УДК 53.082.531, 53.082.532, 519.6

О численном решении прямой задачи рассеяния Захарова–Шабата*

Н.И. Горбенко[1,2], В.П. Ильин[1,2], А.М. Крылов[1], Л.Л. Фрумин[2,3]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

[3]Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Коптюга, 1, Новосибирск, 630090

E-mails: gorbenko@gmail.com (Горбенко Н.И.), ilin@sscc.ru (Ильин В.П.), a.krylov2@alumni.nsu.ru (Крылов А.М.), lfrumin@yandex.ru (Фрумин Л.Л.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 13, 2020.

Горбенко Н.И., Ильин В.П., Крылов А.М., Фрумин Л.Л. О численном решении прямой задачи рассеяния Захарова–Шабата // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 2. — С. 117–125.

Рассмотрено численное решение прямой задачи рассеяния для системы уравнений Захарова–Шабата. На основе тождества Марчука предложен метод четвертого порядка точности аппроксимации. Проведено численное моделирование задачи рассеяния на примере двух характерных краевых задач с известными решениями. Расчеты подтвердили высокую точность предложенного алгоритма, необходимую в ряде практических приложений для оптического и акустического зондирования сред в прикладной оптике и геофизике.

DOI: 10.15372/SJNM20200201

Ключевые слова: *прямая задача рассеяния, схема четвертого порядка, тождество Марчука.*

Gorbenko N.I., Il’in V.P., Krylov A.M., Frumin L.L. The numerical solution of the direct Zakharov–Shabat scattering problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 2. — P. 117–125.

The numerical solution of the direct scattering problem for a system of the Zakharov–Shabat equations is considered. Based on the Marchuk identity, a fourth order method of approximation accuracy is proposed. The numerical simulation of the scattering problem is carried out using an example of two characteristic boundary value problems with known solutions. The calculations have confirmed high accuracy of the algorithm proposed, which is necessary in a number of practical applications for optical and acoustic sensing of media in optics and geophysics applied.

Keywords: *direct scattering problem, fourth order difference scheme, Marchuk identity.*

1. Введение

Прямая задача рассеяния в математической физике описывает рассеяние волн на заданной рассеивающей структуре [1]. Распространение волн обычно описывается уравне-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-29-15122 офи-м), РНФ (проект № 17-72-30006), Министерства науки и образования РФ (проект № 1201364502 (ЛЛФ)).

нием Гельмгольца или его специальными вариантами, в частности уравнениями связанных мод, которые в последние годы принято называть уравнениями Захарова–Шабата. Задачи рассеяния как прямая, так и обратная, когда по спектру рассеяния находится информация о рассеивающей структуре, имеют широкое применение во многих прикладных задачах акустического и электромагнитного зондирования сред в геофизике и в прикладной оптике.

Практическая значимость приложений задач рассеяния (в частности для моделирования волоконно-оптических сред) стимулирует совершенствование и развитие их методов решения. Одной из наиболее актуальных проблем в этой области является повышение точности решения задач рассеяния [2].

Уравнения Захарова–Шабата представляют собой систему двух связанных дифференциальных уравнений первого порядка, к которым сводится уравнение Гельмгольца в резонансном приближении для случая слабой модуляции среды, когда в каждой точке пространства можно выделить падающую и рассеянную волны [3]. Целью настоящей работы является разработка алгоритма четвертого порядка точности для решения прямой задачи рассеяния для уравнений Захарова–Шабата.

В работе [4] был предложен численный метод решения одномерной прямой задачи рассеяния для уравнений Захарова–Шабата (УЗШ), основанный на сведении их к интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко и обеспечивающий второй порядок точности по шагу h аппроксимации исходной задачи на равномерной сетке.

Содержание данной работы заключается в построении и исследовании для этой же задачи консервативной разностной схемы четвертого порядка точности. При рассматриваемых различных краевых условиях (Дирихле, Неймана, Робена, Ньютона или периодического типа) конструирование сеточных уравнений осуществляется с помощью аппроксимации интегрального тождества Марчука [5, 6] на равномерной сетке. Отметим, что аппроксимации четвертого порядка можно также построить с помощью методов конечных элементов или разрывных алгоритмов Галеркина, однако получаемые при этом схемы не являются компактными [6].

Работа организована следующим образом. В пункте 2 дана схема построения рассматриваемых сеточных аппроксимаций, а п. 3 посвящен экспериментальному исследованию численных погрешностей предложенного алгоритма для двух характерных примеров с известными аналитическими решениями.

2. Разностная схема четвертого порядка

Рассмотрим одномерную задачу рассеяния на интервале $x \in [a, b]$, в которой входящая волна с амплитудой $a_1(x)$ порождает отраженную волну $a_2(x)$, причем их амплитуды удовлетворяют следующей комплексной системе УЗШ [4]:

$$\frac{da_1}{dx} + i\omega a_1 = q(x)a_2, \qquad \frac{da_2}{dx} - i\omega a_2 = \pm q^*(x)a_1. \tag{1}$$

Здесь ω есть пространственная частота, коэффициент связи $q(x)$ представляет собой комплексный потенциал, а знак * означает комплексное сопряжение. Граничные условия для приходящей слева волны и для отраженной волны на правом конце интервала имеют вид:

$$a_1(a) = 1, \qquad a_2(b) = 0, \tag{2}$$

а коэффициенты отражения и пропускания при этом выражаются как

$$R = a_2(a) \quad \text{и} \quad D = a_1(b) \tag{3}$$

соответственно.

Прямая задача рассеяния заключается в определении комплексного коэффициента отражения $R = R(\omega)$ при заданном потенциале $q(x)$. Подставляя $a_1(x)$ из второго уравнения системы (1) в первое, получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{q^*}\frac{da_2}{dx} + \left[q + i\omega\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q^*}\right) \pm \frac{\omega^2}{q^*}\right]a_2 = 0, \tag{4}$$

краевые условия для которого имеют вид

$$\frac{da_2}{dx} - i\omega a_2 \mid_{x=a} = \pm q^*(a), \qquad a_2(b) = 0. \tag{5}$$

Аналогичным образом, исключая из системы (1) функцию a_2, можно получить смешанную краевую задачу для амплитуды $a_1(x)$. Поскольку комплексное уравнение путем введения новых неизвестных функций может быть сведено к системе двух вещественных уравнений, мы рассмотрим краевую задачу следующего вида:

$$\begin{gathered}
-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + r(x)u = f(x), \quad x \in (a,b), \; p(x) > 0, \\
(-s_a u' + t_a u)\mid_a = g_a, \qquad s_a \geq 0, \; t_a \geq 0, \; s_a + t_a > 0, \\
(s_b u' + t_b u)\mid_b = g_b, \qquad s_b \geq 0, \; t_b \geq 0, \; s_b + t_b > 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Сравнение коэффициентов уравнений (4) и (6) устанавливает соотношения: $u(x) = a_2$, $p(x) = (q^*)^{-1}$, $f(x) = 0$, $c_b = 0$ и другие связи между $r(x)$, q и ω, т.е. постановка (6) включает полностью формулировку задачи рассеяния в виде УЗШ (1). Предполагая, что комплексные в общем случае функции $p(x)$, $r(x)$, $f(x)$ и решение $u(x)$ краевой задачи (6) обладают гладкостью, необходимой для построения дальнейших аппроксимаций, рассмотрим применение интегрального тождества Марчука [5] на равномерной сетке:

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{L}{N+1}, \; L = b - a, \; i = 0, 1, \ldots, N+1.$$

Интегрируя уравнение (6) в пределах $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, где $x_{i\pm1/2} = (x_i + x_{i\pm1})/2$, получаем соотношение баланса:

$$J_{i+1/2} - J_{i-1/2} + \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (r\,u - f)\,dx = 0, \quad J = -p(x)\frac{du}{dx}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Здесь введены обозначения для потоков $J_{i\pm1/2} = J(x_{i\pm1/2})$. Выражая теперь значения $J_{i-i/2}$ и $J_{i+1/2}$ в (7) через соответствующие функции, приходим к интегральному тождеству Марчука [6]:

$$\begin{aligned}
-\frac{u_{i+1} - u_i}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p}} + \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (r\,u - f)\,dx = \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p}\right)^{-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p} \int\limits_{x}^{x_{i+1/2}} (r\,u - f)\,dx' + \\
\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p}\right)^{-1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x} (r\,u - f)\,dx'.
\end{aligned} \tag{8}$$

Интеграл от достаточно гладкой функции $f(x)$ по интервалу $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f\,dx = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Big(f_i + (x - x_i)f_i' + \frac{(x-x_i)^2}{2} f_i'' + \frac{(x-x_i)^3}{6} f_i'''\Big)\,dx + O\big(h^5\big).$$

Аналогично для двойного интеграла в правой части (8) с помощью квадратурной формулы Симпсона [7] получаем

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p} \int\limits_{x}^{x_{i+1/2}} f\,dx = \frac{h}{6}\left(\frac{1}{p_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}} f\,dx + \frac{1}{p_{i+1}}\int\limits_{x_{i+1}}^{x_{i+1/2}} f\,dx\right) + O\big(h^5\big).$$

Далее с помощью конечно-разностных аппроксимаций производных

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O\big(h^2\big), \qquad f_i'' = \frac{\big(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\big)}{h^2} + O\big(h^2\big) \tag{9}$$

получаем следующие квадратурные формулы:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}} f\,dx = \frac{h}{24}\big(-f_{i-1} + 11f_i + 2f_{i+1}\big) + O\big(h^4\big),$$

$$\int\limits_{x_{i+1}}^{x_{i+1/2}} f\,dx = \frac{h}{24}\big(f_{i-1} - 5f_i - 8f_{i+1}\big) + O\big(h^4\big),$$

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f\,dx = \frac{h}{24}\big(f_{i-1} + 22f_i + f_{i+1}\big) + O\big(h^5\big).$$

Такие же выражения можно записать и для подынтегральной функции ru. По формуле Симпсона для интегралов в знаменателях формулы (8) мы можем записать следующие представления:

$$\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p}\right)^{-1} = \frac{\bar p_{i+1/2}}{h} + O\big(h^5\big), \qquad \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p}\right)^{-1} = \frac{\bar p_{i-1/2}}{h} + O\big(h^5\big),$$

$$\bar p_{i\pm1/2} = \left[\frac{p_i^{-1} + 4p_{i\pm1/2}^{-1} + p_{i\pm1}^{-1}}{6}\right]^{-1}.$$

Подставляя полученные соотношения в интегральное тождество Марчука (8) и отбрасывая остаточные малые члены, получаем следующее трехточечное сеточное уравнение:

$$\bar p_{i+1/2}(u_i - u_{i+1}) + \bar p_{i-1/2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{h^2}{24}\big(\varphi_{i-1} + 22\varphi_i + \varphi_{i+1}\big)$$
$$= \bar p_{i+1/2}\frac{h^2}{144}\left[\frac{1}{p_i}\big(-\varphi_{i-1} + 11\varphi_i + 2\varphi_{i+1}\big) + \frac{1}{p_{i+1}}\big(\varphi_{i-1} - 5\varphi_i - 8\varphi_{i+1}\big)\right] +$$

$$\bar{p}_{i-1/2}\frac{h^2}{144}\left[\frac{1}{p_{i-1}}\big(-8\varphi_{i-1}-5\varphi_i+\varphi_{i+1}\big)+\frac{1}{p_i}\big(2\varphi_{i-1}+11\varphi_i-\varphi_{i+1}\big)\right], \qquad (10)$$

где используется обозначение $\varphi_i = r_i u_i - f_i$.

Рассмотрим далее аппроксимацию 4-го порядка условий третьего рода (6). В окрестности левой границы мы можем записать

$$-\int\limits_{x_0}^{x_1} u'\,dx = u_0 - u_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} J\frac{dx}{p} = \frac{h}{6}\left(\frac{J_0}{p_0} + 4\frac{J_{1/2}}{p_{1/2}} + \frac{J_1}{p_1}\right) + O\big(h^5\big).$$

Отсюда с помощью простых преобразований имеем

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 - h\bar{p}_{1/2}^{-1}J_0 &= \left[4p_{1/2}^{-1}\big(J_{1/2}-J_0\big) + p_1^{-1}\big(J_1-J_0\big)\right]\frac{h}{6} + O\big(h^5\big) \\ &= \left[4p_{1/2}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x_{1/2}}\varphi\,dx + p_1^{-1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi\,dx\right]\frac{h}{6} + O\big(h^5\big), \\ \varphi = ru - f, &\quad \bar{p}_{1/2}^{-1} = \frac{p_0^{-1} + 4p_{1/2}^{-1} + p_1^{-1}}{6}. \end{aligned} \qquad (11)$$

С помощью конечно-разностных аппроксимаций производных типа (9) и формул

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{h}{2}\varphi_0' + \frac{h^2}{6}\varphi_0'' + O\big(h^3\big), \qquad \varphi_0' = \frac{4\varphi_1 - 3\varphi_0 - \varphi_2}{2h} + O\big(h^3\big)$$

можно получить следующие квадратурные формулы:

$$\int\limits_{x_0}^{x_{1/2}}\varphi\,dx = \frac{h}{24}\big(8\varphi_0 + 5\varphi_1 - \varphi_2\big) + O\big(h^4\big), \qquad \int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi\,dx = \frac{h}{12}\big(5\varphi_0 + 8\varphi_1 - \varphi_2\big) + O\big(h^4\big).$$

Подставляя данные выражения в уравнение (11) и учитывая очевидное равенство $J_0 = p_0\big(g_a - t_a u_0\big)_a$, приходим к итоговому соотношению на левой границе

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 - h\bar{p}_{1/2}^{-1}p_0\frac{g_a - t_a u_0}{s_a} = &\frac{h^2}{36p_{1/2}}\big(8\varphi_0 - 5\varphi_1 - \varphi_2\big) + \\ &\frac{h^2}{72p_1}\big(5\varphi_0 + 8\varphi_1 - \varphi_2\big) + O\big(h^5\big). \end{aligned} \qquad (12)$$

Аналогично для граничного условия на правой границе $x = b$ имеем следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} u_{N+1} - u_N + hp_{N+1/2}^{-1}p_{N+1}\frac{g_b - t_b u_{N+1}}{s_b} = &\frac{h^2}{36}p_{N+1/2}^{-1}\big(8\varphi_{N+1} + 5\varphi_N - \varphi_{N-1}\big) + \\ &\frac{h}{72}p_N^{-1}\big(5\varphi_{N+1} + 8\varphi_N - \varphi_{N-1}\big) + 0\big(h^5\big). \end{aligned} \qquad (13)$$

Таким образом, итоговая трехточечная сеточная система уравнений после отбрасывания малых остаточных членов представляется граничными соотношениями (12), (13) и уравнениями во внутренних узлах

$$-a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} = F_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{14}$$

где коэффициенты и правая часть описываются следующими формулами:

$$a_i = -\bar{p}_{i-1/2} - \frac{h^2}{24} r_{i-1} - \bar{p}_{i+1/2}\frac{h^2}{144} r_{i-1}\left(\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{p_i}\right) - \bar{p}_{i-1/2}\frac{h^2}{144} r_{i-1}\left(\frac{2}{p_i} - \frac{8}{p_{i-1}}\right),$$

$$b_i = \bar{p}_{i+1/2} + \bar{p}_{i-1/2} + \frac{22h^2}{24} r_i - \bar{p}_{i+1/2}\frac{h^2}{144} r_i\left(\frac{11}{p_i} - \frac{5}{p_{i+1}}\right) - \bar{p}_{i-1/2}\frac{h^2}{144} r_i\left(\frac{11}{p_i} - \frac{5}{p_{i-1}}\right),$$

$$c_i = -\bar{p}_{i+1/2} + \frac{h^2}{24} r_{i+1} - \bar{p}_{i+1/2}\frac{h^2}{144} r_{i+1}\left(\frac{2}{p_i} - \frac{8}{p_{i+1}}\right) - \bar{p}_{i-1/2}\frac{h^2}{144} r_{i+1}\left(\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i}\right),$$

$$\begin{aligned}F_i = {}& \frac{h^2}{24}\Big(f_{i-1} + 22f_i + f_{i+1}\Big) - \\ & \bar{p}_{i+1/2}\frac{h^2}{144}\left[\frac{1}{p_i}\big(-f_{i-1} + 11f_i + 2f_{i+1}\big) + \frac{1}{p_{i+1}}\big(f_{i-1} - 5f_i - 8f_{i+1}\big)\right] + \\ & \bar{p}_{i-1/2}\frac{h^2}{144}\left[\frac{1}{p_{i-1}}\big(-8f_{i-1} - 5f_i + f_{i+1}\big) + \frac{1}{p_i}\big(2f_{i-1} + 11f_i - 1f_{i+1}\big)\right].\end{aligned}$$

Практический интерес представляют также краевые задачи с условием периодичности

$$u(x) = u(x + L), \quad L = b - a,$$

аппроксимация которых производится аналогично тому, как это делается при условиях Дирихле. Действительно, в этом случае для всех i должны выполняться соотношения $u_i = u_{i+N+1}$. В частности, мы можем положить $u_0 = u_{N+1} = \upsilon$ с неопределенной пока величиной υ. Принимая ее за условия 1-го рода для "редуцированной" системы уравнений (14), находим компоненты "полного" решения $\tilde{u}_i$, представляемые из принципа суперпозиции в виде:

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i^0 + \upsilon \tilde{u}_i^{(1)}, \quad \tilde{u}_i = \tilde{u}_{i+N+1}, \tag{15}$$

где $\tilde{u}_i^{(0)}$ и $\tilde{u}_i^{(1)}$ суть частные решения подсистемы (14), получаемые при значениях $\upsilon = 0$ и $\upsilon = 1$ соответственно. После их вычисления величина υ находится с учетом представления (14) из уравнения

$$-a_i \tilde{u}_{i-1} + b_i \tilde{u}_i - c_i \tilde{u}_{i+1} = F_i$$

при любом значении $i = 1, \dots, N$, в результате чего итоговое решение определяется опять же из (14) с учетом равенств $u_i = \tilde{u}_i$.

Можно показать, что при $r = 0$ равномерная ошибка сеточного решения построенных дискретных уравнений будет величиной $\delta = O\big(h^4\big)$, поскольку в данном случае системы сеточных уравнений являются положительного типа, для которых применимы приведенные в [8] теоремы о сходимости. В общем случае доказательство этого требует специальных исследований, и мы ограничиваемся экспериментальным анализом сходимости в следующем пункте.

3. Примеры численных экспериментов

Для проверки точности полученной схемы приведем результаты численных экспериментов для двух характерных примеров с известными аналитическими решениями. Исследование свойств алгоритмов проводилось в широком диапазоне частот ω на равномерных сетках с числами шагов $N = 8, 16, 32, 64$. Все расчеты проводились со стандартной двойной точностью. Сначала рассмотрим модельную задачу с полиномиальным решением $a_2 = x^6 + 1$ на интервале $[0, 1]$, для которой уравнение (4) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{d}{dx}\frac{da_2}{dx} + \omega^2 a_2 = 30x^4 + \omega^2\big(x^6 + 1\big). \tag{16}$$

При этом краевые условия (5) определим как

$$\frac{da_2}{dx}\,|_{x=0} = 0, \quad a_2(1) = 2. \tag{17}$$

В таблице 1 приведена зависимость абсолютной разницы (ошибки) между аналитическим и точным решениями задачи (16), (17) ($\delta = \max_i\{|a_2(x_i) - u_i|\}$) от числа узлов сетки для разных значений ω. Как видно из таблицы, погрешность численного решения при всех рассматриваемых частотах является величиной порядка $O\big(h^4\big)$. Отметим, что если точное решение задачи есть полином не выше 4-го порядка, то погрешность численного решения равна нулю при любом конечном шаге сетки.

Таблица 1. Зависимость ошибки δ от числа узлов сетки и условий задачи

ω \ N	8	16	32	64
-400	$5.77e{-}05$	$8.18e{-}07$	$1.26e{-}08$	$1.96e{-}10$
-200	$5.35e{-}05$	$8.10e{-}07$	$1.25e{-}08$	$1.96e{-}10$
0	$5.14e{-}05$	$8.04e{-}07$	$1.25e{-}08$	$1.96e{-}10$
200	$5.03e{-}05$	$7.99e{-}07$	$1.25e{-}08$	$1.96e{-}10$
400	$4.95e{-}05$	$7.94e{-}07$	$1.25e{-}08$	$1.96e{-}10$

Далее рассмотрим задачу рассеяния света на волоконно-оптической брэгговской решетке (ВБР) с меняющейся вдоль решетки частотой основного тона, а также с изменяющимся уровнем модуляции показателя преломления (ВБР с чирпом и аподизацией). В качестве точного решения задачи (4), (5) была выбрана функция (19), которая рассматривалась в работах [2, 3]. Определяющий аналитическое решение комплексный коэффициент связи мод $q(x)$ представляет собой сочетание нелинейного чирпа (чирпом называют изменение частоты основного тона решетки) и аподизации, когда модуляция решетки имеет заметную амплитуду не на всей решетке, а только на ограниченном ее участке:

$$q(x) = \frac{Q}{\Lambda}\left(\operatorname{sech}\frac{x}{\Lambda}\right)^{1-2iF}, \quad 0 \le x \le L, \tag{18}$$

где i есть мнимая единица, Q — амплитуда модуляции, F — параметр нелинейного чирпа, Λ — полуширина области аподизации, а $L = b - a$ есть размер решетки. Комплексный спектр отражения данной решетки представляется в следующем виде:

$$R(\omega) = -2^{-2iF} Q \frac{\Gamma(d_+)\Gamma(f_-)\Gamma(f_+)}{\Gamma(d_-)\Gamma(g_-)\Gamma(g_+)}, \tag{19}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, а ее аргументы находятся по формулам:

$$d_\pm = \frac{1}{2} \pm i[\omega\Lambda - F], \quad f_\pm = \frac{1}{2} - i[\omega\Lambda \pm S], \quad g_\pm = \frac{1}{2} - i[F \pm S], \quad S = \sqrt{F^2 + Q^2}.$$

Для оценки погрешности численного решения такой задачи сравним численные решения, полученные на сравнительно небольшом числе узлов сетки, с решением при существенно большем числе узлов — в рамках данного раздела назовем его точным. В качестве такого точного решения будет выступать численное решение, полученное на $32 \cdot 10^3$ узлах. В таблице 2 приведена зависимость между абсолютной разницей точного и численного решения (погрешность) на разном числе узлов сетки и для разных параметров ω.

Таблица 2. Зависимость погрешности от числа узлов сетки и условий задачи

ω \ N	1024	2048	4096	8192
-400	0.01	$6.8e{-}04$	$4.30e{-}05$	$2.71e{-}06$
-200	$5.6e{-}04$	$3.45e{-}05$	$1.75e{-}06$	$2.96e{-}07$
0	$2.03e{-}06$	$1.32e{-}07$	$8.45e{-}09$	$5.34e{-}10$
200	$4.9e{-}04$	$3.08e{-}05$	$2.14e{-}06$	$3.47e{-}07$
400	0.01	$6.5e{-}04$	$4.09e{-}05$	$2.50e{-}06$

В качестве параметров решетки использовались следующие значения:

$$Q = 2, \quad F = 1.5, \quad \Lambda = \frac{1}{25}, \quad L = 1.$$

Как видно из таблиц 1 и 2, данная схема имеет четвертый порядок точности как на простых модельных, так и на сложных задачах рассеяния.

4. Заключение

В работе рассмотрено численное решение прямой задачи рассеяния для системы уравнений Захарова–Шабата. На основе тождества Марчука предложен метод высокого (четвертого) порядка точности с аппроксимацией различных типов краевых условий. Проведено численное моделирование процессов рассеяния на примере двух точных решений задачи. Расчеты подтвердили высокую точность и экономичность предложенного алгоритма, что является актуальным в реальных практических приложениях для акустического и оптического зондирования сред.

Литература

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. 2-е изд. — М.: Наука, 1973.
2. **Горбенко Н.И., Ильин В.П., Фрумин Л.Л.** Расчет рассеяния света на брэгговской решетке рекурсией трансфер-матриц на неравномерной сетке // Автометрия. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 40–50.

3. **Белай О.В., Подивилов Е.В., Фрумин Л.Л., Шапиро Д.А.** Устойчивость численного восстановления волоконных брэгговских решеток // Оптика и спектроскопия. — 2008. — Т. 105, № 1. — С. 114–121.
4. **Frumin L.L., Belay O.V., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem // J. Oct. Soc. Am. — 2015. — Vol. 32, № 2. — P. 209–295.
5. **Марчук Г.И.** Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1958.
6. **Ильин В.П.** Математическое моделирование. Часть 1. Непрерывные и дискретные модели. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017.
7. **Ильин В.П.** Численный анализ. Часть 1. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
8. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 29 мая 2019 г.
После исправления 24 октября 2019 г.
Принята к печати 19 декабря 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Brekhovskikh L.M.** Volny v sloistykh sredakh. 2-e izd. — M.: Nauka, 1973.
2. **Gorbenko N.I., Il'in V.P., Frumin L.L.** Raschet rasseyaniya sveta na breggovskoi reshetke rekursiei transfer-matrits na neravnomernoi setke // Avtometriya. — 2019. — T. 55, № 1. — S. 40–50.
3. **Belai O.V., Podivilov E.V., Frumin L.L., Shapiro D.A.** Ustoichivost' chislennogo vosstanovleniya volokonnykh breggovskikh reshetok // Optika i spektroskopiya. — 2008. — T. 105, № 1. — S. 114–121.
4. **Frumin L.L., Belay O.V., Podivilov E.V., Shapiro D.A.** Efficient numerical method for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem // J. Oct. Soc. Am. — 2015. — Vol. 32, № 2. — P. 209–295.
5. **Marchuk G.I.** Metody rascheta yadernykh reaktorov. — M.: Atomizdat, 1958.
6. **Il'in V.P.** Matematicheskoe modelirovanie. Chast' 1. Nepreryvnye i diskretnye modeli. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2017.
7. **Il'in V.P.** Chislennyi analiz. Chast' 1. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2005.
8. **Il'in V.P.** Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob"emov dlya ellipticheskikh uravnenii. — Novosibirsk: Izd-vo IM SO RAN, 2000.