УДК 532.5.031+532.582.33+519.64

К ПРОБЛЕМЕ ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Н. Белых

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: belykh@math.nsc.ru

На основе фундаментальных математических идей К. И. Бабенко разработаны принципиально новые — ненасыщаемые — алгоритмы численного решения задач осесимметричного обтекания потенциальным потоком идеальной жидкости тел вращения, в частности эллипсоида вращения с удлинением, равным 1000.

Ключевые слова: задача обтекания, тело вращения, внешняя задача Неймана, ненасыщаемый численный алгоритм, экспоненциальная сходимость.

Одной из немногих гидродинамических задач, рассматриваемых во всех учебниках гидродинамики, является задача обтекания тел безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Несмотря на то что теория указанных задач разработана давно и приобрела канонический характер (внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа), ряд практически важных вопросов остается нерешенным. Так, до настоящего времени имеется существенный пробел в решении численными методами задачи обтекания трехмерных тел большого удлинения. Между тем развитие науки и техники делает необходимым именно численное изучение пространственных течений жидкости. При этом наиболее сложны для анализа те разделы гидродинамики, в которых внешняя задача Неймана возникает в качестве важного промежуточного этапа и именно от тщательности ее численного решения зависит корректность исследования всей гидродинамической задачи (например, в случае задач, описываемых уравнениями пограничного слоя [1]).

Ситуации, когда возникает внешняя задача Неймана, столь разнообразны, что далеко не каждый численный метод представляет практический интерес: при переходе от двумерного анализа к трехмерному увеличивается не только количество переменных, но и объем обрабатываемой числовой информации, а значит, и время работы численного алгоритма. Избежать этих трудностей можно единственным путем — используя более совершенные способы дискретизаций рассматриваемых задач [2]. Поскольку теория приближения функций на гладких многообразиях, гомеоморфных двумерной сфере, пока не создана, для преодоления трудностей компьютерной реализации указанных задач в случае трехмерного тела произвольной формы необходимо проведение дополнительных исследований. Достаточно просто задача решается лишь в случае обтекания осесимметричных тел [3]. Для осесимметричных тел большого удлинения прецизионных численных алгоритмов до сих пор не существует, поэтому цикл исследований [3–5], выполненных автором данной ра-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00250), а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-9019.2006.1).

боты, а также полученные им численные результаты оказываются в известном смысле пионерскими.

Одним из наиболее ярких теоретических достижений вычислительной математики последних 30 лет является разработка принципиально новых — ненасыщаемых — численных алгоритмов [2]. С ростом запаса гладкости отыскиваемых решений вычислительный процесс, определяемый ненасыщаемым алгоритмом, самосовершенствуется и достигает пика своей эффективности — экспоненциальной сходимости — на классах задач с C^∞-гладкими решениями [5]. В результате информация об экстраординарных запасах гладкости, например о бесконечной дифференцируемости и аналитичности, становится весьма существенной. Это позволяет чрезвычайно экономно конструировать численные решения задач [4], причем в случае C^∞-гладких граничных данных — с экспоненциальной точностью [3].

В данной работе на основе фундаментальных идей К. И. Бабенко [2] построены ненасыщаемые численные алгоритмы, ликвидирующие указанный пробел в решении C^∞-гладких задач осесимметричного обтекания тел вращения большого удлинения.

Не рассматривая подробно возможности ненасыщаемых алгоритмов, ограничимся анализом существенных элементов их конструкции, уделив основное внимание изучению только одного их свойства. Это свойство состоит в том, что конструкция ненасыщаемых алгоритмов изначально включает бесконечное множество численных методов.

Перейдем к формулировке задачи и приведем необходимые определения. Пусть ω — осесимметричная область в пространстве $\mathbb{R}^3$, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью вращения $\partial\omega$, меридиональное сечение которой есть гладкая кривая γ: $[0,1] \to \{r(s), z(s)\}$, $\gamma(s) \in C^\infty[0,1]$. Здесь $r = \sqrt{x^2+y^2}$; z — инварианты группы вращения области ω относительно оси z.

Положение точек $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ на $\partial\omega$ определим локальными координатами (σ, ϕ), (s, v) соответственно:

$$\boldsymbol{\xi} = (\rho\cos\phi,\ \rho\sin\phi,\ \zeta), \qquad \boldsymbol{x} = (r\cos v,\ r\sin v,\ z),$$

$$\rho \equiv \rho(\sigma) = \sqrt{\xi^2+\eta^2}, \qquad \zeta \equiv \zeta(\sigma), \qquad r \equiv r(s) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad z \equiv z(s),$$

$$0 \leqslant \sigma, \qquad s \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \phi, \qquad v < 2\pi,$$

причем точкам $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \in \partial\omega$ соответствуют ортонормированные базисы:

$$\boldsymbol{\xi}\colon \qquad \boldsymbol{e} = \delta^{-1}\boldsymbol{\xi}_\sigma, \quad \boldsymbol{t} = \rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_\phi, \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{t},$$

$$\boldsymbol{x}\colon \qquad \boldsymbol{E} = \Delta^{-1}\boldsymbol{x}_s, \quad \boldsymbol{T} = r^{-1}\boldsymbol{x}_v, \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{T}.$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}_\lambda$, $\boldsymbol{x}_\lambda$ — частные производные векторов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}$ по локальной координате λ; $\delta \equiv |\boldsymbol{\xi}_\sigma| = \sqrt{\rho_\sigma^2 + \zeta_\sigma^2}$; $\Delta \equiv |\boldsymbol{x}_s| = \sqrt{r_s^2 + z_s^2}$.

Под поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^3$ будем подразумевать замкнутую ограниченную поверхность вращения $\partial\omega \in C^\infty$.

Отображение $\partial F/\partial\boldsymbol{x}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, действующее на векторы $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ как линейная форма $(\partial F/\partial\boldsymbol{x})\langle\boldsymbol{c}\rangle = \nabla_{\boldsymbol{x}}F\langle\boldsymbol{c}\rangle$, есть градиент скалярной функции F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Отождествим его с ковектором $\nabla_{\boldsymbol{x}}F$. Прямое значение функции $F(\boldsymbol{x})$ на поверхности $\partial\omega$ (если оно существует) определим равенством, получающимся заменой точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ точкой $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$, т. е. положим $\bar{F}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\omega}$. Для прямого и предельных значений (внутри и вне поверхности $\partial\omega$) производной $\partial F/\partial\boldsymbol{A} = \nabla_{\boldsymbol{x}}F\langle\boldsymbol{A}\rangle$ по направлению вектора $\boldsymbol{A}$ примем соответствующие обозначения: $(A\bar{F})(\boldsymbol{x})$, $(A_+\bar{F})(\boldsymbol{x})$, $(A_-\bar{F})(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$; значения векторного поля $\boldsymbol{A}$ в точках $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ будем указывать соответственно прописными и строчными буквами латинского алфавита: $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})$.

Задача обтекания тела вращения ω с нормалью $\boldsymbol{N}$ в точке $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$ безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости сводится к отысканию потенциала скорости φ —

функции, гармонической вне обтекаемого тела ω. Потенциал φ удовлетворяет граничным условиям $N_-\bar{\varphi}\big|_{\partial\omega} = 0$ на теле и $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi \to \boldsymbol{U}_\infty$ в бесконечности [1]. Без ограничения общности примем $\boldsymbol{U}_\infty \equiv (0, 0, U)$. Рассматриваемое течение жидкости будем считать осесимметричным. Пусть $\Phi = \varphi - Uz$. Тогда

$$\Delta\Phi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega; \qquad N_-\bar{\Phi}\big|_{\partial\omega} = -U\cos(N, z); \qquad \Phi \to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{1}$$

Убывание Φ на бесконечности обеспечивает единственность решения задачи (1). Решение задачи обтекания предполагает также вычисление касательной по направлению $\boldsymbol{E}$ скорости жидкости на поверхности тела, т. е. касательного в точке $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$ граничного градиента решения $\nabla\varphi\langle\boldsymbol{E}\rangle\big|_{\partial\omega} = E_-\bar{\varphi}$ задачи (1), и давления p. При этом давление p (безразмерное) вычисляется из интеграла Бернулли согласно формуле $p = \{1 - [\varphi_r^2 + (1 - \varphi_z)^2]\}/2 + p_\infty$, где p_∞ — давление на бесконечности.

Итак, решение задачи обтекания (1) является частным случаем решения внешней задачи Неймана

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega; \qquad N_-\bar{\Phi}\big|_{\partial\omega} = f(\boldsymbol{x}); \qquad \Phi \to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{2}$$

Функция $f(\boldsymbol{x})$ в цилиндрических координатах (r, z, v) от v не зависит. Следовательно, можно ограничиться решениями $\Phi(\boldsymbol{x})$ задачи (2), зависящими только от инвариантов r, z. Вследствие предполагаемой в дальнейшем достаточной гладкости функции $f(s) \equiv f(r(s), z(s))$ по дуговой координате $s \in [0, 1]$ функция f продолжается четным непрерывным образом с сохранением класса гладкости на отрезок $[1, 2]$, становясь непрерывной периодической с периодом 2 (2-периодической) функцией. В силу шаудеровских оценок решения задачи (2) оказываются настолько гладкими, насколько это позволяет функция $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$.

Введем класс $C[0, 2]$ непрерывных 2-периодических функций, в котором норму обозначим $\|\cdot\|$. Множество четных 2-периодических функций образует в $C[0, 2]$ замкнутое подпространство. Обозначим его $C_+ \equiv C_+[0, 1]$.

В основу численного решения внешней задачи Неймана (2) положим методы теории потенциала [6]: эквивалентное задаче (2) граничное интегральное уравнение является достаточно эффективным средством ее численного решения.

Рассмотрим гармонический потенциал простого слоя $V[\psi](\boldsymbol{x})$ с непрерывной инвариантной относительно вращений $\partial\omega$ плотностью $\psi(\boldsymbol{\xi}) \in C(\partial\omega)$:

$$V[\psi](\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\partial\omega} \frac{\psi(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|}\, d\omega_{\boldsymbol{\xi}}$$

($|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|$ — расстояние между точками $\boldsymbol{\xi} \in \partial\omega$ и $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$).

В случае $\psi(\boldsymbol{\xi}) \in C^{1+\alpha}(\partial\omega)$ $(0 < \alpha < 1)$ потенциал $V[\psi](\boldsymbol{x})$ имеет следующие свойства [6]:

1) всюду вне $\partial\omega$ потенциал $V[\psi](\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению Лапласа и определяет внутри и вне $\partial\omega$ гармонические функции $V^+(\boldsymbol{x})$, $V^-(\boldsymbol{x})$ соответственно;

2) потенциал $V[\psi](\boldsymbol{x})$ непрерывен всюду в $\mathbb{R}^3$, причем $V^+(\boldsymbol{x}) = \bar{V}(\boldsymbol{x}) = V^-(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$;

3) пределы $N_\pm\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x})$ на $\partial\omega$ существуют и являются непрерывными функциями:

$$N_\pm\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x}) = \pm 2\pi\psi(\boldsymbol{x}) + N\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \partial\omega,$$

а оператор $N\bar{V}$ имеет на $\partial\omega$ слабую особенность;

4) пределы $E_\pm\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x})$ на $\partial\omega$ существуют и являются непрерывными функциями, причем

$$E_+\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x}) = E_-\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x}) = E\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \partial\omega.$$

В силу свойства 3 отыскание решения задачи (2) в виде $\Phi(\boldsymbol{x}) = V[\psi](\boldsymbol{x})$ эквивалентно решению граничного интегрального уравнения

$$-2\pi\psi(s) + N\bar{V}[\psi](s) = f(s), \qquad s \in [0,1], \quad \psi, f \in C_+ \tag{3}$$

с компактным в C_+ оператором $N\bar{V}$.

Укажем удобные с точки зрения численной реализации представления операторов $N\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x})$, $\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x})$ и $E\bar{V}[\psi](\boldsymbol{x})$, возникающих при решении задачи обтекания (1).

Рассмотрим полные эллиптические интегралы с модулем α:

$$K(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} (1-\alpha\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta, \qquad E(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} (1-\alpha\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta,$$

$$D(\alpha) = K(\alpha) - E(\alpha)$$

и введем следующие обозначения:

$$h_* \equiv h_*(\sigma,s) = \sqrt{(\rho+r)^2 + (\zeta-z)^2}, \qquad q \equiv q(\sigma,s) = 4\rho r h_*^{-2}.$$

Для $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \in \partial\omega$ справедливо выражение $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}| = h_*[1 - q\cos((\phi-v)/2)]^{1/2}$, причем прямые значения указанных выше интегральных операторов имеют следующий вид:

$$N\bar{V}[\psi](s) = 2r^{-1}\int\limits_0^1 \psi(\sigma)\Big(2\rho r\,\frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}}{\sigma-s}\,E(q) + \rho\Delta^{-1}z_s D(q)\Big)h_*^{-1}\delta\,d\sigma; \tag{4}$$

$$\bar{V}[\psi](s) = 2r^{-1}\int\limits_0^1 [2\rho r\psi(\sigma)]K(q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma; \tag{5}$$

$$E\bar{V}[\psi](s) = 2r^{-1}\int\limits_0^1 2\rho r\,\frac{\psi(\sigma)\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{E} - \psi(s)\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{e}}{\sigma-s}\,E(q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma -$$
$$- 2r^{-1}\int\limits_0^1 [\rho r_s\Delta^{-1}\psi(\sigma) + r\rho_\sigma\delta^{-1}\psi(s)]D(q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma +$$
$$+ 2r^{-1}\int\limits_0^1 [2\psi(s)r\rho_\sigma\delta^{-1}]K(q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma. \tag{6}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{H}(\sigma,s)$ имеет вид

$$\boldsymbol{H}(\sigma,s) = \frac{\boldsymbol{r}(\sigma,s)}{|\boldsymbol{r}(\sigma,s)|^2}, \qquad \boldsymbol{r}(\sigma,s) = \Big[\frac{\rho-r}{\sigma-s},\,\frac{\zeta-z}{\sigma-s}\Big].$$

Представления (4)–(6) имеют следующую общую форму записи:

$$2r^{-1}\int\limits_0^1 F(\sigma,s)\Psi(q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma.$$

Здесь $F(\sigma,s)$ — функция, равномерно непрерывная в области $[0,1]\times[0,1]$; $\Psi(q)$ — полный эллиптический интеграл $K(q)$, $E(q)$ или $D(q)$ с модулем $q \equiv q(\sigma,s)$.

Поскольку q — симметричная функция двух переменных, к способу вычисления полного эллиптического интеграла $\Psi(q)$ предъявляются особые требования.

Теорема 1. *Для любого целого числа $p \geqslant 0$ справедливо разложение*

$$\Psi(q) = -\psi_p^*(q)\ln(1-q) + \Psi_p^*(q).$$

Функции $\psi_p^*(q)$, $\Psi_p^*(q)$ и методы их вычисления указаны в [7].

С учетом данного разложения равенства (4)–(6) записываются в виде

$$2r^{-1}\int\limits_0^1 F(\sigma,s)\Psi_p^*(q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma - 2r^{-1}\int\limits_0^1 F(\sigma,s)\psi_p^*(q)\ln(1-q)h_*^{-1}\delta\,d\sigma. \tag{7}$$

Отметим, что представление (7) не содержит логарифмической особенности в полюсах $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ поверхности вращения $\partial\omega$.

Сложная структура представлений (4)–(6) свидетельствует о характере вычислительных трудностей в осесимметричных задачах по сравнению, например, с плоским случаем. В силу (7) подынтегральные выражения в (4)–(6), с одной стороны, имеют на диагонали $\sigma = s$ "подвижную" логарифмическую особенность, а с другой — в точках s, расположенных вблизи оси симметрии поверхности $\partial\omega$, имеют зоны интенсивного роста — пограничные слои [5]. Распространенная недооценка влияния пограничного слоя на ход вычислений является одним из основных недостатков существующих численных методик решения осесимметричных задач. Общепринятое выделение подвижной логарифмической особенности по правилу $\ln(1-q) = 2\ln|\sigma - s| + A(\sigma,s)$, $\sigma \in (0,1)$, $s \in (0,1)$ оказалось непригодным вблизи оси симметрии, поскольку $A(\sigma,s)$ не является равномерно-непрерывной в области $[0,1]\times[0,1]$ функцией. В связи с этим при использовании для аппроксимации представлений (4)–(6) любых насыщаемых квадратурных формул потери точности оказываются тем больше, чем ближе точка s к оси симметрии поверхности $\partial\omega$. Пограничный слой является неотъемлемой частью всех осесимметричных задач, и преодолеть эту основную вычислительную трудность стандартными численными методами не удается. Между тем вычислительные трудности такого рода вполне естественны для осесимметричных задач, поскольку обусловлены цилиндрической симметрией. Формально они связаны с наличием в (7) весового множителя $h_*^{-1}(\sigma,s)$, оказавшегося универсальной характеристикой роста подынтегральных выражений в (4)–(6) в точках, близких к оси симметрии. Наличие пограничного слоя в этих задачах ранее не учитывалось. Между тем оно оказывает влияние на численную реализацию осесимметричных задач. При этом для получения в них нетривиальных численных результатов необходимо решить целый комплекс математических проблем. В частности, для того чтобы избежать потерь точности, обусловленных подвижной логарифмической особенностью, потребовалось более тщательно учесть эту особенность [3], а для нейтрализации эффектов, связанных с наличием пограничного слоя, был разработан принципиально новый подход [5].

Преобразуем (7) к виду, позволяющему использовать результаты работ [3, 5]. Введем следующие обозначения:

$$R_*^2 \equiv R_*^2(\sigma,s) = \Big(\frac{\rho + r}{\sin(\pi(\sigma+s)/2)}\Big)^2 + \Big(\frac{\zeta - z}{\sin(\pi(\sigma+s)/2)}\Big)^2,$$

$$R^2 \equiv R^2(\sigma,s) = \Big(\frac{\rho - r}{\sin(\pi(\sigma-s)/2)}\Big)^2 + \Big(\frac{\zeta - z}{\sin(\pi(\sigma-s)/2)}\Big)^2,$$

$$B \equiv B(\sigma,s) = \frac{R^2(\sigma,s)}{R_*^2(\sigma,s)}, \qquad Q(\sigma,s) = \frac{4(r/\sin\pi s)(\rho/\sin\pi\sigma)}{R_*^2(\sigma,s)},$$

$$b \equiv b(\sigma, s) = \ln B(\sigma, s), \qquad a \equiv a(\sigma, s) = \delta R_*^{-1}(\sigma, s) \sin\left(\pi(\sigma + s)/2\right).$$

В этих обозначениях модуль эллиптических интегралов q и вес h_*^{-1} имеют вид

$$q(\sigma, s) = \frac{\sin \pi\sigma \sin \pi s}{\sin^2(\pi(\sigma + s)/2)}\, Q(\sigma, s), \qquad h_*^{-1}(\sigma, s) = \frac{R_*^{-1}(\sigma, s)}{\sin\left(\pi(\sigma + s)/2\right)}.$$

Зафиксировав значение $s \in (0, 1)$, выполним в (7) следующую неявную замену переменной интегрирования σ:

$$t \equiv t(\sigma, s) = \frac{\sin\left(\pi(\sigma - s)/2\right)}{\sin\left(\pi(\sigma + s)/2\right)}, \qquad \sigma \in [0, 1]. \tag{8}$$

Отображение $t\colon [0, 1] \to [-1, 1]$ выявляет структуру подынтегральных функций в (7):

$$\tilde{q} = (1 - t)(1 + t)\tilde{Q}(t), \qquad 1 - \tilde{q} = t^2 \tilde{B}(t), \qquad h_*^{-1}\delta\, d\sigma = \varepsilon^{-1}\tilde{a}(t)\, dt.$$

При этом “подвижная” логарифмическая особенность переходит в неподвижную — середину отрезка, выделяя в силу равенства

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k \tilde{g}(t) = \varepsilon^{-k}\Big(\sin^2\frac{\pi(\sigma + s)}{2}\,\frac{d}{d\sigma}\Big)^k g(\sigma, s), \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2}\sin \pi s \quad \forall k \geqslant 0 \tag{9}$$

в явном виде пограничный слой толщиной ε [5]. Операция “$\sim$” действует на любые равномерно непрерывные в области $[0, 1] \times [0, 1]$ функции $g(\sigma, s)$ следующим образом: $\tilde{g} \equiv \tilde{g}(t) = g(\sigma(t, s), s)$, где функция $\sigma(t, s)$ при фиксированном значении $s \in (0, 1)$ является обратной к функции $t(\sigma, s)$.

Итак, при замене переменной интегрирования в (8) выражение (7) преобразуется к виду

$$2\varepsilon^{-1}r^{-1}\int\limits_{-1}^{1} \tilde{F}_c(t)\tilde{a}(t)\, dt - 2\varepsilon^{-1}r^{-1}\int\limits_{-1}^{1} \tilde{F}_d(t)\tilde{a}(t)\ln|t|\, dt.$$

Приближенная численная реализация этого интегрального выражения и соотношений (4)–(6) осуществляется с использованием квадратурной формулы

$$2\varepsilon^{-1}r^{-1}\sum_{k=1}^{n}\big[c_k\tilde{F}_c(t_k) + d_k\tilde{F}_d(t_k)\big]\tilde{a}(t_k), \qquad \tilde{a}(t_k) = a(\sigma(t_k, s), s). \tag{10}$$

Здесь $t_k = \cos\left(\pi(2k - 1)/(2n)\right)$ — узлы; $c_k > 0$, $d_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — веса ненасыщаемых квадратурных формул [3]. Параметр $p \geqslant 0$, присутствующий в алгоритмах вычисления полных эллиптических интегралов $\Psi(q)$ (см. теорему 1), ответствен за гладкость функций в подынтегральных выражениях в (4)–(6): функции принадлежат классу $C^{2p+1}[-1, 1]$. Параметр p выбирается в соответствии с условием нейтрализации в представлениях (4)–(6) пограничного слоя толщиной $\varepsilon = 0{,}5\pi \sin \pi s$, т. е. $n > n_{\min}$, $p \geqslant 10$ [5]. Значения $\sigma(t_i, s) \equiv \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ в формулах (10) вычисляются из уравнений

$$t_i = \frac{\sin\left(\pi(\sigma_i - s)/2\right)}{\sin\left(\pi(\sigma_i + s)/2\right)}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad s \in (0, 1)$$

с использованием метода Ньютона:

$$y^{(\alpha+1)} = y^{(\alpha)} - f(y^{(\alpha)})/f'(y^{(\alpha)}), \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$f(x) = x - s - 2\arcsin\Big(\frac{t_i \sin\left(\pi(x + s)/2\right)}{2}\Big), \quad f'(x) = 1 - t_i\,\frac{\cos\left(\pi(x + s)/2\right)}{\sqrt{1 - t_i^2\sin^2\left(\pi(x + s)/2\right)}}.$$

Начальное приближение $y^{(0)} = \sigma_i^{(0)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выбирается следующим образом:

$$\sigma_1^{(0)} = 1 - (1 - t_1)\operatorname{ctg}(\pi s/2)/\pi,$$

$$\sigma_{i+1}^{(0)} = \sigma_i + 2\pi^{-1}(t_{i+1} - t_i)\,\frac{\sin^2(\pi(\sigma_i + s)/2)}{\sin \pi s}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Указанный итерационный процесс сходится квадратично, поэтому для $s \in [0{,}001, 0{,}999]$ уже 2–3 его итерации обеспечивают значениям σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ не менее 10 верных десятичных разрядов. Конструирование значений σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ при численной реализации формул (10) происходит автоматически [5] в зависимости от толщины пограничного слоя $\varepsilon = 0{,}5\pi \sin \pi s$.

Таким образом, при условии, что отображение t: $[0,1] \to [-1,1]$, приводящее граничные интегральные операторы (4)–(6) к виду (7), найдено, только за счет дополнительной гладкости решений задач (1), (2) удается (см. [3]), во-первых, учесть геометрию меридиональных сечений C^∞-гладких осесимметричных областей; во-вторых, свести нейтрализацию явно выделяемого согласно соотношениям (9) пограничного слоя к использованию соответствующих свойств ненасыщаемых квадратурных формул [5], учитывающих специфику поведения подынтегральных выражений на диагонали $s = \sigma$. Свойства хорошей обусловленности используемых для аппроксимации (7) ненасыщаемых квадратур (10) обеспечивают вычислительным процессам устойчивость к ошибкам округлений [3].

При решении задач (1), (2) используем эквивалентное им граничное интегральное уравнение (3), ограничившись рассмотрением C^∞-гладких осесимметричных областей и достаточно гладких осесимметричных решений. Приведем неформальное описание конечномерной ненасыщаемой аппроксимации уравнения (3). Прежде всего необходимо выбрать подходящий ненасыщаемый способ аппроксимации самого решения ψ. Обозначим через $e_m(g)$ наилучшее чебышевское приближение непрерывной периодической функции $g \in C[0,2]$ тригонометрическими многочленами порядка не более m. Функция g аппроксимируема в $C[0,2]$ тригонометрическим многочленом чебышевского наилучшего приближения с тем более высокой точностью $e_m(g)$, чем выше гладкость самой функции g. Более того, характеризация 2-периодических функций конечной гладкости осуществляется по асимптотике убывания $e_m(g)$ к нулю при $m \to \infty$ (с помощью прямых и обратных теорем Джексона, устанавливающих соответствие свойств гладкости функции $g \in C[0,2]$ и утверждений типа $m^\varsigma e_m(g) \to 0$ (значение $\varsigma \geqslant 0$ конечно)). Именно этим свойством — являться конструктивным носителем информации о дифференциальной природе $g \in C[0,2]$ — определяется особый статус многочленов наилучшего чебышевского приближения. Отметим, что специфика поведения характеристик $e_m(g)$ с ростом параметра $m \geqslant 0$ для классов 2-периодических C^∞-гладких функций изучена в [5]. Из результатов работы [5] следует, что способ аппроксимации 2-периодических функций многочленами чебышевского наилучшего приближения не обладает насыщением. Это обстоятельство использовано ниже.

Положим $s_i = 2i/(2m+1)$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Отображение J: $C_+ \to \mathbb{R}^{m+1}$, определяемое равенством $Jg = (\,g(s_0), \dots, g(s_m))$, имеет расшифровывающий алгоритм, основанный на вычислении интерполяционного многочлена Лагранжа

$$(Q_m g)(s) \equiv Q_m(s; Jg) = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m} g(s_k) v_k(s),$$

где

$$v_k(s) = \begin{cases} D_m(\pi s), & k = 0, \\ D_m(\pi(s - s_k)) + D_m(\pi(s + s_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

$D_m(s) = 1/2 + \sum_{k=1}^{m} \cos ks$ — ядро Дирихле. Из неравенства Лебега

$$\|g(s) - Q_m(s; Jg)\| \leqslant (1 + \|Q_m\|)\, e_m(g)$$

и результатов [5] следует, что указанный способ аппроксимации функции $g \in C_+^\infty[0,1]$ одновременно с ее производными не обладает насыщением, при этом $\|Q_m\| \leqslant 3 + 4\pi^{-2}\ln m$ (см. [2]).

Дискретный аналог уравнения (3) получается следующим образом. Пусть

$$\psi(s) = Q_m(s; J\psi) + \rho_m(s;\psi), \quad u = J\psi, \quad \nu = -Jf, \quad \vartheta = JN\bar{V}[\rho_m].$$

Тогда из уравнения (3) следует соотношение $u + Au = \nu + \vartheta$, где $A = (a_{ij})$ — матрица размером $(m+1)\times(m+1)$ с элементами $a_{ik} \equiv a_k(s_i) = -N\bar{V}[v_k](s_i)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Приближенное вычисление a_{ik} выполняется с помощью ненасыщаемых квадратур (10). Использование их с числом узлов $n > n_{\min} > m \geqslant m_0$ позволяет вычислить матрицу A с точностью, равной $(1 + 2\|Q_m\|)e_m(\psi)$ (см. [3]). При этом численная реализация $N\bar{V}[g]$ осуществляется исходя из представления (4), если в формулах (10) положить

$$\tilde{F}_c(t) = F_c(\sigma(t,s),s), \qquad \tilde{F}_d(t) = F_d(\sigma(t,s),s),$$

$$F_c(\sigma,s) = g[\Omega(E^* - e^*b) + \omega(D^* - d^*b)], \qquad F_d(\sigma,s) = 2g[\Omega e^* + \omega d^*],$$

$$\Omega(\sigma,s) = 2\rho r(\sigma - s)^{-1}\boldsymbol{H}(\sigma,s)\cdot\boldsymbol{N}, \qquad \omega(\sigma,s) = \rho z_s\Delta^{-1}, \qquad \varepsilon = 0{,}5\pi\sin\pi s.$$

Алгоритмы вычисления функций E^*, e^*, D^*, d^* приведены в [7]. Общим аргументом этих функций является модуль эллиптических интегралов $\tilde{q} \equiv \tilde{q}(t) = q(\sigma(t,s),s)$.

Если отбросить погрешность аппроксимации $\vartheta \in \mathbb{R}^{m+1}$ и обозначить приближенное значение $J\psi \in \mathbb{R}^{m+1}$ через $\bar{\psi} \in \mathbb{R}^{m+1}$, то получится искомая дискретизация задачи (3):

$$(I + A)\bar{\psi} = \nu \tag{11}$$

(I — единичная матрица). Чебышевские нормы векторов $Jg \in \mathbb{R}^{m+1}$ и согласованные с ними нормы матриц $B\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ обозначим соответственно через $|Jg| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant m} |g(s_k)|$ и $|B|$; в качестве меры обусловленности матрицы B примем число $\varkappa(B) = |B|\,|B^{-1}|$.

Сформулируем полученные результаты.

Пусть задача (3), поставленная в C^∞-гладкой осесимметричной области ω, разрешима при любой правой части $f \in C_+$ и $\|\psi\| \leqslant M\|f\|$. Тогда справедливы следующие утверждения [3].

Теорема 2. *Если $f \in C_+^l[0,1]$ и $l > 0$ — достаточно большое целое число, то в случае $n > n_{\min} > m \geqslant m_0$ уравнение (11) разрешимо при любой правой части ν. При этом $\|N\bar{V}[Q_m]\| \leqslant q_0 < \infty$, $\varkappa(I + A) \leqslant \varkappa_0 < \infty$ и*

$$e_m(\psi) \leqslant |J\psi - \bar{\psi}| \leqslant c_0(1 + \|Q_m\|)e_m(\psi),$$

$$e_m(\psi) \leqslant \|\psi(s) - Q_m(s;\bar{\psi})\| \leqslant c_0\|Q_m\|(1 + \|Q_m\|)e_m(\psi).$$

Постоянные q_0, $\varkappa_0$, c_0 не зависят от параметра m и могут быть выбраны следующими:

$$q_0 = \sup_{m\geqslant 0}\|N\bar{V}[Q_m]\|, \qquad \varkappa_0 = 2(1 + Mq_0)^2, \quad c_0 = 2(1 + Mq_0)\,\|K\|.$$

Теорема 3. *Систему (11) можно решать методом итераций по схеме*

$$\bar{\psi}^{k+1} = (1-\beta)\bar{\psi}^k - \beta A\bar{\psi}^k + \beta\nu, \qquad \beta = (1 + \|N\bar{V}[Q_m]\|)^{-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\tau < 1$.

Теорема 4. *Если $|(I + A)\bar{\psi}^k - \nu|/|\nu| \leqslant \epsilon/\varkappa(I + A)$, то $|\bar{\psi}^k - \bar{\psi}|/|\bar{\psi}| \leqslant \epsilon$.*

Замечание. В отличие от методов, имеющих главный член погрешности (например, конечно-разностных), построенные численные методы имеют важное преимущество: они ненасыщаемы, поскольку правые части неравенств в теореме 2 с ростом параметра m автоматически прослеживают дифференциальные свойства точного решения $\psi(s) \in C_+[0,1]$ задачи (3), настраиваясь по фактической гладкости последнего на оптимальные оценки погрешности. В случае $\psi \in C_+^\infty[0,1]$ погрешность убывает экспоненциально с ростом параметра m, и достижение нужной точности происходит при небольших значениях m [5].

В качестве примера рассмотрена задача (3) в области, ограниченной эллипсоидом вращения с полуосями $a > 0$ и $b > 0$. Эта область характеризуется единственным числовым параметром a/b. Уменьшая или увеличивая этот параметр, можно управлять диапазоном вычислительных трудностей рассматриваемой задачи. В проведенных расчетах параметр a/b выбирался таким, чтобы наглядно продемонстрировать преимущества новой — ненасыщаемой — методики численного решения C^∞-гладких (эллиптических) задач (1), (2). В [8] рассмотрена задача для сильно удлиненных гладких тел вращения ($b \gg a$). До недавнего времени эта задача считалась неразрешимой численно, так как использовались насыщаемые, т. е. с главным членом погрешности, численные методы. Удлинения 1/10, 10/1 уже оказываются критическими для численных методик, основанных на конечно-разностных аппроксимациях или на аппроксимациях конечными элементами, а также в иных подобных случаях [2].

Напротив, ненасыщаемые численные методы, построенные автором данной работы, характеризуются отсутствием главного члена погрешности, вследствие чего обладают способностью автоматически подстраиваться под любые запасы гладкости решений. Тем самым преодолевается указанный рубеж, недоступный для других численных методов. При этом обеспечивается высокая точность конструируемых численных решений при малом числе узловых точек. Несмотря на экстремальность выбранных для тестовых расчетов областей: “иглы” ($a/b = 1/1000$) и “диска” ($a/b = 100/1$), удалось отыскать прецизионные численные решения при весьма ограниченном объеме обрабатываемой числовой информации.

При конструировании вычислительного алгоритма ставилась цель — надежно получать большое число верных десятичных разрядов в отыскиваемом числовом решении при сравнительно небольших размерах матриц линейных систем, к решению которых сводится эллиптическая задача (3). В результате решения с 5–8 верными десятичными разрядами были получены при следующих значениях параметров из теорем 1–4: $p = 10$, $m = 20$, $n = 501$, $k = 10$.

Прежде чем привести результаты расчетов, укажем точные решения задачи (3) в вытянутых ($b > a$) и сплюснутых ($b < a$) вдоль оси симметрии z эллипсоидах вращения [7]. При этом граничные данные являются следами производных гармонических полиномов.

Рассмотрим ортогональные криволинейные системы координат вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. С декартовыми прямоугольными координатами (r, z) меридионального сечения осесимметричной области они связаны соответственно равенствами

$$r = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \qquad z = c\lambda\mu, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \lambda < \infty,$$

$$r = c\sqrt{(\lambda^2 + 1)(1 - \mu^2)}, \qquad z = c\lambda\mu, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda < \infty,$$

где c — некоторый масштабный множитель.

Пусть $\lambda = \lambda_0$ — уравнение поверхности эллипсоида вращения, заданного уравнением

$$r = c\sqrt{(\lambda_0^2 \mp 1)(1 - \mu^2)} = a \sin \pi s, \qquad z = c\lambda_0\mu = b \cos \pi s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1$$

($a > 0$, $b > 0$ — постоянные). Дифференцирование в точке $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$ вдоль нормального $\boldsymbol{N}$ и касательного $\boldsymbol{E}$ направлений к этой поверхности осуществляется операторами

$$N \equiv \pi\Delta^{-1}(\lambda_0^2 \mp 1)^{1/2}\,\partial/\partial\lambda, \qquad E \equiv -\Delta^{-1}\,\partial/\partial s,$$

где

$$\lambda_0 = b(\pm b^2 \mp a^2)^{-1/2}, \qquad \Delta = \pi b(1 \mp \lambda_0^{-2}\mu^2)^{1/2}, \qquad \mu = \cos\pi s$$

(здесь и далее верхние знаки соответствуют случаю вытянутого ($b > a$), а нижние — сплюснутого ($b < a$) вдоль оси симметрии z эллипсоида вращения).

Решение внешней задачи Неймана (2) с правой частью

$$f(s) = 2\pi ab(\sin^2\pi s - 2\cos^2\pi s)/\Delta, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\omega \tag{12}$$

ищется в виде $\Phi(\lambda,\mu) = V[\psi](\lambda,\mu)$. В результате получаются равенства

$$\psi(\mu) = -ab\Delta^{-1}\Lambda_2(3\mu^2 - 1)/2, \quad \bar{\Phi}(\lambda_0,\mu) = -2c^2(1+\Lambda_2)p(\lambda_0)(3\mu^2-1)/3, \tag{13}$$

где

$$c = b/\lambda_0, \qquad p(\lambda_0) = (3\lambda_0{}^2 \mp 1)/2, \qquad \Lambda_2^{-1} = 3\lambda_0(\lambda_0^2 \mp 1)Q_2(\lambda_0) - 1,$$

$$Q_2(\lambda_0) = \begin{cases} [(3\lambda_0{}^2 - 1)\ln\left((\lambda_0+1)/(\lambda_0-1)\right) - 6\lambda_0]/4, & b > a, \\ [(3\lambda_0{}^2 + 1)\arcsin\left(\lambda_0{}^2+1\right)^{-1/2} - 3\lambda_0]/2, & b < a. \end{cases}$$

Решение задачи обтекания (1) с данными

$$f(s) = N_-\bar{\Phi} = -\pi a\Delta^{-1}U\cos\pi s, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\omega \tag{14}$$

ищется в форме $\varphi(\lambda,\mu) = \Phi(\lambda,\mu) + Uz$, $\Phi(\lambda,\mu) = V[\chi](\lambda,\mu)$. Точное ее решение также выписывается в явном виде

$$\chi(\mu) = -0{,}25a\Delta^{-1}\Lambda_1 U\cos\pi s, \qquad \bar{\varphi}(\lambda_0,\mu) = -b\Lambda_1 U\cos\pi s,$$
$$E\bar{\varphi}(\lambda_0,\mu) = \pi b\Delta^{-1}\Lambda_1 U\sin\pi s, \qquad \Lambda_1^{-1} = (\lambda_0^2 \mp 1)Q_1(\lambda_0) - 1, \tag{15}$$

где

$$Q_1(\lambda_0) = \begin{cases} [\lambda_0\ln\left((\lambda_0+1)/(\lambda_0-1)\right) - 2]/2, & b > a, \\ 1 - \lambda_0\arcsin\left(\lambda_0{}^2+1\right)^{-1/2}, & b < a. \end{cases}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1, 2.

Табл. 1 содержит численное решение внешней задачи Неймана (2) с правой частью (12) для вытянутого ($a/b = 1/100$) и сплюснутого ($a/b = 100/1$) вдоль оси вращения z эллипсоидов вращения. Решения конструировались численно по формулам (5) на основе численного решения уравнения (3): решение вычислялось в узлах s_j, $0 \leqslant j \leqslant 20$ по формуле $\bar{\Phi}(\lambda_0, \cos\pi s_j) = \bar{V}[\psi](s_j)$. Точные значения решения $\bar{\Phi}(\lambda_0, \cos\pi s_j)$ этой задачи определялись по формулам (13).

В табл. 2 приведены результаты численного решения классической задачи обтекания вытянутого ($b > a$) и сплюснутого ($b < a$) вдоль оси симметрии z эллипсоидов вращения. Случаи $a/b = 1/3$, $3/1$ соответствуют решениям для обычно используемых в тестовых расчетах стандартных областей, поэтому здесь не комментируются. В табл. 2 представлены также результаты численного решения задачи обтекания для сильно вытянутого ($a/b = 1/1000$) вдоль оси симметрии z эллипсоида вращения. В шестой графе табл. 2 приведено численное решение задачи (3) с данными (14) при $U \equiv 1$, прямые значения касательной производной $E\bar{\varphi}(\lambda_0, \cos\pi s_j)$ определены по формулам (6) и (10). Седьмая графа

Таблица 1

Задача Неймана ($n = 501$, $m = 20$)

j	$a = 1$, $b = 100$		$a = 100$, $b = 1$	
	$\bar{\Phi}$	Точное значение $\bar{\Phi}$	$\bar{\Phi}$	Точное значение $\bar{\Phi}$
0	15,216 016 7	15,216 433 1	156,780 079 6	156,781 543 0
1	14,684 686 9	14,684 577 5	151,299 901 8	151,301 603 8
2	13,138 729 3	13,138 583 8	135,373 007 7	135,372 556 2
3	10,722 703 2	10,722 549 6	110,478 557 7	110,479 102 3
4	7,661 832 4	7,661 666 7	78,941 291 2	78,941 491 6
5	4,241 408 3	4,241 231 5	43,699 296 6	43,699 257 0
6	0,780 305 1	0,780 053 3	8,036 984 7	8,037 229 2
7	−2,398 768 2	−2,399 261 2	−24,720 841 5	−24,720 633 7
8	−4,999 447 4	−5,000 376 8	−51,520 846 6	−51,521 062 3
9	−6,779 442 2	−6,780 851 0	−69,866 610 0	−69,866 063 3
10	−7,573 048 6	−7,574 730 5	−78,045 458 5	−78,045 750 3
11	−7,306 434 6	−7,308 020 2	−75,298 024 0	−75,297 717 5
12	−6,004 399 9	−6,005 579 3	−61,878 230 0	−61,878 101 2
13	−3,788 112 4	−3,788 804 7	−39,037 659 1	−39,037 706 7
14	−0,863 969 1	−0,864 315 9	−8,905 665 4	−8,905 423 3
15	2,495 504 4	2,495 303 8	25,709 970 8	25,710 202 5
16	5,977 083 8	5,976 913 4	61,582 969 9	61,582 744 6
17	9,256 164 3	9,256 002 0	95,367 807 8	95,368 623 4
18	12,027 088 7	12,026 934 7	123,919 091 7	123,918 751 2
19	14,031 586 0	14,031 440 7	144,571 324 5	144,572 049 9
20	15,082 830 5	15,082 685 4	155,401 649 1	155,403 483 1

Таблица 2

Задача обтекания ($m = 20$)

j	$a = 1$, $b = 3$, $n = 71$		$a = 3$, $b = 1$, $n = 71$		$a = 0{,}5$, $b = 500$, $n = 501$	
	$E\bar{\varphi}$	Точное значение $E\bar{\varphi}$	$E\bar{\varphi}$	Точное значение $E\bar{\varphi}$	$E\bar{\varphi}$	Точное значение $E\bar{\varphi}$
0	0,000 000 0	0,000 000 0	0,000 000 0	0,000 000 0	0,000 000 0	0,000 000 0
1	0,471 713 7	0,471 713 7	0,141 011 3	0,141 022 5	0,999 987 6	0,999 985 6
2	0,772 501 9	0,772 501 9	0,287 701 8	0,287 724 7	1,000 002 9	1,000 001 6
3	0,930 709 0	0,930 709 0	0,446 579 7	0,446 615 3	1,000 003 5	1,000 004 6
4	1,013 881 1	1,013 881 1	0,626 017 3	0,626 067 3	1,000 004 1	1,000 005 6
5	1,060 178 7	1,060 178 7	0,837 723 5	0,837 790 3	1,000 004 5	1,000 006 1
6	1,087 415 2	1,087 415 2	1,098 779 0	1,098 866 7	1,000 005 4	1,000 006 3
7	1,103 979 3	1,103 979 3	1,433 236 8	1,433 351 2	1,000 006 2	1,000 006 5
8	1,114 013 6	1,114 013 6	1,865 579 8	1,865 728 6	1,000 007 1	1,000 006 5
9	1,119 631 5	1,119 631 5	2,370 416 9	2,370 605 9	1,000 007 7	1,000 006 6
10	1,121 877 0	1,121 877 0	2,724 475 3	2,724 692 6	1,000 008 1	1,000 006 6
11	1,121 138 8	1,121 138 8	2,591 412 2	2,591 618 9	1,000 007 9	1,000 006 6
12	1,117 290 9	1,117 290 9	2,116 044 9	2,116 213 7	1,000 007 4	1,000 006 6
13	1,109 648 0	1,109 648 0	1,636 375 8	1,636 506 4	1,000 006 6	1,000 006 5
14	1,096 707 6	1,096 707 6	1,255 094 0	1,255 194 2	1,000 005 8	1,000 006 4
15	1,075 515 8	1,075 515 8	0,960 744 2	0,960 820 8	1,000 004 9	1,000 006 2
16	1,040 211 9	1,040 211 9	0,726 922 1	0,726 980 1	1,000 004 3	1,000 005 9
17	0,978 636 2	0,978 636 2	0,533 096 2	0,533 138 7	1,000 003 7	1,000 005 2
18	0,864 583 6	0,864 583 6	0,365 152 3	0,365 181 4	1,000 003 5	1,000 003 5
19	0,644 655 4	0,644 655 4	0,213 270 0	0,213 286 9	0,999 999 3	0,999 997 5
20	0,251 822 7	0,251 822 7	0,070 160 0	0,070 165 5	0,999 924 0	0,999 921 8

табл. 2 содержит точные значения $E\bar{\varphi}(\lambda_0, \cos \pi s_j)$ касательной скорости частиц жидкости на границе эллипсоида вращения, вычисленные по формулам (15) при $U \equiv 1$. Результаты расчетов, приведенные в шестой графе табл. 2, являются наиболее ярким свидетельством потенциальных возможностей ненасыщаемых численных методов в C^∞-гладких осесимметричных задачах обтекания тел: чрезвычайно эффективный численный алгоритм решения задачи (1) получен за счет того, что в полной мере были использованы C^∞-гладкость и гармоничность ее решения (см. теоремы 1–4).

Автор выражает благодарность С. К. Годунову и В. С. Рябенькому за поддержку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. 2-е изд. М.; Ижевск: РХД, 2002.
3. **Белых В. Н.** Сверхсходящиеся ненасыщаемые алгоритмы численного решения уравнения Лапласа // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 36–52.
4. **Белых В. Н.** Оценки ε-энтропии компактов бесконечно дифференцируемых функций на отрезке // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9. Спецвыпуск: Избр. докл. VII Междунар. семинара-совещ. "Кубатурные формулы и их приложения", Красноярск, авг. 2003 г. С. 21–30.
5. **Белых В. Н.** О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
6. **Гюнтер Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
7. **Белых В. Н.** Численные алгоритмы без насыщения в нестационарных задачах гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1988. Т. 11. С. 3–67.
8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 12/X 2005 г.,
в окончательном варианте — 16/XI 2005 г.