

УДК 533.72

ГРАВИТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ РАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ В ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

Н. В. Малай, Е. Р. Щукин*, А. А. Стукалов, К. С. Рязанов

Белгородский государственный университет, 308015 Белгород

* Институт высоких температур, 127412 Москва

E-mail: malay@bsu.edu.ru

В приближении Стокса выполнен анализ стационарного движения равномерно нагретой аэрозольной частицы сферической формы в вязкой газообразной среде при условии, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее среды. С учетом зависимостей плотности газообразной среды, вязкости и теплопроводности от температуры получено аналитическое выражение для силы сопротивления и скорости гравитационного движения равномерно нагретой твердой сферической частицы. Численно показано, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на сопротивление и скорость гравитационного движения.

Ключевые слова: задача Стокса, система газ — частица, неизотермичность.

Введение. Знание величины силы сопротивления окружающей среды движению частицы необходимо при решении многих научных и технических проблем, например при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение частиц, при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц, при анализе процесса осаждения частиц в плоскопараллельных каналах с различной температурой, а также в связи с необходимостью решения различных вопросов, связанных с очисткой промышленных отходов от аэрозольных частиц. Известно, что силу сопротивления можно существенно изменять, проводя целенаправленный нагрев частицы, например в поле лазерного излучения при просветлении облаков и туманов, при горении частиц в химически активных средах, при переносе частиц в фотопреципитаторах, когда движение частиц происходит при значительных относительных перепадах температуры в их окрестности. Под относительным перепадом температуры понимается разность между температурами поверхности частицы и среды вдали от нее. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_{eS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$, и значительным, если $(T_{eS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim 0(1)$ (T_{eS} — средняя температура поверхности частицы; $T_{e\infty}$ — температура газообразной среды вдали от нее). Нагретая поверхность аэрозольной частицы оказывает существенное влияние на теплофизические характеристики окружающей газообразной среды и как следствие на величину силы сопротивления.

Задача о силе сопротивления движению нагретой твердой сферической частицы впервые решена в работе [1], однако из-за неудачно выбранного метода решения уравнений газодинамики полученные в ней результаты непригодны для использования при больших

Работа выполнена в рамках программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (код проекта РНП.2.1.1.3263) и гранта Белгородского государственного университета.

перепадах температуры. Кроме того, в [1] рассмотрен лишь случай линейной зависимости теплопроводности и динамической вязкости от температуры.

Для случая, когда вязкость, теплопроводность, диффузия описываются степенными функциями [2], аналитическое решение задачи о силе сопротивления движению нагретой сферической частицы получено в работах [3–6], результаты которых позволяют проводить оценки при больших перепадах температуры.

В некоторых работах при решении задач с неизотермическими течениями дополнительно учитывались так называемые барнеттовские температурные напряжения [7], например, задача об обтекании сильно нагретой сферы в работе [8] решена численно, в [9] — аналитически. Барнеттовские напряжения могут оказать значительное влияние на движение частиц при числах Маха $M \rightarrow 0$ [8]. В настоящей работе движение частицы рассматривается при достаточно малых числах Кнудсена и не очень малых числах Маха, когда даже при относительном перепаде температуры порядка единицы температурными напряжениями можно пренебречь. Следует отметить, что решения дифференциальных уравнений, описывающих поля скорости и давления, в виде степенных рядов, полученные методом понижения порядка, довольно громоздки. В данной работе решение уравнений газовой динамики находится в виде обобщенных степенных рядов, что существенно упрощает вычисления.

1. Постановка задачи. Рассматривается обтекание в газообразной среде равномерно нагретой аэрозольной частицы сферической формы при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности.

До высоких температур частица может быть нагрета, например, в поле лазерного излучения. При этом распределение температуры по поверхности частицы близко к однородному, в случае если теплопроводность частицы значительно больше теплопроводности газа или если длина волны излучения значительно больше радиуса частицы [10].

При анализе обтекания аэрозольной частицы будем полагать, что в силу малости времени тепловой релаксации системы газ — частица все процессы в ней протекают квазистационарно. Движение частицы происходит при числах Пекле и Рейнольдса, существенно меньших единицы. Поскольку $(T_{eS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim 0(1)$, необходимо учитывать зависимость вязкости и теплопроводности газообразной среды от температуры. В данной работе используются степенные зависимости [2]

$$\mu_e = \mu_{e\infty}(T_e/T_{e\infty})^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty}(T_e/T_{e\infty})^\alpha, \quad 0,5 \leq \alpha \leq 1,0, \quad 0,5 \leq \beta \leq 1,0,$$

где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$; $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$; μ_e, λ_e — динамическая вязкость и теплопроводность газообразной среды соответственно; T_e — температура газа. По составу частица полагается однородной, крупной (число Кнудсена $Kn = \lambda/R \ll 0,01$, где λ — средняя длина свободного пробега молекул газа), фазовый переход на поверхности частицы отсутствует. Радиус частиц достаточно мал, и влиянием гравитационной конвекции на распределение температуры можно пренебречь.

В рамках принятых допущений в приближении Стокса уравнения и граничные условия для скорости U_e , давления P_e и температуры T_e имеют вид [11, 12]

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_e \left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^e}{\partial x_m} \right) \right] + \mathbf{F}_k^{(mg)}, \quad \text{div}(\rho_e U_e) = 0; \quad (1.1)$$

$$\text{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0;$$

$$r = R, \quad U_r^e = 0, \quad U_\theta^e = 0, \quad T_e = T_{eS}; \quad (1.2)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{U}_e \rightarrow U_\infty \mathbf{e}_r \cos \theta - U_\infty \mathbf{e}_\theta \sin \theta, \quad T_e \rightarrow T_{e\infty}, \quad P_e \rightarrow P_{e\infty}. \quad (1.3)$$

Здесь U_r^e, U_θ^e — радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости газа в сферической системе координат \mathbf{U}_e ; ρ_e — плотность газообразной среды; $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$; \mathbf{U}_∞ —

скорость набегающего потока, определяемая из условия обращения в нуль полной силы, действующей на частицу; e_r, e_θ — единичные векторы сферической системы координат; $\mathbf{F}^{(mg)}$ — вектор гравитационной силы (\mathbf{U}_∞ и $|\mathbf{F}^{(mg)}|$ связаны таким образом, чтобы полная сила, действующая на частицу, была равна нулю).

На поверхности частицы задаются условия прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости и условие постоянной температуры. В качестве граничных условий на бесконечности, т. е. вдали от частицы, приняты условия (1.3). Здесь и далее индекс e соответствует газу, индекс “ ∞ ” — физическим величинам, характеризующим внешнюю среду в невозмущенном потоке.

2. Поля скорости и температуры. Скорость гравитационного падения частицы. Для того чтобы определить силу, действующую на равномерно нагретую аэрозольную частицу, и скорость ее гравитационного падения, необходимо найти распределение температуры, скорости и давления в окрестности этой частицы. Общее решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям, имеет вид

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) = (1 + \Gamma_0/y)^{1/(1+\alpha)}, \quad (2.1)$$

где $t_e = T_e/T_{e\infty}$; $y = r/R$ — безразмерная радиальная координата; $\Gamma_0 = t_S^{1+\alpha} - 1$ — безразмерный параметр, характеризующий перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее; $t_S = T_{eS}/T_{e\infty}$. С учетом (2.1) получаем

$$\mu_e = \mu_\infty(1 + \Gamma_0/y)^{\beta/(1+\alpha)}. \quad (2.2)$$

В дальнейшем соотношение (2.2) используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности частицы.

Вид граничных условий (1.2), (1.3) позволяет разделить переменные при решении уравнений газовой динамики. Компоненты скорости и давления находим в виде

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta, \quad P_e(y, \theta) = P_{e\infty} + h(y) \cos \theta, \quad (2.3)$$

где $G(r)$, $g(r)$, $h(r)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты r . Подставив (2.2), (2.3) в уравнение Навье — Стокса и разделив переменные, получаем соотношение

$$\frac{d^3 G}{dy^3} + \frac{1}{y} (4 + \gamma_1 \ell) \frac{d^2 G}{dy^2} - \frac{1}{y^2} (4 + \gamma_2 \ell - \gamma_3 \ell^2) \frac{dG}{dy} - \frac{1}{y^3} (2 - \ell) \gamma_3 \ell^2 G = -\frac{D}{y^4 t_{e0}^\beta}, \quad (2.4)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1 - \beta}{1 + \alpha}, \quad \gamma_2 = 2 \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad D = \text{const}, \quad \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}.$$

Решение уравнения (2.4) будем искать в виде обобщенного степенного ряда [13, 14]. Сначала найдем решение однородного уравнения (2.4):

$$\frac{d^3 G}{dy^3} + \frac{1}{y} (4 + \gamma_1 \ell) \frac{d^2 G}{dy^2} - \frac{1}{y^2} (4 + \gamma_2 \ell - \gamma_3 \ell^2) \frac{dG}{dy} - \frac{1}{y^3} (2 - \ell) \gamma_3 \ell^2 G = 0. \quad (2.5)$$

Для однородного уравнения (2.5) точка $y = 0$ является регулярной особой точкой [13]. Решение этого уравнения ищем в виде

$$G = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n, \quad C_0 \neq 0. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем определяющее уравнение $\rho(\rho + 3)(\rho - 2) = 0$, корни которого равны $\rho_1 = -3$, $\rho_3 = 0$, $\rho_2 = 2$. Большему из корней соответствует решение

$$G_1 = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \ell^n, \quad C_0^{(1)} = 1.$$

Второе решение однородного уравнения (2.5), удовлетворяющее условию конечности при $y \rightarrow \infty$, и частное решение уравнения (2.4) ищем соответственно в виде

$$G_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} \ell^n + \omega_3 \ln y \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \ell^n, \quad G_2 = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \ell^n + \frac{\omega_2}{y^3} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \ell^n.$$

Выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$ ($n \geq 1$), $C_n^{(2)}$ ($n \geq 3$), $C_n^{(3)}$ ($n \geq 4$), найденных методом неопределенных коэффициентов, имеют вид

$$\begin{aligned} C_n^{(1)} &= \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \{ [(n-1)(3n^2 + 13n + 8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)] C_{n-1}^{(1)} - \\ &\quad - [(n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2 - 4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3)] C_{n-2}^{(1)} + \\ &\quad + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{n-3}^{(1)} \}, \\ C_n^{(2)} &= \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \left([(n-1)(3n^2 + n - 6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2] C_{n-1}^{(2)} - \right. \\ &\quad \left. - [\gamma_3(n+1) + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1 n(n-2) + \gamma_2(n-2)] C_{n-2}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \gamma_1(n-3)] C_{n-3}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \{ (3k^2 + 16k + 15) C_k^{(1)} - [(k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2] C_{k-1}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + [3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3] C_{k-2}^{(1)} \} - 6(-1)^n \frac{\omega_0!}{n!(\omega_0 - n)!} \right), \\ C_n^{(3)} &= \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left((n-1)(3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2) C_{n-1}^{(3)} - \right. \\ &\quad \left. - [(n-1)(n-2)(3n-4) + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3] C_{n-2}^{(3)} + \right. \\ &\quad \left. + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{n-3}^{(3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \{ (3k^2 + 16k + 15) C_k^{(1)} - [(k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2] C_{k-1}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + [3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3] C_{k-2}^{(1)} \} \right). \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned} C_0^{(1)} &= 1, \quad C_0^{(3)} = 1, \quad C_1^{(3)} = 0, \quad C_2^{(3)} = \gamma_3/4, \quad C_3^{(3)} = 1, \\ \omega_3/(2\Gamma_0^3) &= -\gamma_3(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2)/60, \quad C_0^{(2)} = 1, \quad C_2^{(2)} = 1, \end{aligned}$$

$$\omega_2/\Gamma_0^2 = [(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\omega_0)(4 + 3\gamma_1 + \gamma_2)/4 + 3\gamma_3 + 3\omega_0(\omega_0 - 1)]/15,$$

$$C_1^{(2)} = -(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\omega_0)/8, \quad \omega_0 = \beta/(1 + \alpha).$$

Функция $g(y)$, входящая в выражение для U_θ^e , связана с функцией $G(y)$ функциональным соотношением

$$g(y) = G(y) + \frac{1}{2}y \left(\frac{dG(y)}{dy} - fG(y) \right) \quad \left(f = \frac{1}{t_{e0}} \frac{dt_{e0}}{dy} = -\frac{\ell}{y(1 + \alpha)} \right),$$

которое следует из уравнения непрерывности (второе выражение в (1.1)) при учете зависимости плотности газообразной среды от температуры ($\rho_e = 1/t_{e0}$).

Таким образом, для компонент скорости имеем соотношения

$$U_r^e = U_\infty \cos \theta (A_1 G_1 + A_2 G_2 + G_3); \quad (2.7)$$

$$U_\theta^e = -U_\infty \sin \theta (A_1 G_4 + A_2 G_5 + G_6), \quad (2.8)$$

где

$$G_4 = \left(1 + \frac{\ell}{2(1 + \alpha)} \right) G_1 + \frac{1}{2} y G_1', \quad G_5 = \left(1 + \frac{\ell}{2(1 + \alpha)} \right) G_2 + \frac{1}{2} y G_2',$$

$$G_6 = \left(1 + \frac{\ell}{2(1 + \alpha)} \right) G_3 + \frac{1}{2} y G_3',$$

G_1', G_2', G_3' — первые производные по y соответствующих функций G_1, G_2, G_3 .

Постоянные интегрирования A_1, A_2 определяются при подстановке выражений (2.7), (2.8) в соответствующие граничные условия на поверхности частицы. Действующую на частицу силу найдем путем интегрирования тензора напряжений по ее поверхности [12]:

$$\mathbf{F}_\mu = \int_S (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{n}_z.$$

Здесь $\sigma_{rr} = 2\mu_e \partial U_r^e / \partial r$, $\sigma_{r\theta} = \mu_e (\partial U_\theta^e / \partial r + (1/r) \partial U_r^e / \partial \theta - U_\theta^e / r)$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат [12]; \mathbf{n}_z — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz в декартовой системе координат.

С учетом приведенных соотношений получаем

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi R \mu_{e\infty} f_\mu U_\infty \mathbf{n}_z, \quad (2.9)$$

где $f_\mu = 2N_2/(3N_1)$; $N_1|_{y=1} = G_1 G_2' - G_2 G_1'$; $N_2|_{y=1} = G_1 G_3' - G_3 G_1'$.

Сферическая частица, падающая в вязкой среде под действием силы тяжести, начинает двигаться с постоянной скоростью, при которой действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами. С учетом выталкивающей силы сила тяжести, действующая на частицу, равна

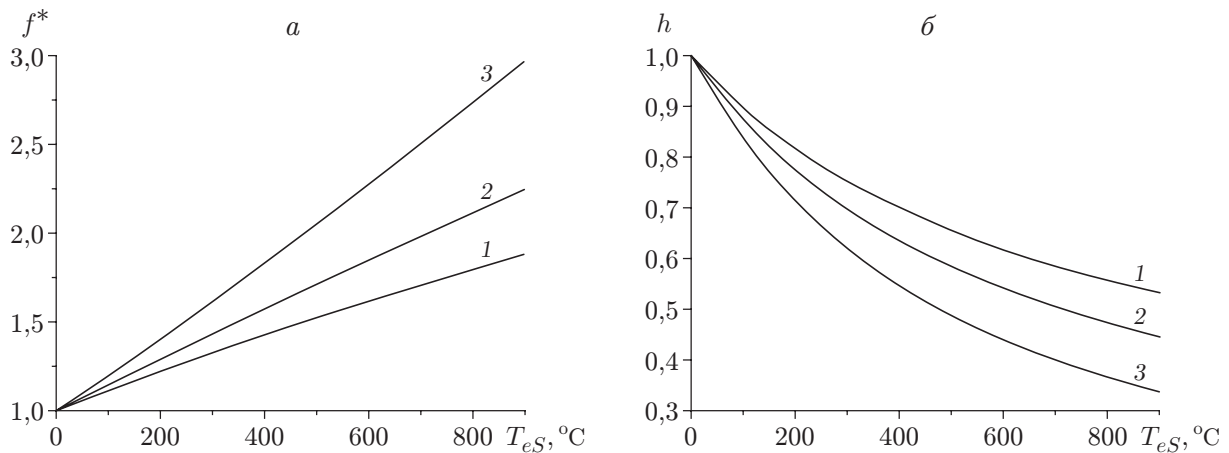
$$\mathbf{F} = (\rho_p - \rho_e) g (4/3) \pi R^3 \mathbf{n}_z \quad (2.10)$$

(g — ускорение свободного падения; индекс p соответствует частице).

Приравнявая выражения (2.9) и (2.10), получаем выражение для скорости гравитационного движения равномерно нагретой сферической частицы (аналог формулы Стокса):

$$U_e = h_\mu \mathbf{n}_z, \quad h_\mu = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho_p - \rho_e}{\mu_{e\infty} f_\mu} g. \quad (2.11)$$

Таким образом, соотношения (2.9), (2.11) позволяют оценивать силу, действующую на равномерно нагретую сферу, и скорость гравитационного движения этой сферы с учетом



Зависимости f^* (а) и h (б) от средней температуры поверхности T_{eS} при $T_{e\infty} = 0$ °С, $P_e = 1$ атм и различных значениях параметров α, β :
 1 — $\alpha = \beta = 0,5$; 2 — $\alpha = \beta = 0,7$; 3 — $\alpha = \beta = 1,0$

зависимостей плотности газообразной среды, вязкости и теплопроводности от температуры при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

В случае, когда нагрев поверхности частицы достаточно мал, т. е. средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от нее ($\ell \rightarrow 0$), зависимостями плотности, вязкости и теплопроводности от температуры можно пренебречь. Тогда $G_1 = 1$, $G'_1 = -3$, $G_2 = 1$, $G'_2 = -1$, $G_3 = 1$, $G'_3 = 0$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$. В этом случае соотношения (2.9), (2.11) переходят в известные выражения Стокса для сферы [11].

На рисунке приведены зависимости $f^* = f_\mu/f_\mu|_{T_{e\infty}}$ и $h = h_\mu/h_\mu|_{T_{e\infty}}$ от средней температуры поверхности T_{eS} для частицы глинозема радиусом $R = 5$ мкм, движущейся в воздухе при $T_{e\infty} = 0$ °С, $P_e = 1$ атм. Видно, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на скорость ее гравитационного движения и силу сопротивления окружающей среды. Полученные теоретические выводы подтверждаются и экспериментальными данными (см., например, [15]).

Таким образом, с учетом зависимостей плотности газообразной среды, вязкости и теплопроводности от температуры получены выражения, обобщающие формулу Стокса на случай стационарного движения равномерно нагретой твердой сферической частицы в неизотермической газообразной среде в поле силы тяжести при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kassoy D. R., Adomcon T. C., Messiter J. R., Messiter A. F.** Compressible low Reynolds number flow around a sphere // *J. Phys. Fluids*. 1966. V. 9, N 4. P. 671–681.
2. **Бретшнайдер С.** Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966.
3. **Щукин Е. Р., Шулиманова З. Л.** Движение нагреваемых внутренними источниками тепла твердых частиц в бинарных газовых смесях с заданными внешними градиентами температуры и концентрации // Моск. обл. пед. ин-т им. Н. К. Крупской. М., 1984. Деп. в ВИНТИ 19.09.84, № 7400-84.

4. **Щукин Е. Р.** Влияние нагрева поверхности на термофоретическое движение частицы в поле излучения // Тез. докл. 3-го Всесоюз. совещ. по распространению лазерного излучения в дисперсной среде. Обнинск: Ин-т эксперим. метеорол., 1985. Ч. 4. С. 183–185.
5. **Шулиманова З. Л.** Теория термодиффузиофоретического, фотофоретического и броуновского осаждения частиц в плоскопараллельных каналах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Одесса, 1986.
6. **Щукин Е. Р., Малай Н. В.** Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54, № 4. С. 630–635.
7. **Коган М. Н., Галкин В. С., Фридлендер О. Г.** О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119, вып. 1. С. 111–124.
8. **Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.** Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 5. С. 880–885.
9. **Щукин Е. Р.** Влияние нелинейных характеристик газообразной среды на движение, улавливание и кинетику фазовых переходов аэрозольных частиц: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1999.
10. **Борн К. Ф.** Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Ф. Борн, Д. Р. Хафмен. М.: Мир, 1986.
11. **Хаппель Дж.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. М.: Мир, 1976.
12. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
13. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2, 3.
14. **Коддингтон Э. А.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
15. **Бабий В. И., Иванова И. П.** Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях // Теплоэнергетика. 1965. № 9. С. 19–23.

*Поступила в редакцию 24/XI 2005 г.,
в окончательном варианте — 27/XII 2006 г.*
