

УДК 532.6

## МНОЖЕСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ВДОЛЬ НЕСТАЦИОНАРНО РАСТЯГИВАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Г. Д. Табассум, А. Мехмуд, М. Усман, А. Дар\*

Международный исламский университет, 44000 Исламабад, Пакистан

\* Университет г. Котли штата Азад Джамму и Кашмир, Котли, Пакистан

E-mails: imgdastgir@gmail.com, ahmerqau@yahoo.co.uk,

usman725.iiui@gmail.com, amanullahdar@hotmail.com

Исследована двойственность решения задачи о неустановившемся течении вдоль растягивающегося цилиндра при наличии всасывания жидкости в направлении нормали к поверхности цилиндра. С использованием численных методов установлено, что при различных значениях параметра кривизны поверхности существует два решения задачи независимо от наличия или отсутствия всасывания на поверхности.

Ключевые слова: двойственность решения, растягивающийся цилиндр, неустановившееся вязкое течение, всасывание, впрыскивание.

DOI: 10.15372/PMTF20200316

**Введение.** Течение вдоль движущейся гладкой поверхности принадлежит классу течений пограничных слоев, структура которых отлична от структуры течения вязкой жидкости, образующегося при обтекании тела конечной длины. Существенный вклад в исследование структуры пограничных слоев внесли работы [1, 2]. Позднее в работах [3, 4] экспериментально было установлено, что свойства течений вдоль движущихся поверхностей такие же, как у течений пограничных слоев. Результаты исследования течений вдоль движущихся гладких поверхностей приведены в работах [5–8]. Характер течения вдоль гладких поверхностей зависит от распределения скоростей движения точек самой поверхности. Для того чтобы учесть эту зависимость, необходимо считать поверхности гибкими и деформируемыми. Течения вдоль движущихся поверхностей встречаются во многих производственных процессах, в частности при производстве полимеров.

Интерес к исследованию течений вдоль движущихся поверхностей существенно возрос после появления в 2005 г. работы [9], в которой была рассмотрена задача о течении вдоль растягивающейся поверхности в предположении, что скорость точек на ней изменяется по закону  $u_w(x) = -ax$  ( $a > 0$ ) (течение вдоль сжимающегося листа). Наиболее важным результатом работы [9] является вывод, что при недостаточном количестве всасываемой жидкости решения задачи не существует, а при достаточно большом количестве всасываемой стенкой жидкости существует несколько решений. После опубликования работы [9] появилось большое количество работ, посвященных исследованию течений вдоль сжимающейся поверхности, в которых подтверждены основные результаты этой работы. По мнению авторов настоящей работы, данные выводы справедливы не только в случае сжимающейся поверхности, но и в случае растягивающейся поверхности. Более того,

утверждение, что в случае сжимающейся поверхности решения не существует, является ошибочным. Согласно данным работы [8] в случае растягивающейся (сжимающейся) поверхности решение существует, если движение этой поверхности настолько медленное, что в окрестности поверхности отсутствует конвективный перенос. В [10] с использованием математических методов установлена множественность решений автомодельных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости вблизи движущихся поверхностей. Обнаружено, что показатель  $m$  в степенном законе скорости движения растягивающейся (сжимающейся) поверхности ( $u_w(x) = -ax^m$ ) входит в два инерционных слагаемых уравнения движения с различными знаками в случае растягивающейся и сжимающейся поверхности (например, в двумерном случае автомодельное уравнение изменения количества движения имеет вид  $m f'^2 - ((m+1)/2) f f'' = \pm f'''$  [8]). В работе [10] отмечено, что для существования единственного решения уравнения необходимо, чтобы между двумя слагаемыми, содержащимися в левой части этого уравнения, имел место некоторый баланс (например, “положительный”). В том случае, когда “положительный” баланс становится “отрицательным” (при некоторых значениях показателя  $m$ ), уравнение имеет несколько решений. При достаточно большом “отрицательном” балансе решения не существует. Для его существования необходимо достаточно большое количество жидкости, всасываемой растягивающейся (сжимающейся) поверхностью. В случае двумерного течения вдоль растягивающейся поверхности при  $m \geq 0$  имеет место “положительный” баланс (при котором решение единственно), при  $-1/3 < m < 0$  баланс становится “отрицательным” и возможно несчетное множество решений (см. [11]), при  $m \leq -1/3$  решений, имеющих физический смысл, не существует (см. [10]). Однако при  $m \leq -1/3$  решение может существовать при достаточно большом количестве жидкости, всасываемой стенкой. Анализируя результаты исследований, авторы работ [8, 10] сделали вывод, что аналогичная ситуация должна иметь место и в случае сжимающегося листа. Коэффициенты при инерционных членах в уравнении движения зависят от значений показателя  $m$ . Таким образом, существуют значения показателя  $m$ , при которых задача имеет единственное решение, более одного решения или не имеет решений.

В данной работе исследуется двойственность решения задачи о неустановившемся двумерном течении вязкой жидкости, инициированном внезапным растяжением цилиндра, который также расширяется.

**1. Математическая постановка задачи.** Рассматривается длинный тонкостенный цилиндр радиусом  $R_0$ , погруженный в вязкую жидкость. При  $t \leq 0$  ( $t$  — время) цилиндр и жидкость находятся в состоянии покоя. Схема течения и система координат приведены на рис. 1. Внезапно цилиндр начинает растягиваться с уменьшающейся во времени скоростью, в результате чего возникает неустановившееся течение пограничного слоя жидкости. Скорость движения точек стенки цилиндра изменяется во времени по закону

$$u_w(z, t) = az/\tau, \quad \tau = at, \quad (1)$$

в соответствии с которым существует автомодельное решение при условии, что радиус цилиндра непрерывно увеличивается по закону

$$R(z, t) = R_0 t^{1/2}, \quad t > 0, \quad (2)$$

где  $R_0$  — радиус цилиндра при  $t \leq 0$ .

Начальные условия для жидкости записываются следующим образом:

$$t \leq 0: \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \forall x, y. \quad (3)$$

В момент начала движения цилиндра в окрестности его поверхности мгновенно возникает движение жидкости. Закон увеличения толщины пограничного слоя во времени ( $\sim \sqrt{vt}$ ) аналогичен соответствующему закону в классической задаче Рэлея. Поверхность цилиндра

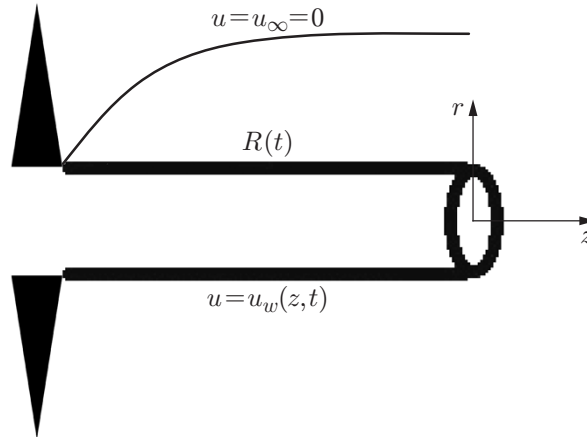


Рис. 1. Схема течения

полагается пористой, поэтому возможно течение жидкости через цилиндр в направлении нормали к нему. В соответствии с этим предположением краевые условия при  $t > 0$  на поверхности цилиндра записываются следующим образом:

$$u = u_w(z, t), \quad v = v_w(z, t), \quad z = R(z, t); \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Для того чтобы существовало автомодельное решение, принимается закон  $v_w(z, t) = dz^{-1/2}$  (см., например, [8]). Положительное и отрицательное значения константы  $d$  соответствуют зависящим от времени впрыскиванию и всасыванию поверхностью цилиндра соответственно.

Течение вязкой жидкости в окрестности движущихся поверхностей рассматривалось в различных работах при различных предположениях. Например, в [12] изучалось нестационарное течение, вызванное растяжением цилиндра с увеличивающимся во времени радиусом.

Приведем уравнения рассматриваемой задачи. В соответствии с выбранной системой координат (см. рис. 1) в случае неустановившегося двумерного потока выражение для вектора скорости записывается в виде  $\mathbf{V} = [v(r, z, t), 0, u(r, z, t)]$ . Тогда уравнения пограничного слоя вязкой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial}{\partial z}(ru) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Заметим, что условия (1), (2) являются следствием инвариантности системы (6), (7) относительно преобразований симметрии. Выполнение этих условий необходимо для существования автомодельного решения. Начальные и краевые условия также удовлетворяют преобразованиям подобия переменных:

$$u = \frac{u_w(z, t)}{\eta} f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{u_w(z, t)\nu}{z}} f(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{u_w(z, t)}{\nu z}} r. \quad (8)$$

Подробный вывод преобразований подобия и критерий существования автомодельного решения содержатся в работе [8]. В результате преобразования подобия переменных (8) уравнение (6) удовлетворяется тождественно, а уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{1}{2} \left( \frac{f'}{\eta} + f'' \right) + \left( \frac{f'}{\eta} \right)^2 - \frac{f}{\eta} \left( \frac{f''}{\eta} - \frac{f'}{\eta^2} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \frac{f'}{\eta} \right). \quad (9)$$

Краевые условия (4), (5) записываются в виде

$$\eta = \text{Re}R_0: \quad f' = \text{Re}R_0, \quad f = -\frac{d}{\sqrt{a\nu}} \text{Re}R_0; \quad (10)$$

$$\eta = \infty: \quad f' = 0. \quad (11)$$

Начальное условие (3) и краевые условия (5) сводятся к условию (11). Систему уравнений (9)–(11) можно упростить и привести к виду, удобному для численного решения, с помощью преобразования  $\bar{\eta} = (\eta^2 - \text{Re}R_0^2)/(2\text{Re}R_0)$  и масштабирования функции  $f(\eta)$ . В результате система (9)–(11) преобразуется к виду (черта над переменными опущена)

$$f'(1 - f') + ((1 + 2\kappa\eta)/(2\kappa) + f)f'' = -((1 + 2\kappa\eta)f')'; \quad (12)$$

$$f'(0) = 1, \quad f(0) = S, \quad f'(\infty) = 0, \quad (13)$$

где  $\kappa = 1/\text{Re}R_0$ ;  $\text{Re}R_0 = \sqrt{aR_0^2/\nu}$  — параметр кривизны поверхности;  $S = -d/\sqrt{a\nu}$  — параметр всасывания или впрыскивания (значения  $S > 0$  соответствуют всасыванию,  $S < 0$  — впрыскиванию). При фиксированных значениях параметров  $a$ ,  $\nu$  малым значениям параметра  $\kappa$  соответствуют цилиндры большого радиуса, большим значениям  $\kappa$  — цилиндры малого радиуса. Поэтому оценить влияние кривизны поверхности на характер решения можно только при больших значениях параметра  $\kappa$ , а именно при  $\kappa > 1$ .

**2. Метод решения.** Автомодельная система (12), (13) решалась численно с использованием метода Рунге — Кутты и метода пристрелки. Систему (12), (13) можно решить также с использованием других численных методов или процедуры `bvp4c` пакета MATLAB. В данной работе эта система решалась численно с помощью метода Рунге — Кутты, метода пристрелки и процедуры `bvp4c` пакета MATLAB. С использованием обоих методов получены одинаковые результаты, причем в обоих случаях найдено два решения. Ниже приводятся результаты, полученные с использованием метода Рунге — Кутты и метода пристрелки. По-видимому, методы Рунге — Кутты и пристрелки являются наиболее подходящими для обнаружения второго решения.

Для того чтобы использовать метод Рунге — Кутты и метод пристрелки, обыкновенное дифференциальное уравнение (12) необходимо преобразовать в систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$f' = p, \quad p' = q, \quad (1 + 2\kappa\eta)q' = -2\kappa q - p(1 - p) - ((1 + 2\kappa\eta)/(2\kappa) + f)q$$

с краевыми условиями

$$f(0) = S, \quad p(0) = 1, \quad q(0) = b, \quad p(\infty) = 0,$$

где  $b$  — начальное значение, при котором решение системы должно удовлетворять краевому условию  $p(\infty) = 0$ . Затем начальное значение уточняется с использованием итерационной процедуры Ньютона — Рафсона. Требуемое значение  $b$  получается в результате нескольких итераций.

**3. Результаты численного решения и их обсуждение.** В результате численного решения системы (12), (13) методом Рунге — Кутты четвертого порядка установлено, что решение задачи существует при всех допустимых значениях параметра  $\kappa$  ( $\kappa \geq 0$ ), но не для всех вещественных значений параметра  $S$  ( $S \in \mathbb{R}$ ). Для ряда значений параметра  $\kappa$  определены значения параметра  $S$ , при которых существует решение задачи, имеющее физический смысл. Для определения точности и обоснованности полученных численных решений вычислялась невязка решения, а также проводилось сравнение полученных решений с известными решениями. Зависимость невязки решения от параметра  $\eta$  при  $S = -2$

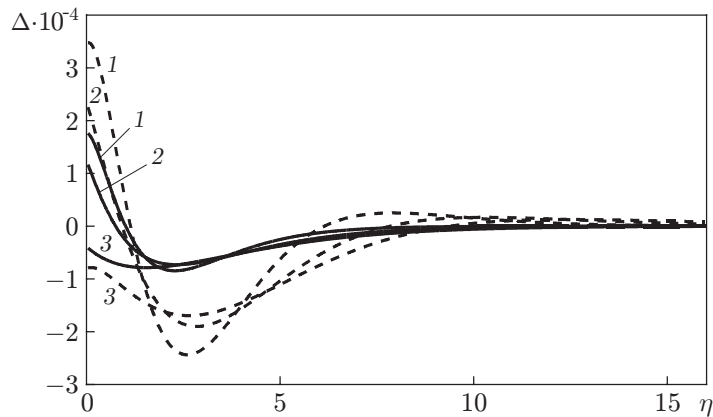


Рис. 2. Зависимость невязки  $\Delta$  от параметра  $\eta$  при  $S = -2$ :  
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; 1 —  $\kappa = 0,5$ ,  
2 —  $\kappa = 0,75$ , 3 —  $\kappa = 1,0$

Таблица 1

Значения величины  $f''(0)$ , вычисленные двумя методами,  
при  $S = 0$  и различных значениях параметра кривизны  $\kappa$

$\kappa$	$-f''(0)$		
	Данные работы [8]	Данные настоящей работы	
		Первое решение	Первое решение
0,05	10,0990	10,0990	128,8128
0,10	5,1927	5,1927	27,5855
0,20	2,8531	2,8531	8,6069
0,40	1,8261	1,8261	4,1246
0,50	1,6563	1,6563	3,5408
1,00	1,4281	1,4281	2,7427
1,10	1,4241	1,4241	2,7086
1,14	1,4241	1,4241	2,6993
1,143	1,4242	1,4242	2,6987
1,15	1,4243	1,4243	2,6973
1,50	1,4497	1,4497	2,6857
2,00	1,5244	1,5244	2,7717
3,00	1,7167	1,7167	3,0591
4,00	1,9230	1,9230	3,3885
5,00	2,1302	2,1302	3,7268

приведена на рис. 2. Невязка не превышает  $3 \cdot 10^{-4}$ , что свидетельствует о высокой точности численного решения. В табл. 1 приведены численное решение, полученное в данной работе, и решение, представленное в работе [8]. Эти решения хорошо согласуются.

При численном решении задачи обнаружено существование еще одного (второго) решения, имеющего структуру пограничного слоя. На рис. 3 приведены зависимости величины  $f''(0)$  от параметра  $S$  при различных значениях параметра  $\kappa$ . Видно, что для обоих решений с увеличением параметра  $\kappa$  величина  $f''(0)$  увеличивается, причем для второго решения скорость этого увеличения существенно больше. Из приведенных на рис. 3,а зависимостей следует, что решение задачи существует как в случае всасывания, так и в случае впрыскивания. Однако неожиданным является тот факт, что решение существует при достаточно больших значениях параметра впрыскивания. На рис. 3,б видно, что

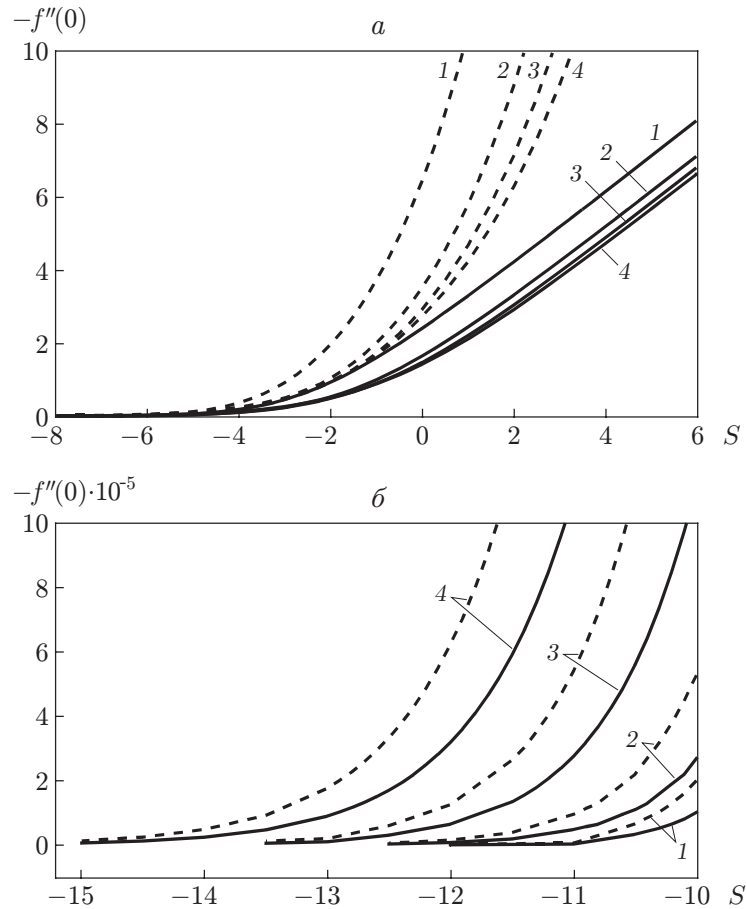


Рис. 3. Зависимость величины  $-f''(0)$  от параметра всасывания (впрыскивания)  $S$  при различных значениях параметра кривизны  $\varkappa$ :  
 а —  $-8 \leq S \leq 6$ , б —  $-15 \leq S \leq -10$ ; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; 1 —  $\varkappa = 0,25$ , 2 —  $\varkappa = 0,50$ , 3 —  $\varkappa = 0,75$ , 4 —  $\varkappa = 1,00$

от кривизны поверхности зависит существование потока вдоль поверхности при наличии впрыскивания. Из приведенных зависимостей следует также, что с увеличением параметра впрыскивания первое и второе решения сближаются и при критическом значении параметра впрыскивания  $S = S_c$  совпадают. При  $|S| > |S_c|$  решения не существует. В то же время при увеличении параметра всасывания различие между двумя решениями увеличивается. Также из зависимостей, приведенных на рис. 3, а, следует, что при увеличении параметра всасывания величина  $f''(0)$  для второго решения неограниченно возрастает.

В табл. 2, 3 приведены значения величины  $-f''(0)$  при различных значениях параметров  $S$  и  $\varkappa$ .

Значения  $f''(0)$  становятся отрицательными по мере приближения параметра  $S$  к значению  $S_c$ . При  $S \rightarrow S_c$  величина  $f''(0)$  стремится к нулю. При  $S < S_c$  значения  $f''(0)$  не становятся положительными, как это имеет место в некоторых течениях типа течения пограничного слоя. Это означает, что при  $S = S_c$  прекращается разделение потоков и при этом не возникает обратного течения. Следовательно, с увеличением количества жидкости, впрыскиваемой стенкой, толщина пограничного слоя уменьшается и его течение прекращается. Факт существования течения при большом количестве впрыскиваемой жидкости требует дальнейшего исследования. Очевидным объяснением данного факта является осесимметричный характер течения вдоль растягивающейся поверхности, а также

Таблица 2

Зависимость величины  $-f''(0)$  от параметра  $S$  при различных значениях параметра  $\varkappa$ 

$S$	$\varkappa = 0,25$		$\varkappa = 0,5$		$\varkappa = 1,0$		$\varkappa = 1,5$	
	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение
10,0000	12,0842	156,8071	11,0939	95,1697	10,6034	56,1938	10,4443	41,5483
9,0000	12,0842	127,4717	10,1035	77,1900	9,6151	46,1532	9,4577	34,4830
8,0000	10,1009	101,9822	9,11522	61,4704	8,6297	37,2398	8,4747	28,1710
7,0000	9,1121	80,1185	8,1298	47,9521	7,6483	22,8042	7,4969	22,6201
6,0000	8,1259	61,6415	7,1485	36,5430	6,6729	22,8042	6,5267	17,8264
5,0000	7,1435	46,2945	6,1733	27,1190	5,7064	17,2316	5,5683	13,7715
4,0000	6,1665	33,8051	5,2072	19,5262	4,7544	12,6874	4,6292	10,4190
3,0000	5,1979	23,8854	4,2561	13,5842	3,8266	9,0844	3,7220	7,7138
2,0000	4,2427	16,2356	3,3307	9,0899	2,9407	6,3136	2,8683	5,5824
1,0000	3,3103	10,5436	2,4515	5,8207	2,1271	4,2461	2,0994	3,9366
0	2,4194	6,4881	1,6563	3,5407	1,4281	2,7427	1,4497	2,6857
-1,0000	1,6064	3,7411	1,0000	2,0150	0,8820	1,6772	0,9422	1,7537
-2,0000	0,9311	1,9804	0,5291	1,0434	0,5000	0,9545	0,5768	1,0851
-3,0000	0,4540	0,9259	0,2434	0,4776	0,2605	0,5004	0,3333	0,6330
-4,0000	0,1820	0,3652	0,0972	0,1906	0,1251	0,2413	0,1822	0,3483
-5,0000	0,0593	0,1181	0,0338	0,0662	0,0557	0,1075	0,0945	0,1815
-9,2493	0	0	0	0,0001	0,0008	0,0016	0,0034	0,0067
-9,6204	—	—	0	0	0,0005	0,0010	0,0025	0,0048
-11,6210	—	—	—	—	0	0	0,0004	0,0008
-13,7621	—	—	—	—	—	—	0	0

Таблица 3

Зависимость величины  $-f''(0)$  от параметра  $\varkappa$  при различных значениях параметра  $S$ 

$\varkappa$	$S = -2$		$S = -1$		$S = 0$		$S = 2$	
	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение
0,009	53,5742	11 551,1608	54,5738	12 165,5728	55,5735	12 800,9569	57,5729	14 135,8500
0,010	48,0208	-8493,2222	49,0204	8006,4913	50,0199	9518,8541	52,0192	10 622,1160
0,025	18,0554	578,7834	19,0524	667,0329	20,0498	763,7360	22,0453	983,9553
0,050	8,1229	76,9417	9,1097	100,6221	10,0990	128,8128	12,0828	200,2598
0,075	4,8709	24,8957	5,8376	36,0585	6,8134	50,3174	8,7807	89,6781
0,100	3,2989	11,8384	4,2351	18,5316	5,1927	27,5855	7,1406	54,3186
0,250	0,9311	1,9804	1,6064	3,7311	2,4194	6,4881	4,2427	16,2356
0,500	0,4983	1,0435	1,0000	2,0150	1,6563	3,5408	3,3307	9,0898
1,000	0,5000	0,9546	0,8820	1,6771	1,4281	2,7427	2,9407	6,3134
2,000	0,6727	1,2527	1,0355	1,9031	1,5244	2,7717	2,8778	5,3231
3,000	0,8775	1,6114	1,2451	2,2520	1,7167	3,0591	2,9834	5,2555
4,000	1,0846	1,9716	1,4591	2,6118	1,9230	3,3885	3,1339	5,4016
5,000	1,2896	2,3262	1,6705	2,9682	2,1302	3,7268	3,3022	5,6270
6,000	1,4917	2,6751	1,8784	3,3199	2,3365	4,0668	3,4789	5,8910
7,000	1,6912	3,0205	2,0830	3,6680	2,5401	4,4080	3,6603	6,1790
8,000	1,8886	3,3663	2,2852	4,0180	2,7410	4,7530	—	—
9,000	2,0840	3,7150	2,4850	4,3720	—	—	—	—
10,000	2,2800	4,0710	—	—	—	—	—	—

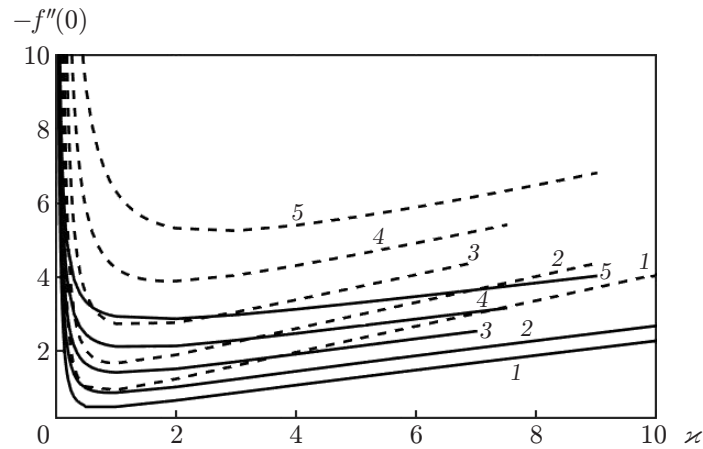


Рис. 4. Зависимость величины  $-f''(0)$  от параметра кривизны  $\varkappa$  при различных значениях параметра всасывания (впрыскивания):  
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; 1 —  $S = -2$ , 2 —  $S = -1$ , 3 —  $S = 0$ , 4 —  $S = 1$ , 5 —  $S = 2$

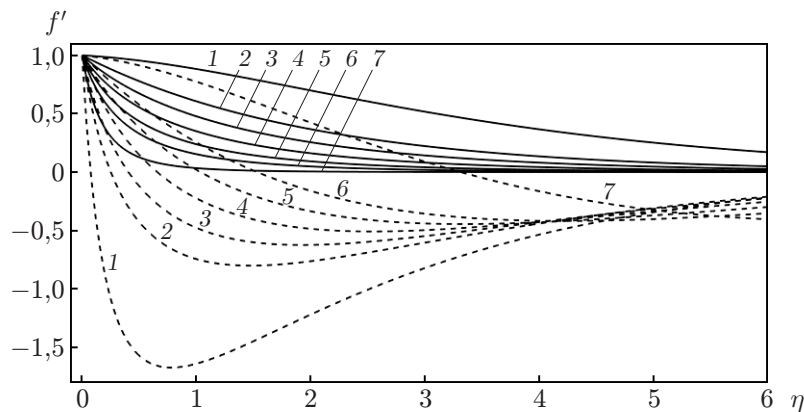


Рис. 5. Зависимость скорости от координаты  $\eta$  при  $\varkappa = 1$  и различных значениях параметра всасывания (впрыскивания):  
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; 1 —  $S = -5$ , 2 —  $S = -2$ , 3 —  $S = -1$ , 4 —  $S = 0$ , 5 —  $S = 1$ , 6 —  $S = 2$ , 7 —  $S = 5$

зависимость этого течения от кривизны поверхности. Тем не менее требуется дальнейшее исследование таких течений.

Из данных, приведенных в табл. 2, следует, что с увеличением параметра кривизны поверхности разделение потоков происходит при бóльших значениях параметра впрыскивания (см. также [13]). Эта закономерность следует также из зависимостей, приведенных на рис. 3, 4. С увеличением параметра кривизны величина  $f''(0)$  возрастает. На рис. 4 видно, что с увеличением параметра впрыскивания величина  $f''(0)$  уменьшается, но при фиксированном значении  $S$  она увеличивается с увеличением параметра кривизны  $\varkappa$ .

Из приведенных на рис. 5 зависимостей скорости от координаты  $\eta$  следует, что для обоих решений толщина пограничного слоя существенно увеличивается с увеличением параметра впрыскивания. Однако при фиксированном значении  $S$  в нижней половине пограничного слоя, соответствующего второму решению, возникает обратное течение. С увеличением параметра всасывания расстояние от растягивающейся поверхности, на котором возникает обратное течение, уменьшается. Однако, как отмечено выше, обратное течение



не возникает на поверхности цилиндра. По-видимому, в рассматриваемой задаче возникновение обратного течения невозможно. Поэтому второе решение не имеет физического смысла и его можно не исследовать подробно. Результаты численного решения, приведенные в табл. 2, 3, могут быть использованы при дальнейших исследованиях рассматриваемой задачи.

**Заключение.** В работе установлено существование двух решений задачи о течении вдоль растягивающейся поверхности. Этот факт не был ранее отмечен в литературе. Более того, существует ряд работ, в которых отрицается возможность существования второго решения в задаче о течении вдоль растягивающейся поверхности. Использование результатов данного исследования позволяет более точно описать структуру течений типа течения пограничного слоя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Blasius H.** Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys. 1908. Bd 56. S. 1–37.
2. **Falkner V. M., Skan S. W.** Some approximate solutions of the boundary-layer equations // Philos. Mag. 1931. V. 12. P. 865–896.
3. **Sakiadis B. C.** Boundary-layer behavior on continuous solid surface. 1. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow // AIChE. 1961. V. 7, N 1. P. 26–28.
4. **Sakiadis B. C.** Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces. 3. The boundary-layer on a continuous cylindrical surface // AIChE. 1961. V. 7, N 3. P. 467–472.
5. **Crane L. J.** Flow past a stretching sheet // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
6. **Banks W. H. H.** Similarity solution of the boundary-layer equations for a stretching wall // J. Mecaniq. Theor. Appl. 1983. V. 2, N 3. P. 375–392.
7. **Magyari E., Keller B.** Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface // J. Phys. D. Appl. Phys. 1999. V. 32, N 5. P. 577–585.
8. **Mehmood A.** Viscous flows: Stretching and shrinking of surfaces. S. l.: Springer, 2017.
9. **Miklavcic M., Wang C. Y.** Viscous flow due to a shrinking sheet // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64, N 2. P. 283–290.
10. **Mehmood A., Usman M.** Fascination of the shrinking sheet flow: A reality or a misconception // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, N 3. P. 483–490.
11. **Paullet J. E., Previte J. P.** Comment on “Existence and uniqueness results for a non-linear differential equation arising in viscous flow over non-linearly stretching sheet” // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25. P. 1114–1117.
12. **Fang T. G., Zhang J., Fang Z. Y., Hua T.** Unsteady viscous flow over an expanding stretching cylinder // Chinese Phys. Lett. 2011. V. 28, N 12. 1247071-4.
13. **Probstein R. F., Elliott D.** The transverse curvature effect in compressible axially symmetric laminar boundary-layer flow // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23, N 3. P. 208–224.

*Поступила в редакцию 29/VIII 2019 г.,  
после доработки — 30/XI 2019 г.  
Принята к публикации 23/XII 2019 г.*