УДК 539.3

МЕТОД НЕЗАВИСИМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

В рамках нелинейной теории упругости в актуальных переменных исследовано поле напряжений в цилиндрическом теле, соответствующее антиплоскому деформированию при отсутствии объемных сил и слабой нелинейности упругого потенциала. Определение напряжений сведено к решению нелинейной краевой задачи для двух независимых напряжений в полярных координатах физической плоскости и плоскости напряжений. Установлены аналитические решения нелинейных задач. Исследовано влияние нелинейности потенциала. Предложен способ решения нелинейной задачи с использованием решения гармонического уравнения, соответствующего линейному потенциалу.

Ключевые слова: перемещение, деформация, напряжение, потенциал, нелинейность, аналитическое решение, плоскость напряжений, краевая задача.

1. При нелинейной антиплоской деформации цилиндрического упругого тела в актуальных переменных x_1, x_2, x_3 ($x_1 = x$, $x_2 = y$ — поперечные координаты, $x_3 = z$ — продольная координата) поперечные смещения отсутствуют, а продольное не зависит от координаты z: $u_x = u_y = 0$, $u_z = w(x, y)$ [1]. В этом случае тело ведет себя как несжимаемое. Инварианты E_k деформаций Альманси A_{kl} неположительны и представимы через линейный инвариант E_1. В изотропном теле функцией линейного инварианта является также упругий потенциал $U = U(E_1)$.

В данном случае напряжения Коши P_{kl} в силу уравнений совместности деформаций

$$2E_{11} = -(2E_{31})^2, \quad 2E_{22} = -(2E_{32})^2, \quad 2E_{33} = 0, \quad 2E_{12} = -2E_{31}2E_{32}, \quad \frac{\partial E_{32}}{\partial x} = \frac{\partial E_{31}}{\partial y}$$

и обращенного закона Мурнагана [2] $2E_{kl} = -(P_{kl} + q\delta_{kl})/U'$ (q — давление; δ_{kl} — символ Кронекера; $U' = dU/dE_1$) представляются через давление и независимые напряжения P_{zx}, P_{zy} нелинейными зависимостями (здесь и далее числовые индексы заменяются буквенными)

$$P_{xx} = -q + P_{zx}^2/U', \quad P_{yy} = -q + P_{zy}^2/U', \quad P_{zz} = -q, \quad P_{xy} = P_{zx}P_{zy}/U', \tag{1}$$

а величины q, P_{zx}, P_{zy} (не зависящие от продольной координаты) определяются из уравнений равновесия (в отсутствие объемных сил) и дифференциального уравнения совместности напряжений [3].

Полагается, что в соотношениях (1) производная потенциала представлена через напряжения. Это представление можно получить в неявном виде, исключая инвариант деформации из равенств $2E_1 = -(P_{zx}^2 + P_{zy}^2)/U'^2$, $U' = N(2E_1)$:

$$U' = N(-R^2/U'^2), \qquad R^2 = P_{zx}^2 + P_{zy}^2. \tag{2}$$

Из двух уравнений равновесия $\partial P_{1k}/\partial x_k = 0$, $\partial P_{2k}/\partial x_k = 0$, преобразованных с помощью третьего уравнения, в результате интегрирования давление выражается через упругий потенциал:

$$q = h - U, \qquad h = \text{const}. \tag{3}$$

Постоянная h определяется потенциалом и торцевой нагрузкой и при отсутствии результирующей осевой нагрузки совпадает со средним значением потенциала в поперечном сечении S тела:

$$h = \frac{1}{S}\int_S U\,dS. \tag{4}$$

Независимые напряжения находятся из нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения совместности напряжений и уравнения равновесия с силовыми условиями на контуре L сечения тела:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{P_{zy}}{U'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{P_{zx}}{U'} = 0, \qquad \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$P_{zx} = g_n n_x - g_t n_y, \qquad P_{zy} = g_n n_y + g_t n_x L \qquad \text{на} \quad L.$$

Здесь n_x, n_y — компоненты внешней нормали сечения; U' — решение уравнения (2); g_n, g_t — напряжения, определяемые через касательную p_t, нормальную p_n и бинормальную p_b контурные нагрузки из уравнений [3]:

$$p_t = g_n g_t/U', \quad p_n = U - h + g_n^2/U', \quad p_b = g_n \quad (R^2 = g_n^2 + g_t^2). \tag{6}$$

Рассмотрим квадратичный упругий потенциал Ривлина — Сондерса U, обобщающий линейный потенциал Муни U_0:

$$U(E_1) = aE_1^2 - 2bE_1, \quad U_0(E_1) = -2bE_1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ E_1 < 0), \tag{7}$$

который с приемлемой точностью описывает большие упругие деформации резиноподобных материалов [1]. Потенциал и его производная представимы через напряжения. В данном случае эти величины взаимосвязаны, а зависимость (2) является кубическим уравнением:

$$U = (U'^2 - 4b^2)/(4a), \qquad U'^3 + 2bU'^2 + aR^2 = 0. \tag{8}$$

Представим уравнения (5) в развернутом виде

$$\begin{gathered} 2aP_{zx}P_{zy}\Big(\frac{\partial P_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{zy}}{\partial y}\Big) + (U'^3 - 2aP_{zx}^2)\frac{\partial P_{zy}}{\partial x} - (U'^3 - 2aP_{zy}^2)\frac{\partial P_{zx}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

и поставим им в соответствие характеристическую матрицу второго порядка D_{kl} с элементами и определителем [4]:

$$\begin{gathered} D_{xx} = 2aP_{zx}P_{zy}v_x - (U'^3 - 2aP_{zy}^2)v_y, \qquad D_{yy} = v_y, \\ D_{xy} = (U'^3 - 2aP_{zx}^2)v_x - 2aP_{zx}P_{zy}v_y, \qquad D_{yx} = v_x, \\ D = \det D_{kl} = D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx} = -U'^3(v_x^2 + v_y^2) + 2a(P_{zx}v_x + P_{zy}v_y)^2. \end{gathered} \tag{10}$$

Кубическое уравнение в (8) имеет один вещественный (U_1') и два комплексно-сопряженных (U_2', U_3') корня [5]. По свойству корней вещественный корень отрицателен:

$$aR^2 = -U_1'U_2'U_3' = -U_1'|U_2'|^2, \qquad U_1' < 0,$$

следовательно, определитель (10), соответствующий вещественному корню, положителен: $D > 0$. Поэтому характеристическое уравнение $D = 0$ не имеет вещественных корней [4].

Тем самым квадратичному потенциалу Ривлина — Сондерса (7) соответствует эллиптическая система (5), для которой краевая задача корректна.

Исследуем слабую нелинейность потенциала (7), при которой коэффициент при квадратичном члене мал по сравнению с коэффициентом при линейном члене: $a/(2b) \ll 1$. Тогда будет малым и коэффициент упругости: $m = a/(8b^3) \ll 1$. Рассмотрим линейное по m приближение производной $U' = U_0' + mU_1'$ и определим U', а затем и U в этом приближении в силу уравнений (8):

$$U_0' = -2b, \qquad U_1' = -2bR^2, \qquad U' = -2b(1 + mR^2), \qquad U = R^2(2 + mR^2)/(8b). \tag{11}$$

В данном приближении потенциалы (11) остаются нелинейными по напряжениям, а система уравнений (9) сохраняет эллиптический тип.

На контуре сечения тела в соответствии с (5), (6) справедлива зависимость $R^2 = g_n^2 + g_t^2 = p_b^2 + g_t^2$. С учетом этой зависимости, а также значений потенциалов (11) систему (6) можно преобразовать. При этом ее первое и третье уравнения в рассматриваемом приближении определят граничные напряжения g_t, g_n, а второе уравнение — ограничение на нагрузку:

$$\begin{gathered} g_t = -(2bp_t/p_b^3)[p_b^2 + m(4b^2p_t^2 + p_b^4)], \qquad g_n = p_b, \\ (p_b^4 + 4b^2p_t^2)[2p_b^2 + m(3p_b^4 + 28b^2p_t^2 - 8bp_b^2(p_n + h))] = 4p_b^4(p_b^2 + 2b(p_n + h)). \end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, для реализации в теле нелинейной антиплоской деформации элементы нагрузки и коэффициенты упругости должны быть взаимосвязаны.

2. Перейдем в полученных соотношениях от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим r, v, z: $x = r\cos v$, $y = r\sin v$, $z = z$. Тогда связь между компонентами нормали и напряжений в указанных переменных дается формулами

$$\begin{gathered} n_x = n_r\cos v - n_v\sin v, \qquad n_y = n_r\sin v + n_v\cos v, \qquad n_z = n_z, \\ P_{xx} = P_{rr}\cos^2 v + P_{vv}\sin^2 v - P_{rv}\sin 2v, \qquad P_{yy} = P_{rr}\sin^2 v + P_{vv}\cos^2 v + P_{rv}\sin 2v, \\ P_{zz} = P_{zz}, \qquad P_{zx} = P_{zr}\cos v - P_{zv}\sin v, \qquad P_{zy} = P_{zr}\sin v + P_{zv}\cos v, \\ P_{xy} = (P_{rr} - P_{vv})\sin v\cos v + P_{rv}\cos 2v, \qquad R^2 = P_{zx}^2 + P_{zy}^2 = P_{zr}^2 + P_{zv}^2. \end{gathered} \tag{13}$$

В соответствии с (1) и (13) цилиндрические компоненты напряжений выражаются через величины q, P_{zr}, P_{zv}:

$$P_{rr} = -q + P_{zr}^2/U', \qquad P_{vv} = -q + P_{zv}^2/U', \qquad P_{zz} = -q, \qquad P_{rv} = P_{zr}P_{zv}/U', \tag{14}$$

где q, U, U' определяются по формулам (3) и (11), а независимые напряжения P_{zr}, P_{zv} — из решения краевой задачи

$$\begin{gathered} U'\Big(\frac{\partial(rP_{zv})}{\partial r} - \frac{\partial P_{zr}}{\partial v}\Big) - rP_{zv}\,\frac{\partial U'}{\partial r} + P_{zr}\,\frac{\partial U'}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial(rP_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial P_{zv}}{\partial v} = 0, \\ P_{zr} = g_nn_r - g_tn_v, \qquad P_{zv} = g_nn_v + g_tn_r \qquad \text{на } L. \end{gathered} \tag{15}$$

В случае, когда напряжения зависят от одной полярной координаты, уравнения (15) допускают простые аналитические решения. Пусть напряжения являются функциями полярного радиуса. Тогда уравнения имеют вид

$$U'\,\frac{d(rP_{zv})}{dr} - rP_{zv}\,\frac{dU'}{dr} = 0, \qquad \frac{d(rP_{zr})}{dr} = 0, \qquad U' = -2b(1 + m(P_{zr}^2 + P_{zv}^2)).$$

Интегрирование этих уравнений приводит к зависимостям

$$rP_{zr} = A, \qquad mBP_{zv}^2 - rP_{zv} + B(r^2 + mA^2)/r^2 = 0, \qquad A = \mathrm{const}, \qquad B = \mathrm{const},$$

которые с учетом условия $m \ll 1$ дают два решения, содержащих свободные параметры A, B:

$$P_{zr} = \frac{A}{r}, \qquad P_{zv} = \frac{r}{mB} - \frac{B}{r}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + B^2}{r^2}\Big); \tag{16}$$

$$P_{zr} = \frac{A}{r}, \qquad P_{zv} = \frac{B}{r}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + B^2}{r^2}\Big). \tag{17}$$

Если напряжения зависят только от полярного угла, то уравнения (15) имеют вид

$$U'\Big(P_{zv} - \frac{dP_{zr}}{dv}\Big) - P_{zr}\,\frac{dU'}{dv} = 0, \qquad P_{zr} + \frac{dP_{zv}}{dv} = 0, \qquad U' = -2b(1 + m(P_{zr}^2 + P_{zv}^2)).$$

Эта система сводится к уравнениям

$$P_{zr} = -\frac{dP_{zv}}{dv}, \qquad \Big(\frac{d^2P_{zv}}{dv^2} + P_{zv}\Big)\Big[1 + mP_{zv}^2 - m\Big(\frac{dP_{zv}}{dv}\Big)^2\Big] = 0,$$

которые в результате интегрирования дают решения, зависящие от параметров T, E, f:

$$P_{zv} = T\cos v + E\sin v, \qquad P_{zr} = T\sin v - E\cos v, \qquad T = \mathrm{const}, \qquad E = \mathrm{const}; \tag{18}$$

$$P_{zv} = \mathrm{sh}\,(f \pm v)/\sqrt{m}, \qquad P_{zr} = \mp\,\mathrm{ch}\,(f \pm v)/\sqrt{m}, \qquad f = \mathrm{const}\,. \tag{19}$$

Решения (16) и (19) справедливы только для квадратичного упругого потенциала. При $m \to 0$ потенциал вырождается в линейный, при этом решения неограниченно возрастают и тем самым утрачивают смысл. Таким образом, нелинейная система (15) в числе прочих обладает решениями, не имеющими аналога в линейном случае. Используем найденные решения для решения конкретных краевых задач и определим в рассматриваемом приближении соответствующие им давление, зависимые напряжения и нагрузку.

Пусть сечением тела является внешность круга радиуса r_0 и начало отсчета совмещено с центром круга. В этом случае компоненты нормали равны $n_r = -1$, $n_v = 0$ и краевые условия в (15) имеют вид

$$P_{zr} = -g_n, \qquad P_{zv} = -g_t \qquad \text{при} \quad r = r_0. \tag{20}$$

Воспользуемся решением (17):

$$P_{zr} = \frac{A}{r}, \qquad P_{zv} = \frac{B}{r}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + B^2}{r^2}\Big), \qquad R^2 = \frac{A^2 + B^2}{r^2}\Big(1 + m\,\frac{2B^2}{r^2}\Big). \tag{21}$$

Для этого решения потенциалы (11) являются функциями полярного радиуса:

$$U = \frac{A^2 + B^2}{4br^2}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + 5B^2}{2r^2}\Big), \qquad U' = U_0'\Big(1 + m\,\frac{A^2 + B^2}{r^2}\Big). \tag{22}$$

Постоянная h в (4), определяемая для внешности круга с помощью предела среднего значения потенциала (22) в охватывающем отверстие круговом кольце при неограниченном расширении кольца, равна нулю, и давление (3) отличается от упругого потенциала только знаком:

$$\begin{gathered} h = \lim_{r_* \to \infty} \frac{1}{r_*^2 - r_0^2} \int\limits_{r_0^2}^{r_*^2} \frac{A^2 + B^2}{4br^2}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + 5B^2}{2r^2}\Big)\,dr^2 = 0, \\ q = -\frac{A^2 + B^2}{4br^2}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + 5B^2}{2r^2}\Big). \end{gathered} \tag{23}$$

Так же как независимые напряжения и давление (23), функциями радиуса являются зависимые напряжения (14):

$$P_{rr} = \frac{B^2 - A^2}{4br^2} + m\,\frac{5(A^2 + B^2)^2}{8br^4}, \qquad P_{vv} = \frac{A^2 - B^2}{4br^2} + m\,\frac{(A^2 + B^2)^2}{8br^4},$$

$$P_{zz} = \frac{A^2 + B^2}{4br^2}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + 5B^2}{2r^2}\Big), \qquad P_{rv} = -\frac{AB}{2br^2}.$$

Напряжения (21) исчезают на бесконечности: $P_{zr}^{\infty} = P_{zv}^{\infty} = 0$, и контурные напряжения (20) принимают постоянные значения:

$$g_n = -\frac{A}{r_0}, \qquad g_t = -\frac{B}{r_0}\Big(1 + m\,\frac{A^2 + B^2}{r_0^2}\Big) \qquad \text{при} \quad r = r_0. \tag{24}$$

Из (6) с учетом (24) и представления для потенциалов (22) для нагрузок также получим постоянные значения:

$$p_t = -\frac{AB}{2br_0^2}, \qquad p_n = \frac{B^2 - A^2}{4br_0^2} + m\,\frac{5(A^2 + B^2)^2}{8br_0^4}, \qquad p_b = -\frac{A}{r_0}, \tag{25}$$

которые удовлетворяют ограничениям (12).

Нормальное напряжение P_{vv}^L на ортогональной к контуру площадке и его значение P_{vv}^{0L} при линейном ($m = 0$) потенциале соответственно равны

$$P_{vv}^L = \frac{A^2 - B^2}{4br_0^2} + m\,\frac{(A^2 + B^2)^2}{8br_0^4}, \qquad P_{vv}^{0L} = \frac{A^2 - B^2}{4br_0^2}. \tag{26}$$

Из (26) следует, что при нагрузке (25) контур отверстия растянут при $A^2 > B^2$ и сжат при $A^2 < B^2$ и учет нелинейности потенциала приводит к увеличению растяжения и уменьшению сжатия.

Решению (18)

$$P_{zr} = T\sin v - E\cos v, \qquad P_{zv} = T\cos v + E\sin v, \qquad R^2 = T^2 + E^2 = \mathrm{const} \tag{27}$$

во внешности круга $r = r_0$ соответствуют другое поле напряжений и другие нагрузки. Для напряжений (27) потенциалы (11) постоянны:

$$U' = U_0'[1 + m(T^2 + E^2)], \qquad U = (T^2 + E^2)[2 + m(T^2 + E^2)]/(8b).$$

Согласно (4) константа h совпадает с потенциалом: $h = U$, в силу чего давление (3) обращается в нуль: $q = 0$. Тем самым зависимые напряжения (14), как и напряжения (27), во внешности отверстия являются функциями угла:

$$P_{rr} = -\frac{(T\sin v - E\cos v)^2}{2b(1 + m(T^2 + E^2))}, \qquad P_{vv} = -\frac{(T\cos v + E\sin v)^2}{2b(1 + m(T^2 + E^2))},$$

$$P_{zz} = 0, \qquad P_{rv} = \frac{(E\cos v - T\sin v)(T\cos v + E\sin v)}{2b(1 + m(T^2 + E^2))}.$$

На бесконечности, где полярный угол не определен, напряжения (27) также неопределенны, а на контуре отверстия они определяют контурные напряжения (20) в виде

$$g_n = -T\sin v + E\cos v, \qquad g_t = -T\cos v - E\sin v.$$

Функциями угла являются также элементы контурной нагрузки (6):

$$p_t = \frac{(E\cos v - T\sin v)(T\cos v + E\sin v)}{2b(1 + m(T^2 + E^2))}, \qquad p_n = -\frac{(E\cos v - T\sin v)^2}{2b(1 + m(T^2 + E^2))},$$

$$p_b = E\cos v - T\sin v,$$

которые согласуются с ограничениями на нагрузку (12).

На ортогональных к контуру площадках нормальные напряжения P_{vv}^L, P_{vv}^{0L} (при квадратичном и линейном потенциалах соответственно) имеют значения

$$P_{vv}^L = -\frac{(T\cos v + E\sin v)^2}{2b(1+m(E^2+T^2))}, \qquad P_{vv}^{0L} = -\frac{(T\cos v + E\sin v)^2}{2b}.$$

Отсюда следует, что при найденной выше нагрузке контур отверстия сжат и учет нелинейности потенциала уменьшает сжатие.

3. Другой способ исследования задачи (5) связан с переходом от напряжений к их потенциалам — смещению и функции напряжений. Первый из этих потенциалов имеет механический смысл. В системе (5) первое уравнение удовлетворяется, если выразить напряжения (отнесенные к U') через осевое смещение $w(x, y)$:

$$\frac{P_{zx}}{U'} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{P_{zy}}{U'} = -\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{28}$$

Второе уравнение будет выполнено, если представить напряжения через функцию напряжений $t(x, y)$:

$$P_{zx} = \frac{\partial t}{\partial y}, \qquad P_{zy} = -\frac{\partial t}{\partial x}. \tag{29}$$

Исключение напряжений из (28) и (29) дает нелинейную систему уравнений для функций w, t

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{U'}\frac{\partial t}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{U'}\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad U' = U'(R^2), \qquad R^2 = \Big(\frac{\partial t}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial t}{\partial y}\Big)^2. \tag{30}$$

Путем дифференцирования из системы (30) можно исключить один из потенциалов и получить для другого дифференциальное уравнение второго порядка. Если использовать представление производной упругого потенциала через инвариант деформации $U'(E_1)$ и учесть выражение для инварианта [3] $2E_1 = -|\nabla w|^2$, то уравнение для смещения примет вид

$$\Big[U' - U''\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2U''\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \Big[U' - U''\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{31}$$

В частности, для линейного упругого потенциала (7) производные от потенциала постоянны: $U_0' = -2b$, $U_0'' = 0$ и уравнение (31) для смещения (обозначаемого в этом случае через w_0) становится уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \tag{32}$$

Уравнения (30) допускают представление в виде линейной системы для тех же функций при соответствующем выборе независимых переменных. Нелинейность уравнений обусловлена величиной U', зависящей от переменной $R = \sqrt{P_{zx}^2 + P_{zy}^2}$. Поэтому перейдем от декартовых координат x, y физической плоскости к полярным координатам R, V плоскости напряжений (P_{zx}, P_{zy}): $P_{zx} = R\cos V$, $P_{zy} = R\sin V$. С этой целью рассмотрим выражение

$$dt + iU'\,dw = -i(P_{zx} - iP_{zy})(dx + i\,dy) = -i\,R\mathrm{e}^{-iV}\,dz \qquad (z = x + iy),$$

где P_{zx}, P_{zy} определены по формулам (28), (29). Полагая z, t, w функциями R, V и принимая $R \neq 0$, отсюда находим

$$dz = (i\mathrm{e}^{iV}/R)(dt + iU'\,dw); \tag{33}$$

$$\frac{\partial z}{\partial R} = \frac{i\mathrm{e}^{iV}}{R}\Big(\frac{\partial t}{\partial R} + iU'\,\frac{\partial w}{\partial R}\Big), \qquad \frac{\partial z}{\partial V} = \frac{i\mathrm{e}^{iV}}{R}\Big(\frac{\partial t}{\partial V} + iU'\,\frac{\partial w}{\partial V}\Big). \tag{34}$$

Исключение из уравнений (34) функции $z(R,V)$ путем приравнивания смешанных производных $\partial^2 z/\partial R\,\partial V = \partial^2 z/\partial V\,\partial R$ приводит к соотношению

$$\frac{\partial t}{\partial R} + iU'\,\frac{\partial w}{\partial R} = \frac{i}{R}\Big(\frac{\partial t}{\partial V} + iU'\,\frac{\partial w}{\partial V}\Big) + \frac{\partial U'}{\partial R}\,\frac{\partial w}{\partial V},$$

которое после отделения действительных и мнимых частей дает линейную систему уравнений

$$\frac{\partial t}{\partial V} = RU'\,\frac{\partial w}{\partial R}, \qquad \frac{\partial t}{\partial R} = R\,\frac{d}{dR}\Big(\frac{U'}{R}\Big)\frac{\partial w}{\partial V}. \tag{35}$$

После исключения из системы (35) функции напряжений получаем уравнение для осевого смещения $w(R,V)$

$$\frac{\partial}{\partial R}\Big(RU'\,\frac{\partial w}{\partial R}\Big) - R\,\frac{d}{dR}\Big(\frac{U'}{R}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial V^2} = 0, \tag{36}$$

которое в случае линейного упругого потенциала имеет вид

$$R_0\,\frac{\partial}{\partial R_0}\Big(R_0\,\frac{\partial w_0}{\partial R_0}\Big) + \frac{\partial^2 w_0}{\partial V^2} = 0. \tag{37}$$

Здесь и далее индексом 0 отмечены величины, соответствующие линейному упругому потенциалу.

Решение $w = w(R,V)$ уравнения (36) вместе с следующими из (33) формулами преобразования координат $R = R(x,y)$, $V = V(x,y)$ определяет перемещение и напряжения в физической плоскости:

$$w(x,y) = w(R(x,y), V(x,y)),$$
$$P_{zx}(x,y) = R(x,y)\cos V(x,y), \quad P_{zy}(x,y) = R(x,y)\sin V(x,y).$$

Для установления связи между координатами в равенствах (34), используя формулы (35), заменим градиенты функции напряжений градиентами смещения. В результате получим

$$F = \frac{\partial z}{\partial R} = \mathrm{e}^{iV}\Big(i\,\frac{d}{dR}\Big(\frac{U'}{R}\Big)\frac{\partial w}{\partial V} - \frac{U'}{R}\,\frac{\partial w}{\partial R}\Big), \quad G = \frac{\partial z}{\partial V} = \frac{U'}{R}\,\mathrm{e}^{iV}\Big(iR\,\frac{\partial w}{\partial R} - \frac{\partial w}{\partial V}\Big). \tag{38}$$

Интегрируя эти уравнения в соответствии с [6], получим

$$z = \int F(R,V)\,dR + G(R,V)\,dV. \tag{39}$$

Так как функции F, G удовлетворяют условию $\partial F/\partial V = \partial G/\partial R$, то подынтегральное выражение в (39) является полным дифференциалом. Таким образом, для каждого решения уравнения (36) интеграл в (39) не зависит от пути интегрирования; после отделения в равенстве (39) действительной и мнимой частей получим преобразование $x = x(R,V)$, $y = y(R,V)$.

Определитель преобразования в силу (38) представляется через смещение и упругий потенциал:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(R,V)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,\bar z)}\,\frac{\partial(z,\bar z)}{\partial(R,V)} = -\frac{U'^2}{R}\Big(\frac{\partial w}{\partial R}\Big)^2 + \frac{U'}{R}\,\frac{d}{dR}\Big(\frac{U'}{R}\Big)\Big(\frac{\partial w}{\partial V}\Big)^2.$$

Для потенциала U' из (11) в линейном по параметру m приближении выполняется равенство

$$\frac{U'}{R}\,\frac{d}{dR}\Big(\frac{U'}{R}\Big) = -\frac{4b^2}{R^3}\,(1+mR^2)(1-mR^2) \approx -\frac{4b^2}{R^3},$$

в силу которого определитель конечен и отличен от нуля (за исключением особых точек, в которых $\partial w/\partial R = \partial w/\partial V = 0$ либо $R = 0$):

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(R,V)} = -\frac{1}{R^3}\Big[R^2(1+mR^2)\Big(\frac{\partial w}{\partial R}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial V}\Big)^2\Big] \neq 0,$$

что обусловливает существование обратного преобразования $R = R(x,y)$, $V = V(x,y)$.

При упругом потенциале (11) уравнение для смещения (36) является линейным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами

$$R^2(1+mR^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + R(1+3mR^2)\,\frac{\partial w}{\partial R} + (1-mR^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial V^2} = 0. \tag{40}$$

Это уравнение допускает простые аналитические решения. Перемещение $w = cR^n\cos(kV)$, $c = \mathrm{const}$ является решением уравнения (40), если параметры k, n удовлетворяют соотношению $n^2 - k^2 + mR^2(n^2+2n+k^2) = 0$. Это уравнение при произвольном коэффициенте упругости m удовлетворяется, если $n^2 - k^2 = 0$, $n^2 + 2n + k^2 = 0$, т. е. при $k = 1$, $n = -1$, что дает решение

$$w = (c/R)\cos V = (c/R)(\mathrm{e}^{iV} + \mathrm{e}^{-iV})/2. \tag{41}$$

Решению (41) и потенциалу U' из (11) соответствуют функции (38)

$$F = -2bc(\mathrm{e}^{2iV} + mR^2)/R^3, \qquad G = 2ibc(1+mR^2)\mathrm{e}^{2iV}/R^2,$$

для которых интеграл в (39) берется в конечном виде, при этом само равенство (39) дает трансцендентную зависимость между координатами физической плоскости и плоскости напряжений

$$z = bc(-m\ln R^2 + (1+mR^2)\mathrm{e}^{2iV}/R^2). \tag{42}$$

Комплексное равенство (42) в неявной форме определяет напряжения в физической плоскости $R(x,y)$, $V(x,y)$. При слабой физической нелинейности можно получить явный вид этих зависимостей. Для этого представим данные функции в линейном по m приближении

$$R(x,y) = R^0(x,y) + mR^1(x,y), \qquad V(x,y) = V^0(x,y) + mV^1(x,y). \tag{43}$$

Подставляя выражения (43) в (42), получим равенство

$$z = \frac{bc}{R^{02}}\,\mathrm{e}^{2iV^0} - mbc\Big[\ln R^{02} - \mathrm{e}^{2iV^0}\Big(1 - \frac{2R^1}{R^{03}} + \frac{2iV^1}{R^{02}}\Big)\Big].$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра в разных частях равенства, получим комплексные уравнения для величин R^0, R^1, V^0, V^1

$$z = \frac{bc}{R^{02}}\,\mathrm{e}^{2iV^0}, \qquad \ln R^{02} - \mathrm{e}^{2iV^0}\Big[1 - \frac{2}{R^{02}}\Big(\frac{R^1}{R^0} - iV^1\Big)\Big] = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{gathered} R^{02} = bc/r, \qquad \operatorname{tg} 2V^0 = \operatorname{tg} v = y/x, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \frac{R^1}{R^0} = \frac{bc}{2r}\Big(1 - \frac{x}{r}\ln\frac{bc}{r}\Big), \qquad V^1 = -\frac{bcy}{2r^2}\ln\frac{bc}{r}. \end{gathered} \tag{44}$$

Величинам (43) в рассматриваемом приближении соответствуют декартовы компоненты напряжений

$$P_{zx} = (R^0 + mR^1)\cos(V^0 + mV^1) = R^0\cos V^0[1 + m(R^1/R^0 - V^1\operatorname{tg} V^0)],$$

$$P_{zy} = (R^0 + mR^1)\sin(V^0 + mV^1) = R^0\sin V^0[1 + m(R^1/R^0 + V^1\operatorname{ctg} V^0)].$$

Если учесть соотношения, следующие из (44):

$$\operatorname{tg} V^0 = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2V^0} - 1}{\operatorname{tg} 2V^0} = \frac{r-x}{y}, \quad \sin V^0 = \frac{r-x}{\sqrt{2r(r-x)}}, \quad \cos V^0 = \frac{y}{\sqrt{2r(r-x)}},$$

то декартовы напряжения можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_{zx} &= \frac{\sqrt{bc}}{r\sqrt{2}}\,\frac{y}{\sqrt{r-x}}\Big[1 + \frac{mbc}{2r}\Big(1 + \frac{r-2x}{r}\ln\frac{bc}{r}\Big)\Big], \\ P_{zy} &= \frac{\sqrt{bc}}{r\sqrt{2}}\,\frac{r-x}{\sqrt{r-x}}\Big[1 + \frac{mbc}{2r}\Big(1 - \frac{r+2x}{r}\ln\frac{bc}{r}\Big)\Big]. \end{aligned} \qquad (45)$$

Во внешности круга радиуса r_0 напряжения (45) исчезают на бесконечности и принимают переменные значения

$$\begin{aligned} P^L_{zx} &= \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{r_0}}\cos\frac{v}{2}\Big[1 + \frac{mbc}{2r_0}\Big(1 + (1 - 2\cos v)\ln\frac{bc}{r_0}\Big)\Big], \\ P^L_{zy} &= \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{r_0}}\sin\frac{v}{2}\Big[1 + \frac{mbc}{2r_0}\Big(1 - (1 + 2\cos v)\ln\frac{bc}{r_0}\Big)\Big] \end{aligned} \qquad (46)$$

на граничной окружности L ($x = r_0\cos v$, $y = r_0\sin v$). По этим напряжениям граничная нагрузка вычисляется в соответствии с формулами (20) и (6).

В данном случае согласно (11) и (44) упругий потенциал и его производная равны

$$\begin{aligned} U &= \frac{R^{02}}{8b}\Big(1 + 2m\,\frac{R^1}{R^0}\Big)(2 + mR^{02}) = \frac{c}{4r} + \frac{mbc^2}{8r^2}\Big(3 - 2\cos v\ln\frac{bc}{r}\Big), \\ U' &= -2b(1 + mR^{02}) = -2b(1 + mbc/r). \end{aligned} \qquad (47)$$

Из (11) следует, что в представлении упругого потенциала $U = U^0 + mU^1$ величина $U^1 > 0$. Для выполнения этого условия в выражении (47) следует принять ограничение на константу c

$$3 - 2\ln(bc/r_0) > 0. \qquad (48)$$

Постоянная h в (4), вычисляемая для внешности круга с помощью предельного перехода, равна нулю:

$$h = \lim_{r_*\to\infty}\frac{1}{\pi(r_*^2 - r_0^2)}\int\limits_{r_0}^{r_*} r\,dr\int\limits_0^{2\pi} U(r,v)\,dv = \lim_{r_*\to\infty}\frac{c}{2}\Big(\frac{1}{r_* + r_0} + \frac{3mb}{2}\,\frac{\ln r_* - \ln r_0}{r_*^2 - r_0^2}\Big) = 0,$$

и в соответствии с (3) давление отличается от упругого потенциала только знаком:

$$q = -U = -\frac{c}{4r}\Big[1 + \frac{mbc}{2r}\Big(3 - 2\cos v\ln\frac{bc}{r}\Big)\Big]. \qquad (49)$$

Зависимые компоненты напряжений определяются по формулам (1) в соответствии с (45), (47), (49). На площадке, ортогональной к контурной окружности, нормальное напряжение представляется через декартовы напряжения в виде $P^L_{vv} = P^L_{xx}\sin^2 v - 2P^L_{xy}\sin v\cos v + P^L_{yy}\cos^2 v$. Отсюда, используя выражения (1) напряжений через независимые напряжения и давление, найдем

$$P^L_{vv} = -q^L + (P^L_{zx}\sin v - P^L_{zy}\cos v)^2/U'_L.$$

В соответствии с формулами (46)–(49) в линейном по m приближении справедливы выражения

$$q^L = -\frac{c}{4r_0}\Big[1 + \frac{mbc}{2r_0}\Big(3 - 2\cos v\ln\frac{bc}{r_0}\Big)\Big], \qquad \frac{1}{U'_L} = -\frac{1}{2b}\Big(1 - m\,\frac{bc}{r_0}\Big),$$

$$(P^L_{zx}\sin v - P^L_{zy}\cos v)^2 = bc\,\frac{1-\cos v}{2r_0}\Big[1 + \frac{mbc}{r_0}\Big(1 + \ln\frac{bc}{r_0}\Big)\Big],$$

согласно которым растяжения контура отверстия при линейном и квадратичном упругих потенциалах соответственно равны

$$P^{0L}_{vv} = \frac{c\cos v}{4r_0}, \qquad P^L_{vv} = \frac{c\cos v}{4r_0} + \frac{mbc^2}{8r_0^2}\Big(3 - 2\ln\frac{bc}{r_0}\Big).$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае контур отверстия растянут на одной части и сжат на другой и учет нелинейности потенциала при естественном условии (48) приводит к увеличению растяжения и уменьшению сжатия.

4. Решение уравнения (36) в плоскости напряжений, отвечающее квадратичному упругому потенциалу и удовлетворяющее краевым условиям в физической плоскости, можно найти с использованием решения гармонического уравнения (32), соответствующего линейному потенциалу.

Если использовать преобразование независимой переменной

$$J_0 = \int\frac{dR_0}{R_0} = \ln R_0, \qquad \frac{\partial}{\partial J_0} = R_0\,\frac{\partial}{\partial R_0},$$

то уравнение (37) примет вид уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial J_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial V^2} = 0. \tag{50}$$

В уравнение Лапласа можно преобразовать и уравнение для смещения (36), если умножить его на $RU'/U_0'^2$ и положить

$$J = \int\frac{U'_0}{U'}\,\frac{dR}{R}, \qquad \frac{\partial}{\partial J} = \frac{RU'}{U'_0}\,\frac{\partial}{\partial R}, \qquad \frac{R^2U'}{U'_0}\,\frac{d}{dR}\,\frac{U'}{RU'_0} = -1. \tag{51}$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial J^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial V^2} = 0. \tag{52}$$

Последнее равенство в (51) является уравнением для упругого потенциала

$$2\,\frac{U'}{RU'_0}\,\frac{d}{dR}\,\frac{U'}{RU'_0} = -\frac{2}{R^3}.$$

В результате интегрирования отсюда получаем $U'/U'_0 = \sqrt{1+eR^2}$, $e = \mathrm{const}$. Для того чтобы при $m = 0$ выполнялось условие $U' = U'_0$ и при слабой нелинейности потенциал имел вид (11), постоянную следует взять равной $e = 2m$. Тогда потенциал и преобразованная координата в (51) примут вид

$$U'/U'_0 = \sqrt{1 + 2mR^2} \approx 1 + mR^2, \qquad J = \ln(R/\sqrt{1 + mR^2}\,).$$

Таким образом, при слабой нелинейности потенциала уравнение для перемещения в плоскости напряжений допускает преобразование в гармоническое уравнение (52).

Пусть на контуре сечения цилиндра задано смещение

$$w = w_L \qquad \text{на} \quad L. \tag{53}$$

Решив сначала задачу (32), (53), найдем смещение в физической плоскости для линейного потенциала $w_0 = w_0(x, y)$. Затем, используя связь между координатами $x = x(J_0, V)$, $y = y(J_0, V)$, преобразуем его в решение уравнения (50) в переменных плоскости напряжений $w_0 = w_0(J_0, V)$. Тогда в силу однотипности уравнений (52) и (50) решение w уравнения (52), соответствующего квадратичному потенциалу, можно получить простой заменой J_0 на J в решении $w_0 = w_0(J_0, V)$, т. е. в виде $w = w_0(J, V)$. Наконец, подставив в него переменные $J = J(x, y)$, $V = V(x, y)$, получим смещение в физической плоскости $w(x, y) = w_0(J(x, y), V(x, y))$, а по нему — и поле напряжений.

Используем изложенный метод при решении нелинейной краевой задачи для смещения во внешности эллипса. В случае линейного упругого потенциала решение этой задачи удобно находить с помощью конформного отображения.

Пусть областью S является внешность эллипса с центром в начале отсчета и полуосями k, l ($k > l$). Конформное отображение внешности эллипса на внешность единичного круга $|\zeta| = 1$ дается функцией $z = p(\zeta + n/\zeta)$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$, где параметр $p = (k + l)/2$ ($0 < p < \infty$) характеризует размеры эллипса, а $n = (k - l)/(k + l)$ ($0 < n < 1$) — форму. При $n = 0$ эллипс вырождается в окружность, а при $n = 1$ — в разрез.

Пусть граничное смещение имеет вид $w_L = c \ln r_L = c\,\mathrm{Re}\,(\ln z_L)$, $c = \bar{c} = \mathrm{const}$. В комплексных переменных z, $\bar{z}$ гармоническое уравнение (32) представляется в виде $\partial^2 w_0/\partial z\,\partial\bar{z} = 0$ и имеет общее решение $w_0 = \mathrm{Re}\,(\varphi(z))$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. Краевому условию можно удовлетворить, если принять $\varphi(z) = c \ln z$. Таким образом, перемещение равно $w_0 = (c/2) \ln(z\bar{z})$.

Для линейного потенциала $U'_0 = -2b$ формулы (28) для напряжений допускают комплексную запись

$$P^0_{zx} - iP^0_{zy} = 2b\Big(\frac{\partial w_0}{\partial x} - i\,\frac{\partial w_0}{\partial y}\Big) = 4b\,\frac{\partial w_0}{\partial z}.$$

Так как

$$P^0_{zx} - iP^0_{zy} = R_0 e^{-iV} = e^{J_0 - iV}, \qquad \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{c}{2z},$$

то это равенство и его обращение имеют вид

$$e^{J_0 - iV} = 2bc/z, \qquad z = 2bc e^{-J_0 + iV}.$$

Подстановка выражений для z, $\bar{z}$ в $w_0(z, \bar{z})$ дает решение уравнения (50) $w_0(J_0, V) = c(\ln(2bc) - J_0)$, а замена в нем переменной J_0 на $J = \ln(R/\sqrt{1 + mR^2})$ — решение $w(R, V)$ уравнения (36):

$$w(R, V) = w_0(R, V) = c \ln(2bc\sqrt{1 + mR^2}/R). \tag{54}$$

Решению (54) и потенциалу U' из (11) соответствуют функции (38) и преобразование (39):

$$F(R, V) = -\frac{2bc}{R^2}\,e^{iV}, \quad G(R, V) = \frac{2ibc}{R}\,e^{iV}, \quad z = \frac{2bc}{R}\,e^{iV}, \quad \bar{z} = \frac{2bc}{R}\,e^{-iV}.$$

Обращая преобразование, получаем

$$R = 2bc/r = 2bc/\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{tg} V = \operatorname{tg} v = y/x.$$

Отсюда следует, что декартовы компоненты напряжений в физической плоскости выражаются формулами

$$P_{zx} = R\cos V = \frac{2bc}{r}\cos v = \frac{2bcx}{x^2+y^2}, \quad P_{zy} = R\sin V = \frac{2bc}{r}\sin v = \frac{2bcy}{x^2+y^2}. \tag{55}$$

Напряжения (55) исчезают на бесконечности и принимают переменные значения на граничном эллипсе.

Следствием конформного отображения является преобразование координат

$$x = p(\rho + n/\rho)\cos\theta, \qquad y = p(\rho - n/\rho)\sin\theta. \tag{56}$$

Исключая из этих равенств одну из величин ρ, θ, получим формулы

$$\frac{x^2}{p^2(\rho+n/\rho)^2} + \frac{y^2}{p^2(\rho-n/\rho)^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{4np^2\cos^2\theta} - \frac{y^2}{4np^2\sin^2\theta} = 1,$$

из которых следует, что полярным координатам плоскости круга соответствуют эллиптические координаты плоскости эллипса, при этом линиям $\rho = \mathrm{const}$ отвечают эллипсы, а линиям $\theta = \mathrm{const}$ — гиперболы. На граничном эллипсе ($\rho = 1$) напряжения (55) равны

$$P_{zx}^L = \frac{2bc(1+n)\cos\theta}{p(1+n^2+2n\cos 2\theta)}, \qquad P_{zy}^L = \frac{2bc(1-n)\sin\theta}{p(1+n^2+2n\cos 2\theta)}. \tag{57}$$

В переменных ρ, θ потенциалы (11) имеют значения

$$\begin{gathered} U = (bc^2/r^2)(1 + 2mb^2c^2/r^2), \qquad U' = -2b(1 + 4mb^2c^2/r^2), \\ r^2 = (p^2/\rho^2)(\rho^4 + n^2 + 2n\rho^2\cos 2\theta). \end{gathered} \tag{58}$$

Постоянную h, определенную равенством (4), можно вычислить в эллиптических координатах (56) в виде предела среднего значения упругого потенциала в охватывающем отверстие эллиптическом кольце при неограниченном расширении кольца, используя для интегралов табличные значения [7]:

$$h = \lim_{\rho_*\to\infty} \frac{1}{S_*}\int_1^{\rho_*} d\rho \int_0^{2\pi} U(\rho,\theta) I(\rho,\theta)\, d\theta = -\frac{2bc^2}{p^2}\lim_{\rho_*\to\infty}\Big(\frac{\rho_*^2}{\rho_*^2-1}\,\frac{\ln\rho_*}{\rho_*^2+n}\Big) = 0,$$

где

$$S_* = (\pi p^2/\rho_*^2)(\rho_*^2-1)(\rho_*^2+n), \qquad I = (p^2/\rho^3)(\rho^4+n^2-2n\rho^2\cos 2\theta).$$

Поэтому выражения для давления (3) в области и на границе записываются в виде

$$\begin{gathered} q = -U = -(bc^2/r^2)(1+2mb^2c^2/r^2), \qquad r^2 = (p^2/\rho^2)(\rho^4+n^2+2n\rho^2\cos 2\theta), \\ q_L = (bc^2/(p^2 f))(1 + 2mb^2c^2/(p^2 f)), \qquad f = 1+n^2+2n\cos 2\theta. \end{gathered} \tag{59}$$

Формулы (55), (57)–(59) определяют зависимые компоненты напряжений (1) и контурную нагрузку (6). Действительно, на контуре для упругих потенциалов и компонент нормали в соответствии с (56) и (58) верны выражения

$$U_L = \frac{bc^2}{fp^2}\Big(1 + \frac{2mb^2c^2}{fp^2}\Big), \qquad \frac{1}{U_L'} = -\frac{1}{2b}\Big(1 - \frac{4mb^2c^2}{fp^2}\Big),$$

$$n_x = -\frac{dy}{ds} = -\frac{1-n}{\sqrt{g}}\cos\theta, \quad n_y = \frac{dx}{ds} = -\frac{1+n}{\sqrt{g}}\sin\theta, \quad g = 1 + n^2 - 2n\cos 2\theta,$$

по которым с учетом (5) и (57) определяются контурные напряжения g_t, g_n и контурная нагрузка (6):

$$g_n = P_{zx}^L n_x + P_{zy}^L n_y = -2bc(1-n^2)/(fp\sqrt{g}\,), \qquad g_t = P_{zy}^L n_x - P_{zx}^L n_y = 4bcn\sin 2\theta/(fp\sqrt{g}\,),$$

$$p_t = \frac{4n(1-n^2)bc^2}{f^2gp^2}\Big(1 - \frac{4mb^2c^2}{fp^2}\Big)\sin 2\theta, \qquad p_b = -2bc\,\frac{1-n^2}{fp\sqrt{g}},$$

$$p_n = \frac{bc^2}{fp^2}\Big[1 - \frac{2(1-n^2)^2}{fg} + \frac{2mb^2c^2}{fp^2}\Big(1 + \frac{4(1-n^2)^2}{fg}\Big)\Big].$$

Растяжение контура отверстия определяется эллиптической компонентой напряжений $P_{\theta\theta}^L$ (являющейся нормальным напряжением на площадке, ортогональной граничному эллипсу). Представляя эту компоненту через декартовы компоненты для преобразования координат (56) и выражая последние через независимые напряжения и давление согласно (1), найдем

$$P_{\theta\theta}^L = -q_L + [P_{zx}^L(1+n)\sin\theta - P_{zy}^L(1-n)\cos\theta]^2/(gU_L'),$$

$$g = 1 + n^2 - 2n\cos 2\theta, \qquad 1/U_L' = -(1 - 4mb^2c^2/(p^2f))/(2b).$$

Подставляя в это равенство напряжения (57) и давление (59), получим

$$P_{\theta\theta}^L = P_{\theta\theta}^{0L} + mP_{\theta\theta}^{1L}, \quad P_{\theta\theta}^{0L} = \frac{bc^2}{p^2f}\Big(1 - \frac{8n^2}{fg}\sin^2 2\theta\Big), \quad P_{\theta\theta}^{1L} = \frac{2b^3c^4}{p^4f^2}\Big(1 + \frac{16n^2}{fg}\sin^2 2\theta\Big).$$

В интервале изменения параметра n величины f, g удовлетворяют неравенствам

$$f \geqslant (1-n)^2 > 0, \quad g \geqslant (1-n)^2 > 0, \quad fg > 0 \qquad \text{при} \quad 0 < n < 1.$$

Используя соотношение $fg = (1-n^2)^2 + 4n^2\sin^2 2\theta$, представим $P_{\theta\theta}^{0L}$ в виде

$$P_{\theta\theta}^{0L} = \frac{bc^2}{p^2f}\,\frac{(1-n^2)^2 - 4n^2\sin^2 2\theta}{(1-n^2)^2 + 4n^2\sin^2 2\theta}.$$

Отсюда следует, что при линейном потенциале характер растяжения контура отверстия существенно зависит от его формы:

$$P_{\theta\theta}^{0L} = \frac{bc^2}{p^2} > 0 \quad \text{при} \quad n = 0, \qquad P_{\theta\theta}^{0L} = -\frac{bc^2}{4p^2\cos^2\theta} < 0 \quad \text{при} \quad n = 1.$$

Поэтому в силу непрерывности напряжения контуры слабовытянутых (близких к кругу) отверстий растянуты, а контуры сильновытянутых (близких к разрезу) отверстий сжаты. Добавочное напряжение, обусловленное нелинейностью потенциала, положительно: $P_{\theta\theta}^{1L} > 0$. Следовательно, в данном случае, как и в других рассмотренных выше случаях, учет нелинейности потенциала приводит к увеличению растяжения и уменьшению сжатия.

Если на контуре L с уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$ и нормалью $n_x = y'(s)$, $n_y = -x'(s)$ (s — дуга L; штрих обозначает производную по s) задана допустимая нагрузка $p_t(s)$, $p_n(s)$, $p_b(s)$, то согласно (12), (5), (11) будут определены напряжения $P_{zx}(s)$, $P_{zy}(s)$ и потенциал $U'(s)$. Тогда уравнения (28) (совместные в силу первого равенства в (5)) на L определят перемещение

$$w_L = w_0 + \frac{1}{2b}\int\limits_0^s \frac{x'P_{zx} + y'P_{zy}}{1 + m(P_{zx}^2 + P_{zy}^2)}\,ds,$$

где w_0 — заданная постоянная. Тем самым эта задача сводится к задаче, рассмотренной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
2. **Murnaghan F.** Finite deformations of an elastic solid // Amer. J. Math. 1937. V. 59, N 2. P. 235–260.
3. **Бондарь В. Д.** Напряжения в упругом теле в условиях нелинейной антиплоской деформации // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 5. С. 198–208.
4. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
6. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
7. **Смолянский М. Л.** Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 30/IX 2002 г.