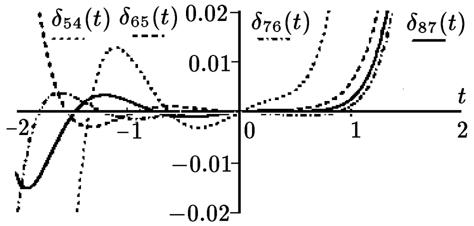

Рис. 5.2

5.2. Исследуем начальную задачу для следующего неоднородного ФДУ с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}(t) = \frac{3}{16}x(t-1) - 24x(t/2) + f(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in R, \tag{5.2}$$

где $f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}$ — функция, аппроксимирующая $\cos t$ с погрешностью $\Delta_{\cos t} = |\frac{t^6}{6!}|$.

Задача, согласованная по размерности полиномов относительно этой задачи, имеет согласно определению 2.1 вид:

$$\dot{x}(t) = \frac{3}{16}x(t-1) - 24x(t/2) + f(t) + \Delta(t), \quad x(0) = 1,$$

где

$$x(t) = x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad \Delta(t) = \Delta_N(t) = f_N t^N.$$

Ниже приведены результаты расчетов по нахождению ПК-решений для $N = \overline{5,7}$ и соответствующие им невязки:

$$x_5(t) = 1 - 7.861t + 24.129t^2 - 31.857t^3 + 17.381t^4 - 3.842t^5;$$

$$x_6(t) = 1 - 7.869t + 24.163t^2 - 31.832t^3 + 17.207t^4 - 3.667t^5 + 0.288t^6;$$

$$x_7(t) = 1 - 7.808t + 24.170t^2 - 32.097t^3 + 17.325t^4 - 3.659t^5 + 0.285t^6 - 0.007t^7;$$

$$\Delta_5(t) = -2.153t^5, \quad \Delta_6(t) = -0.054t^6, \quad \Delta_7(t) = 0.$$

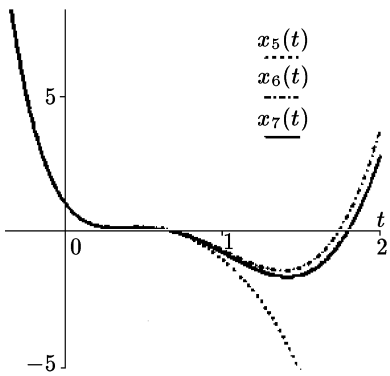

Рис. 5.3

На рис. 5.3 приведены графики полученных ПК-решения начальной задачи (5.2).

Расчеты показали, что при N=7 невязка $\Delta_7(t)$=0. Это означает, что полученное ПК-решение начальной задачи (5.2) в виде полинома седьмой степени является точным решением этой задачи. Этот результат является следствием теоремы 4.1, поскольку в этом случае $a + \frac{b}{q^k} = \frac{3}{16} - \frac{24}{2^7} = 0$.

Литература

1. **Bernoulli J.** Meditationes. Dechordis vibrantibis ... // Commentarial Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Collected Work. — 1728. — Vol. 3. — P. 198–221.
2. **Мышкис А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.–Л.: Гостехиздат, 1951.
3. **Беллман Р., Кук К.** Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
4. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
5. **Черепенников В.Б.** Полиномиальные квазирешения линейных систем дифференциально-разностных уравнений // Изв. ВУЗов, сер. Математика. — 1999. — № 10. — С. 49–58.
6. **Cherepennikov V.B., Ermolaeva P.G.** Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations // Opuscula Mathematica. — 2006. — Vol. 26, № 3. — P. 431–443.
7. **Черепенников В.Б., Ермолаева П.Г.** Гладкие решения начальной задачи для некоторых дифференциально-разностных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 2. — С. 213–226.
8. **Черепенников В.Б.** Об аналитических решениях некоторых систем функционально-дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 1094–1095.

Поступила в редакцию 20 марта 2012 г.