

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ТРЕЩИН ДЛЯ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. А. Хандогин

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Рассмотрено упругое равновесие изотропной плоскости с одним линейным дефектом в условиях продольного сдвига. Поле деформаций построено как решение двумерной краевой задачи Римана с переменными коэффициентами. Предложен специальный прием, позволяющий свести общую двумерную задачу к двум одномерным. Описаны три типа асимптотических выражений поля деформаций: в вершинах дефекта, в вершинах армирующего ребра, а также на удалении от близко расположенных вершин дефекта и ребра. Из анализа вариационных симметрий уравнений продольного сдвига выводится общая форма асимптотики деформаций с конечной энергией. Сформулирован парадокс основной смешанной краевой задачи для трещин и предложен вариант ее решения.

Смешанные задачи теории трещин недостаточно исследованы к настоящему времени. Они почти не представлены в известных справочниках [1, 2], хотя и интересны как в прикладном, так и в теоретическом отношении. Своеобразие смешанных задач для трещин, как будет показано, состоит в появлении неустойчивых решений, обладающих парадоксальными асимптотическими выражениями для внутренних силовых факторов. Они могут иметь в вершине дефекта любую особенность от 0 до -1 . Парадоксальность таких асимптотик обусловлена их несовместимостью с вариационной симметрией уравнений антиплоской деформации относительно группы пространственных сдвигов, которая однозначно фиксирует классический вид асимптотического распределения деформации. Показано, что в условиях ограниченной прочности невозможно достичь таких конфигураций дефекта, которые приводят к указанным особым решениям. В результате парадоксальные асимптотические выражения (к числу которых относятся и решения основной смешанной краевой задачи с особенностями порядков $-1/4$ и $-3/4$) могут применяться только для описания деформаций вдали от близко расположенных вершин дефекта и ребра, вблизи которых действуют другие асимптотики. Но они могут быть использованы и для оценки коэффициентов интенсивности напряжений в вершине дефекта.

1. Краевая задача. Рассмотрим упругое равновесие изотропной плоскости в условиях продольного сдвига. Плоскость ослаблена одним прямолинейным разрезом вдоль отрезка действительной оси $|x| < 1$. Часть нижнего берега разреза армирована бесконечно тонким упругим ребром на отрезке $a < x < b$. По определению ребро упруго сопротивляется только деформациям сдвига и не сопротивляется растяжению — сжатию и изгибу. Такая схематизация допустима, если ребро состоит из безмоментных упругих нитей (по терминологии работ [3, 4]), не взаимодействующих между собой и направленных под углом 45° к плоскости xOy .

Плоскость нагружена на бесконечности равномерной нагрузкой $\gamma_{11}^0 \equiv \gamma_{13}^0 - i\gamma_{23}^0$. Берега дефекта свободны от внешних сил, а ребро удерживается от поворотов в своей плоскости внутренними моментами (рис. 1).

Статическое равновесие элементов плоскости, расположенных на берегах разреза,

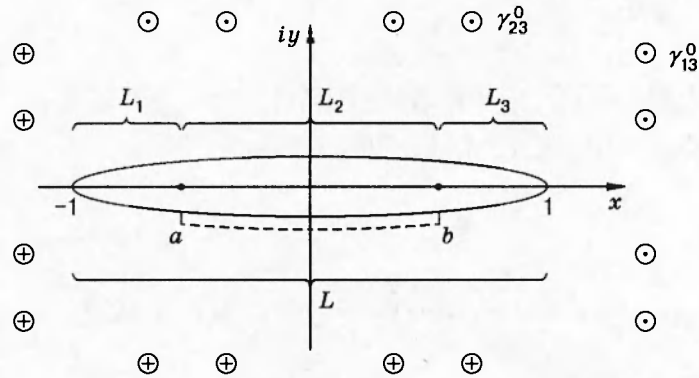


Рис. 1

обеспечивается условиями вида

$$\gamma_{23}^+(x, 0) = 0, \quad (\chi_1 + \chi_3)\gamma_{23}^- + \chi_2\gamma_{\lambda 3}^- = 0, \quad \chi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in L_k, \\ 0, & x \notin L_k, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\gamma_{\lambda 3} \equiv \alpha\gamma_{23} + \beta\gamma_{13}, \quad \alpha + i\beta \equiv e^{+i\lambda}, \quad \alpha = (1 + (c/\mu)^2)^{-1/2}, \quad \beta = \alpha c/\mu,$$

где $(\gamma_{13}, \gamma_{23})$ — компоненты поля сдвиговых деформаций; c — сдвиговая жесткость ребра; μ — модуль сдвига основного материала; L_k ($k = 1, 2, 3$) — области кусочной однородности краевых условий. Краевые условия (1.1) объединяют условие на нормальную производную на верхнем берегу разреза L и нижних берегах линий L_1 и L_3 с условием на наклонную производную на нижнем берегу контура L_2 (рис. 1).

Поле деформаций удобно представить суперпозицией трех составляющих:

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} = \gamma_{-1}^0 + \gamma_1(z) + i\gamma_2(z), \quad (1.2)$$

в которой неизвестные аналитические функции $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$, в свою очередь, представляются в форме интегралов типа Коши с чисто вещественными плотностями. Вычисляя предельные значения деформаций (1.2) на контуре дефекта и подставляя их в граничные условия (1.1), приходим к следующей краевой задаче Римана для функций $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$:

$$\gamma_1^+ + (\chi_1 + \chi_3)\gamma_1^- + \chi_2 e^{-i\lambda}(\cos \lambda\gamma_1^- + \sin \lambda\gamma_2^-) = 2i(\chi_1 + \chi_3)\gamma_{23}^0 + i\chi_2(\gamma_{23}^0 + e^{-i\lambda}\gamma_{\lambda 3}^0), \quad (1.3)$$

$$\gamma_2^+ - (\chi_1 + \chi_3)\gamma_2^- + \chi_2 e^{-i\lambda}(\cos \lambda\gamma_1^- - \sin \lambda\gamma_2^-) = \chi_2(\gamma_{23}^0 - e^{-i\lambda}\gamma_{\lambda 3}^0).$$

Здесь $\gamma_{\lambda 3}^0 = \alpha\gamma_{23}^0 + \beta\gamma_{13}^0$ — внешние напряжения в наклонных площадках. В частности, краевая задача для идеальной трещины получается из соотношения (1.3) тремя способами: $\chi_1 = 1, \chi_2 = \chi_3 = 0$, или $\chi_3 = 1, \chi_1 = \chi_2 = 0$, или $\lambda = 0$. Основная смешанная краевая задача (жесткое включение с оторванным верхним берегом) соответствует следующим параметрам: $\chi_1 = \chi_2 = 0, \lambda = \pi/2$.

Дополнительное условие однозначности смещений и отсутствия главного вектора сил на ребре формализуется равенством вида

$$\text{Res}(\gamma_1 + i\gamma_2)\Big|_{z=\infty} = 0. \quad (1.4)$$

2. Решение задачи (1.3). Отличительная особенность двумерной краевой задачи (1.3) состоит в том, что матрица ее коэффициентов симметрична и кусочно-постоянна. Ее решение построим с помощью специального приема, значительно более простого, чем общетеоретические методики, изложенные, например, в [5]. Опишем его кратко.

В матричных обозначениях задача (1.3) имеет вид

$$\gamma^+ - G\gamma^- = f. \quad (2.1)$$

Введем новый вектор неизвестных $\Gamma(z) = C(z)\gamma(z)$, где $C(z)$ — ортогональная аналитическая матрица:

$$C(z) = \begin{bmatrix} \cos \omega(z) & -\sin \omega(z) \\ \sin \omega(z) & \cos \omega(z) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

В новых неизвестных краевая задача (2.1) записывается следующим образом: $\Gamma^+ - C^+G(C^-)^{-1}\Gamma^- = F$, $F = C^+f$. Матрицу $C(z)$ выберем так, чтобы новая матрица коэффициентов стала диагональной. При этом двумерная краевая задача распадается на две независимые одномерные задачи Римана. Осуществляя описанную программу, приходим к выводу, что угол поворота $\omega(z)$ в матрице (2.2) должен удовлетворять на L краевому условию вида

$$\omega^+ + \omega^- = \omega_0(x), \quad x \in L, \quad \omega_0(x) = \pi(k\chi_1 + m\chi_3) + \chi_2(l\pi - \lambda), \quad k, l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3)$$

Единственное решение вспомогательной краевой задачи (2.3) находится при следующих ограничениях:

1) на бесконечности функция $\omega(z)$ может иметь устранимую особенность; в частности, для основной смешанной краевой задачи из условий (1.3) вытекает, что $\omega(z) = -\pi/4$;

2) в окрестности вершин дефекта напряжения монотонно зависят от полярного радиуса и не имеют осцилляций, что возможно, если функция $\omega(z)$ ограничена около этих точек;

3) в окрестности вершин жесткого армирующего ребра ($\lambda = \pi/2$) порядок особенности напряжений такой же, как и в задаче о жестком штампе (ребре) на границе полуплоскости, т. е. $-1/2$.

Но даже при сделанных ограничениях единственное решение задачи (2.3) находится только после решения общей задачи (1.3). Здесь приведем лишь окончательный результат:

$$\omega(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\omega_0(x)}{X_0^+(x)} \frac{dx}{x-z}, \quad X_0(z) = \sqrt{z^2 - 1}, \quad \omega_0(x) = -\pi\chi_1(x) - \lambda\chi_2(x). \quad (2.4)$$

Теперь краевая задача (2.1) распадается на две независимые краевые задачи для новых неизвестных с условиями

$$\Gamma_1^+ + (-\chi_1 + \chi_3 + \chi_2 e^{-i\lambda})\Gamma_1^+ = F_1, \quad \Gamma_2^+ - (-\chi_1 + \chi_3 + \chi_2 e^{-i\lambda})\Gamma_2^+ = F_2, \quad (2.5)$$

а поле сдвигов (1.2) определяется соотношением

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} = \gamma_{-1}^0 + e^{-i\omega}(\Gamma_1 + i\Gamma_2). \quad (2.6)$$

Решение краевых задач (2.5) не вызывает затруднений и строится по общим правилам для одномерных краевых задач Римана [6]. Приведем окончательные формулы:

$$\begin{aligned} \Gamma_k(z) &= \frac{X_k(z)}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{F_k(x)}{X_k^+(x)} \frac{dx}{x-z}, \quad k = 1, 2, \\ X_1(z) &= (z-1)^{-1/2}(z-a)^{n-1/2}(z-b)^{-n}, \quad n = \lambda/2\pi, \\ X_2(z) &= (z+1)^{-1/2}(z-a)^{n-1/2}(z-b)^{-n}, \\ F_1 &= f_1 \cos \omega^+ - f_2 \sin \omega^+, \quad F_2 = f_1 \sin \omega^+ + f_2 \cos \omega^+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь f_1, f_2 — правые части первого и второго равенств (1.3) соответственно.

Таким образом, соотношения (2.4)–(2.7) завершают точное решение поставленной задачи (1.1) или (1.3) с условием (1.4).

3. Эквивалентная задача. Для прямолинейных дефектов, расположенных на действительной оси, имеет место следующий принцип соответствия.

Пусть известно решение некоторой краевой задачи в форме (1.2). Тогда функция

$$\tau_{13} - i\tau_{23} = \gamma_{-1}^0 + \gamma_2(z) + i\gamma_1(z) \quad (3.1)$$

является решением эквивалентной краевой задачи, краевое условие которой получается из краевого условия исходной задачи путем подстановки

$$\gamma_{13}^{\pm} \rightarrow \tau_{23}^{\mp}, \quad \gamma_{23}^{\pm} \rightarrow \tau_{13}^{\mp}, \quad \gamma_{13}^0 \leftrightarrow \gamma_{23}^0. \quad (3.2)$$

Справедливость соответствия устанавливается из сравнения предельных значений интегралов типа Коши, представляющих функции $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$.

Сформулируем краевую задачу, эквивалентную задаче (1.1). В ней дефект — это жесткое бесконечно тонкое включение вдоль отрезка $|x| < 1$. Нижний берег непосредственно соединен с основным материалом, как и часть верхнего берега, расположенная вдоль отрезков $\chi_1 = \chi_3 = 1$. Другая часть верхнего берега ($\chi_2 = 1$) соединена с основным материалом через упругое ребро. Параметры c и μ в формулах для угла λ (1.1) в этом случае определяют податливость ребра и основного материала соответственно. Контур дефекта свободен от внешних сил, а сам он удерживается от поворотов в своей плоскости внутренними моментами (рис. 2). Равномерная внешняя нагрузка приложена на бесконечности.

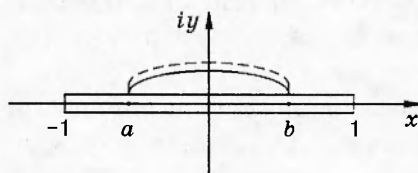


Рис. 2

Краевое условие данной задачи получается из соотношений (1.1) путем подстановки (3.2), а ее решение имеет вид

$$\tau_{13} - i\tau_{23} = \gamma_{-1}^0 + e^{i\omega}(\Gamma_2(z) + i\Gamma_1(z)), \quad (3.3)$$

где функции $\omega, \Gamma_1, \Gamma_2$ определяются формулами (2.4), (2.7), если в них поменять местами и внешние напряжения.

Отметим, что соответствие (3.1) и (3.2), в частности, проясняет причину впечатляющего однообразия задач о трещинах и жестких включениях [7]. Поле для жесткого включения (3.3) естественным образом наследует все свойства поля для трещин (2.6). В дальнейшем не будем на этом останавливаться, кроме специальных случаев.

4. Асимптотические выражения. Поле деформации (2.6) имеет три вида асимптотических выражений: в вершинах дефекта, в вершинах ребра и вдали от близко расположенных вершин дефекта и ребра соответственно. Рассмотрим их.

В вершинах дефекта деформации имеют особенность, характерную для трещин продольного сдвига [1, 2, 7]. Например, около правой вершины асимптотика деформаций следующая:

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} \cong -ik_3/\mu\sqrt{2\zeta_1}, \quad \zeta_1 \equiv z - 1, \quad |\zeta_1| \ll (1 - b),$$

$$k_3 = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} (1-a)^{n-1/2} (1-b)^{-n} \int_{-1}^{+1} \frac{F_1(t)}{X_1^+(t)} \frac{dt}{t-1}. \quad (4.1)$$

В частности, при $a = b = 0$ получаем обычное выражение для прямолинейного разреза: $k_3 = \mu \gamma_{23}^0$. В другом крайнем случае большой длины ребра ($b \rightarrow 1$, $a \rightarrow -1$) коэффициент интенсивности напряжений неограниченно возрастает:

$$k_3 = \mu(\gamma_{23}^0 + \gamma_{\lambda 3}^0) \frac{1-2n}{\sqrt{2} \cos \pi n} (1-a)^{n-1/2} (1-b)^{-n} + O(1+a) + O(1-b). \quad (4.2)$$

В окрестности левой вершины дефекта выполняются соотношения, подобные равенствам (4.1) и (4.2). Решение эквивалентной задачи (3.3) в вершинах дефекта имеет асимптотику, характерную для жесткого включения:

$$\tau_{13} - i\tau_{23} \cong s_3 / \mu \sqrt{2\zeta_1}. \quad (4.3)$$

Здесь s_3 — коэффициент интенсивности напряжений, совпадающий со значениями k_3 после замены (3.2).

В окрестностях вершин ребра следует учитывать логарифмическую особенность функции $\omega(z)$. При этом на верхнем свободном берегу деформации непрерывны около обеих вершин ребра. В окрестности правого конца ребра снизу деформации асимптотически описываются соотношениями

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} \cong \frac{A - iB}{\zeta_2^{-2n}}, \quad \zeta_2 \equiv z - b, \quad |\zeta_2| \ll (1-b), \quad A - iB = \lim_{z \rightarrow b} (z-b)^n (\Gamma_1 + i\Gamma_2). \quad (4.4)$$

В частности, при нулевой длине ребра ($a = b$) коэффициент интенсивности $A - iB$ в асимптотике (4.4) исчезает, а в противоположном пределе большой длины ребра ($b \rightarrow 1$, $a \rightarrow -1$) получим

$$A - iB = \frac{(\gamma_{\lambda 3}^0 - \gamma_{23}^0)(1-n)}{2 \sin n\pi} (b+1)^{-1/2} (b-a)^{n-1/2} - i \frac{(\gamma_{\lambda 3}^0 + \gamma_{23}^0)(1-2n)}{2 \cos n\pi} (b-1)^{-1/2} (b-a)^{n-1/2} + O(1-b) + O(1+a). \quad (4.5)$$

Решение задачи о жестком включении (3.3) имеет непрерывные деформации снизу, а на верхнем берегу около правой вершины упругого ребра

$$\tau_{13} - i\tau_{23} \cong (B - iA) / \zeta_2^{-2n}. \quad (4.6)$$

Асимптотики деформаций около левых вершин ребра имеют такую же структуру, но порядок особенности равен $(2n - 1)$. При этом в пределе абсолютно жесткого ребра для решения (2.6) (и трещины для (3.3)) асимптотики (4.4) и (4.6) описывают стандартную особенность порядка $(-1/2)$, как и должно быть в соответствии с ограничением п. 3. В другом крайнем случае бесконечно малой жесткости армирующего ребра ($n \rightarrow 0$) решение (2.6) превращается в решение для трещины со свободными берегами, а соответствующий коэффициент интенсивности в асимптотике для левой вершины ребра обращается в нуль. В общем случае доказательство этого факта достаточно громоздко. Но ниже оно иллюстрируется на примере.

Наконец, третий тип асимптотических выражений описывает поле деформаций на удалении от близко расположенных вершин дефекта и упругого ребра. Например, около правых вершин получаем следующие асимптотические равенства:

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} \cong e^{i\lambda/2} \left(c_{11} \zeta_3^{-1/2-n} + i c_{12} \zeta_3^{-n} \right),$$

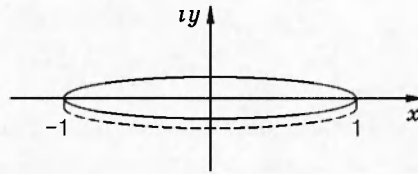


Рис. 3

$$c_{11} = \lim_{z \rightarrow -1} \{(z-1)^{n+1/2} \lim_{b \rightarrow 1} \Gamma_1(z)\}, \quad \zeta_3 \equiv z-1, \quad (4.7)$$

$$c_{12} = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)^n \lim_{b \rightarrow 1} \Gamma_2(z)\}, \quad (1-b) \ll |\zeta_3| \ll 1,$$

а в окрестности левых вершин — соотношения

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} \cong e^{i\lambda/2} \left(c_{21} \zeta_4^{-1/2+n} + i c_{22} \zeta_4^{-1+n} \right), \quad \zeta_4 = z+1, \quad (1+a) \ll |\zeta_4| \ll 1. \quad (4.8)$$

Здесь c_{21} и c_{22} связаны с функциями $\Gamma_1(z)$ и $\Gamma_2(z)$ зависимостями, подобными зависимостям c_{11} и c_{12} . При этом коэффициент c_{22} в пределе $n \rightarrow 0$ исчезает, как и коэффициент интенсивности напряжений около левой вершины ребра.

5. Пример. Пусть армирующее ребро занимает весь нижний берег дефекта, т. е. $b = -a = 1$. Соответствующие краевые условия получаются из равенств (1.3) или (2.5) при $\chi_1 = \chi_3 = 0$, $\chi_3(x) \equiv 1$, $\omega(x) = -\lambda/2$. Интегралы (2.7) вычисляются в элементарных функциях, и поле деформаций (2.6) около такого дефекта (рис. 3) имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{13} - i\gamma_{23} = \gamma_{-1}^0 + \frac{i(\gamma_{23}^0 + \gamma_{\lambda 3}^0)}{1 + e^{i\lambda}} \{1 - (z-2n)X_1(z)\} + \\ + \frac{i(\gamma_{23}^0 - \gamma_{\lambda 3}^0)}{1 - e^{i\lambda}} \{1 - (z+1-2n)X_2(z)\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где функции $X_1(z)$ и $X_2(z)$ определяются по формулам (2.7) при $b = -a = 1$. Поле (5.1) имеет только третий тип асимптотических выражений (4.7) и (4.8). В пределе бесконечно жесткого ребра ($\lambda = \pi/2$, $n = 1/4$) равенство (5.1) представляет решение основной смешанной краевой задачи. Но наибольший порядок сингулярных членов возникает при слабом армировании. При малом значении n выражение (5.1) имеет следующую структуру основных сингулярных членов:

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} = \gamma_{13}^0 - \frac{iz\gamma_{23}^0}{\sqrt{z^2-1}} - 2\gamma_{13}^0 n(z-1)^{-n}(z+1)^{n-1} + O(n). \quad (5.2)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части дают точное решение для трещины со свободными берегами, а последние два определяют перераспределение деформаций под влиянием ребра малой жесткости. Из равенства (5.2) видно, что коэффициент интенсивности напряжений около левой вершины дефекта пропорционален малому параметру n и поэтому в пределе $n \rightarrow 0$ исчезает. Причина перераспределения напряжений, констатированная решением (5.2), состоит в том, что по условию ребро удерживается от поворотов в своей плоскости внутренним моментом. Возможные повороты ребра подобны дополнительному полю γ_{13}^0 . Остается подсчитать величину внутреннего момента, удерживающего ребро. Для полного решения (5.1) искомая величина m имеет вид

$$m = -\text{Im} \oint z(\gamma_{13} - i\gamma_{23}) dz = \frac{\pi\gamma_{23}^0}{4} \sin \lambda (8n^2 - 1) - \frac{\pi\gamma_{13}^0}{2} \left(4n^2 \cos \lambda + \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right),$$

где контур интегрирования охватывает дефект, поэтому параметр m равен главному моменту, действующему на дефект.

6. Парадокс основной смешанной краевой задачи. Решение (5.1) несовместимо с вариационной симметрией уравнений антиплоской деформации относительно группы пространственных сдвигов. Для вывода этого противоречия рассмотрим вариационные симметрии задачи. Используя общие методы, изложенные, например, в [8, 9], получим

Утверждение. Векторное поле $\xi_k \partial_k$ порождает нулевые дивергенции вида

$$\partial_j \left(\xi_j L - \frac{\partial L}{\partial w_j} \xi_k w_k \right) = 0, \quad w_j = \partial_j w \quad (6.1)$$

для лагранжиана статической антиплоской деформации однородной изотропной среды, в котором w — скаляр перемещений, если образующие удовлетворяют соотношениям Коши — Римана

$$\partial_1 \xi_1 - \partial_2 \xi_2 = 0, \quad \partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1 = 0. \quad (6.2)$$

Утверждение доказывается подстановкой равенств (6.1) и (6.2) в условие вариационной симметрии [8, с. 328] и может быть распространено и на ортотропные среды с необходимым видоизменением второго уравнения (6.2).

Дивергенциям (6.1) удобно придать интегральную форму с учетом комплексных представлений для полей. Опуская выкладки, приведем окончательный результат в виде

$$I[\Phi] = \frac{i\mu}{2} \oint_S \Phi(z) (\gamma_{13} - i\gamma_{23})^2 dz, \quad (6.3)$$

где $2\Phi(z) \equiv \xi_1 + i\xi_2$ — комплексная образующая векторного поля, порождающего вариационную симметрию; S — произвольный замкнутый контур. Если контур S лежит в области голоморфности поля $(\gamma_{13} - i\gamma_{23})^2$, то $I[\Phi] = 0$ — нулевая дивергенция, порожденная полем с образующей $\Phi(z)$. В частности, пространственные сдвиги, как обычно, приводят к инвариантным J -интегралам с компонентами J_1 и J_2 и образующей $\Phi(z) = 1$, связанным равенством

$$I[1] = J_1 - iJ_2. \quad (6.4)$$

Вращения и дилатации обуславливают сохранение и инвариантность относительно формы контура S моментных интегралов вида

$$I[z] = N + iM = \frac{i\mu}{2} \oint_S z (\gamma_{13} - i\gamma_{23})^2 dz. \quad (6.5)$$

Как известно, формула (6.4) получена и другим путем [10] как пример инвариантного интеграла первого рода. Существование инвариантов, связанных с группами вращений и дилатаций в трехмерной и плоской теории упругости, установлено в [11]. Формула (6.5) конкретизирует их вид для антиплоской задачи. А общие выражения (6.1)–(6.3) определяют величины, сохраняющиеся при произвольном конформном преобразовании. Они не сводятся к инвариантным интегралам второго рода [10] и позволяют фиксировать структуру поля деформаций около произвольной точки тела, содержащего линейный дефект (контур дефекта по определению свободны от внешних сил, поэтому логарифмические особенности не возникают). Опуская понятные рассуждения, запишем окончательный результат для случая, когда контур S охватывает одну особую точку поля $(\gamma_{13} - i\gamma_{23})^2$ с аффиксом $z = z_0$:

$$(\gamma_{13} - i\gamma_{23})^2 = f(z) - \frac{1}{\mu\pi} \sum_{k=1}^{\infty} I_k (z - z_0)^{-k}, \quad I_{k+1} \equiv I[(z - z_0)^k] \quad (6.6)$$

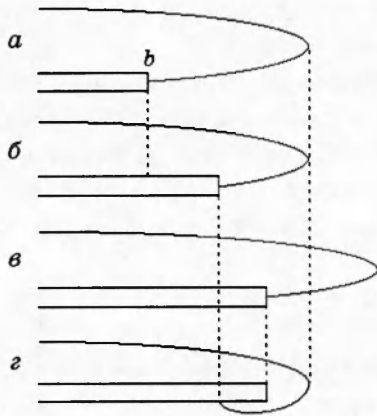


Рис. 4

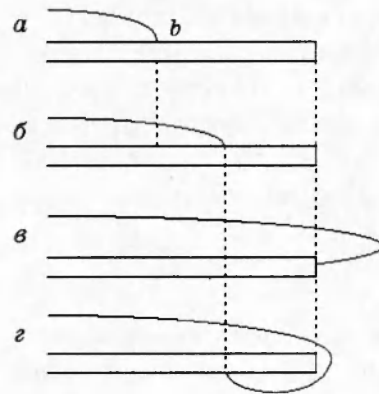


Рис. 5

($f(z)$ — правильная часть квадрата деформаций в окрестности z_0).

Какие заключения можно сделать относительно поля деформаций исходя из разложения (6.6)? В общем случае при извлечении квадратного корня получается довольно сложное и бесполезное выражение. Рассмотрим наиболее важный частный случай, возникающий из двух ограничений:

- 1) равенства будем понимать в асимптотическом смысле;
- 2) ограничимся линейными дефектами, в окрестности которых смещения конечны, а энергия интегрируема.

В этом случае главная часть выражения (6.6) содержит только один член, который однозначно фиксирует асимптотику деформаций в виде

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} \cong \pm i \sqrt{\frac{J_1 - iJ_2}{\pi\mu(z - z_0)}}. \quad (6.7)$$

Таким образом, равенство (6.7) устанавливает общую форму асимптотического распределения деформаций около вершины линейного дефекта, соответствующую вариационной симметрии уравнений относительно пространственных сдвигов. В частности, асимптотики для трещины (4.1) и жесткого включения (4.3) совпадают с общей формой. Асимптотики с другими особенностями, например (4.7) и (4.8), несовместимы с вариационными симметриями (6.1)–(6.3). Приходим к противоречию.

7. Вариант решения парадокса. Общий случай решений (2.6) и (3.3), когда $b \neq 1$, $a \neq -1$, удовлетворяет требованиям вариационной симметрии, так как асимптотики в вершинах дефектов совпадают с выражением (6.7). Парадоксальные свойства поля (5.1) обусловлены тем, что оно соответствует особому состоянию мгновенной перестройки решения (2.6) с асимптотикой для трещин (4.1) в решение (3.3) с асимптотикой для жестких включений (4.3) в гипотетическом процессе непрерывного изменения длины ребра в момент, когда $b = -a = 1$. Отвлекаясь от формального анализа этой особенности, определим, возможна ли реализация состояния (5.1) в условиях ограниченной прочности материала. Ответ на этот вопрос отрицательный.

Предположим, что некоторый гипотетический процесс, как сказано, обеспечивает возможность непрерывного изменения длины армирующего ребра в границах применимости решения (2.6). Рассмотрим для определенности абсолютно жесткое ребро в окрестности правой вершины дефекта (рис. 4, а). С ростом параметра b (рис. 4, б) неограниченно увеличивается и значение k_3 по формуле (4.2). Когда оно достигает некоторого критического уровня k_{3c} , реализуется один из двух вариантов: либо начнется медленный устойчивый

рост трещины, если прочность основного материала достаточно мала по сравнению с адгезионной прочностью (рис. 4, в), либо произойдет отрыв ребра от основного материала при противоположном соотношении этих параметров (рис. 4, з). Аналогичная картина возникает и для решения (3.3). Медленный рост трещины (в некотором гипотетическом процессе) на верхнем берегу (рис. 5, а, б) заканчивается при достижении параметром b в асимптотике (4.6) уровня адгезионной прочности. Быстрый закритический рост этой трещины приводит к достижению одного из двух новых устойчивых состояний (рис. 5, в, г), подобных указанным на рис. 4, в, з.

Таким образом, в условиях ограниченной прочности состояние (5.1) не может быть достигнуто ни из решения (2.6), ни из решения (3.3), так как соответствует закритической фазе хрупкой трещины. Конфигурации дефекта, приведенные на рис. 5, а, б, неустойчивы. При $b \rightarrow 1$ они переходят в другие формы, показанные на рис. 4, в, з и 5, в, г. Решения типа (5.1) могут использоваться только для оценки поля деформаций вдали от близких вершин дефекта и ребра. Но их можно применять и для оценки коэффициента интенсивности из сравнения с асимптотикой в ближней зоне. Например, для абсолютно жесткого ребра и правых вершин имеем следующие асимптотики:

$$\gamma_{13} - i\gamma_{23} = \begin{cases} \frac{1-i}{4\sqrt[4]{2}} (\gamma_{13}^0 + \gamma_{23}^0) \zeta^{-3/4} + \frac{3(1+i)}{4\sqrt[4]{8}} (\gamma_{13}^0 - \gamma_{23}^0) \zeta^{-1/4} & ((1-b) \ll \zeta \ll 1), \\ -\frac{i(1-b)^{-1/4}}{2\sqrt[4]{2}} (\gamma_{13}^0 + \gamma_{23}^0) \zeta^{-1/2} & (\zeta \ll (1-b)). \end{cases}$$

Значение коэффициента интенсивности напряжения можно получить, выполняя сопряжение этих асимптотик тем или иным известным способом.

8. Выводы.

1. Рассмотрен ряд смешанных задач теории трещин продольного сдвига, восходящих к задаче о плоскости с одним прямолинейным разрезом, часть нижнего берега которого армирована упругим ребром (1.1).

2. Решение соответствующей краевой задачи (1.3) построено с помощью специального приема, состоящего в диагонализации матрицы коэффициентов ортогональной аналитической матрицей (2.2), которая, в свою очередь, определяется из вспомогательной краевой задачи с условием (2.3).

3. Сформулирована эквивалентная задача о жестком включении, и построено ее точное решение (3.3).

4. Точное решение задачи (2.6) имеет три вида асимптотических выражений для деформаций (4.1), (4.4), (4.7). Отмечены основные свойства этих соотношений.

5. Подробно рассмотрен пример основной смешанной задачи, решение которой (5.1) имеет только один вид асимптотических выражений (4.7), (4.8).

6. Из анализа вариационных симметрий лагранжиана антиплоских деформаций (6.1) построен общий вид асимптотического выражения деформаций, обусловленный группой пространственных сдвигов (6.7). Сформулирован парадокс основной смешанной задачи. Предложен вариант его решения, основанный на том, что парадоксальные решения не могут быть реализованы в условиях ограниченной точности.

Работа выполнена при поддержке региональной программы «Ресурсосберегающие технологии и приборы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Механика разрушения и прочность материалов / Справ. пособие. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988.

2. **Справочник** по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
3. **Шереметьев М. П.** Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960.
4. **Савин Г. Н., Тульчий В. И.** Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев: Наук. думка, 1971.
5. **Храпков А. А.** Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. № 4. С. 677–689.
6. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1979.
7. **Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г.** Взаимодействие жестких включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983.
8. **Олвер П.** Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
9. **Olver P. J.** Conservation laws in elasticity. II. Linear homogeneous isotropic elastostatics // Arch. Rad. Mech. Anal. 1984. V. 85, N 2. P. 131–160.
10. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983.
11. **Knowles J. K., Sternberg E.** On a class conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rad. Mech. Anal. 1972. V. 44, N 4. P. 187–211.

Поступила в редакцию 8/VIII 1996 г.
