

УДК 532.528

ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ И ТЕПЛОЫДЕЛЕНИЯ (ПОГЛОЩЕНИЯ) В ТЕПЛОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

М. А. А. Махмуд, А. М. Меджахед

Университет г. Бенха, 13518 Бенха, Египет

E-mail: mostafabdelhameed@yahoo.com

Аналитически исследована задача о течении и теплообмене степенной неньютоновской жидкости в пограничном слое на движущейся пористой бесконечной плоской пластине при наличии вязкой диссипации, тепловыделения или теплопоглощения. Предполагается, что уравнения энергии и импульса связаны коэффициентом трения для внутренних напряжений, введено предположение относительно коэффициента теплопроводности. Показано, что точные аналитические решения уравнений для скорости и температуры существуют только для псевдопластической жидкости при наличии отсоса на поверхности. Исследовано влияние параметра отсоса, числа Эккерта, параметра тепловыделения или теплопоглощения на скорость и температуру, а также на коэффициент поверхностного трения и число Нуссельта.

Ключевые слова: степенные неньютоновские жидкости, движущаяся поверхность, тепловыделение или теплопоглощение.

Введение. Течение и теплопередача от движущейся поверхности, возникающие в неподвижной жидкости, используются в различных производственных процессах, таких как горячая прокатка, волочение проволоки, непрерывное литье, производство бумаги, экструзия металлических, стеклянных или полимерных материалов и т. д. В работах [1, 2] начато исследование течения в пограничном слое на сплошной твердой поверхности, перемещающейся с постоянной скоростью. В [3] с учетом тепломассообмена в пограничном слое задача, рассмотренная в [1, 2], обобщена на случай, когда поперечная скорость жидкости на движущейся поверхности отлична от нуля. В работе [4] экспериментально подтверждены результаты [1, 2] и исследованы эффекты теплопередачи на движущейся пластине с постоянными скоростью и температурой на поверхности. В [5] изучена задача о вынужденной конвекции и теплопередаче при наличии вдува или отсоса на плоской пластине, непрерывно перемещающейся в неподвижной или движущейся жидкости. Задача теплопроводности в пограничном слое на полубесконечной плоской пластине, перемещающейся с постоянной скоростью в свободном потоке, рассмотрена в [6]. В работе [7] численно исследован перенос импульса и тепла в потоке несжимаемой вязкой жидкости на движущейся плоской поверхности.

Во всех перечисленных выше работах исследовалось течение ньютоновской жидкости. Однако многие жидкости, такие как расплавленные пластмассы, полимеры, типографская краска, продукты питания и т. д., по своим характеристикам являются неньютоновскими. Начиная с 70-х гг. XX в. интерес к изучению течения и особенностей теплопередачи

неньютоновских жидкостей (например, полимерных расплавов и растворов) значительно возрос, что обусловлено их использованием в различных отраслях промышленности. В работе [8] впервые изучено течение в пограничном слое неньютоновской жидкости. Автомодельные решения получены в работах [9–13] и др. В [14, 15] изучен эффект вдува на плоской пластине в поток степенной неньютоновской жидкости. В работе [16] представлен класс асимптотических решений уравнений течения степенных жидкостей на плоской пластине при наличии отсоса.

Вынужденная конвекция степенных неньютоновских жидкостей на плоской пластине изучалась в работе [17]. В [18] для решения задачи переноса импульса и тепла в пограничном слое на поверхности, движущейся в степенной жидкости, применен метод разложения в ряд Мерк — Чао. В работе [19] с использованием ряда Мерк — Чао исследована задача переноса импульса и тепла в степенной жидкости с произвольным вдувом (отсосом) на движущейся границе. Перенос импульса и тепла на поверхности, движущейся в степенной жидкости, изучен в работе [20]. В [21] рассмотрена задача о степенных неньютоновских жидкостях на непрерывно растягивающейся поверхности. Проблема стационарного течения неньютоновской жидкости за бесконечной пористой плоской пластиной при наличии отсоса проанализирована в работе [22]. В [23] исследован поток электропроводящей степенной жидкости в присутствии однородного поперечного магнитного поля на растягивающейся пластине. В [24] с использованием метода последовательных приближений аналитически изучено течение в ламинарном пограничном слое степенной неньютоновской жидкости над непрерывно движущейся поверхностью при наличии поперечного магнитного поля. В работе [25] решена задача о течении и теплопередаче электропроводящей степенной неньютоновской жидкости с низкой электрической проводимостью на непрерывно движущейся бесконечной пористой пластине в присутствии однородного магнитного поля. Насколько известно авторам данной работы, задача о течении и теплопередаче в пограничном слое степенной неньютоновской жидкости на непрерывно движущейся проницаемой поверхности при наличии вязкой диссипации и тепловыделения ранее не рассматривалась.

Целью данной работы является изучение влияния параметра отсоса и параметра тепловыделения или теплопоглощения на скорость и температуру, а также на коэффициент поверхностного трения и число Нуссельта.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую пластину, которая при фиксированной температуре T_s движется с постоянной скоростью u_s из щели в неподвижную степенную неньютоновскую жидкость, температура которой равна T_∞ . Физическая модель и система координат показаны на рис. 1. Начало координат расположено в щели, x , y — декартовы координаты вдоль и поперек поверхности соответственно.

Предполагается, что жидкость обладает транспортными свойствами [26–33]:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= -P\delta_{ij} + K|I_2/2|^{(n-1)/2}e_{ij}; \\ q &= -\varkappa|I_2/2|^{(n-1)/2}\text{grad } T.\end{aligned}\quad (1)$$

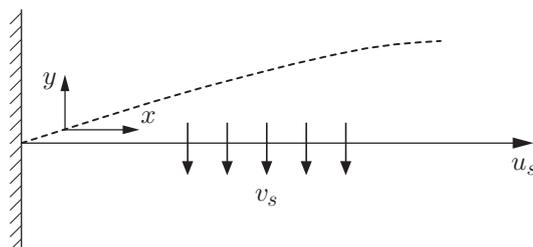


Рис. 1. Геометрия потока и система координат

Здесь τ_{ij} , e_{ij} — тензоры напряжения и скоростей деформации; δ_{ij} — единичный тензор; I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформации; P , T — давление и температура жидкости; q — тепловой поток; \varkappa — модифицированный коэффициент теплопроводности; $K > 0$ — показатель консистенции жидкости; $n > 0$ — реологический индекс, известный как индекс показателя степени. При $n = 1$ уравнение (1) сводится к конститутивному уравнению для вязкой ньютоновской жидкости с $K = \mu$ (μ — динамическая вязкость). Жидкости, для которых $n < 1$, называются псевдопластическими, жидкости, для которых $n > 1$, — дилатантными.

С учетом эффектов вязкой диссипации, тепловыделения или теплопоглощения основные уравнения задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{K}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{K}{\rho c_p} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{Q}{\rho c_p}, \end{aligned}$$

где u , v — компоненты скорости в направлениях x и y соответственно; ρ — плотность жидкости; Q — скорость внутреннего тепловыделения или поглощения на единицу объема; $\alpha = \varkappa/(\rho c_p)$ — температуропроводность; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Так как пластина предполагается бесконечной, все производные по x исчезают:

$$\frac{dv}{dy} = 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} K \frac{d}{dy} \left(\left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \right) - v \frac{du}{dy} &= 0, \\ \alpha \frac{d}{dy} \left(\left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{dT}{dy} \right) - v \frac{dT}{dy} + \frac{K}{\rho c_p} \left(\left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right) + \frac{Q}{\rho c_p} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Граничные условия для уравнений (2), (3) имеют вид

$$y = 0: \quad u = u_s, \quad T = T_s, \quad y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad T = T_\infty.$$

Решением уравнения (2) является соотношение

$$v = -v_s, \tag{4}$$

где $v_s > 0$ — постоянная, направленная по нормали к пластине скорость.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$f = \frac{u}{u_s}, \quad c = \frac{v_s}{u_s}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \eta = \frac{\rho^{1/n} u_s^{(2-n)/n}}{K^{1/n}} y. \tag{5}$$

Зависимость скорости внутреннего тепловыделения или теплопоглощения от пространственной координаты можно принять в форме

$$Q = Q_0 e^{-\eta}. \tag{6}$$

Подставляя (4)–(6) в (3), получим следующие безразмерные уравнения:

$$\frac{d}{d\eta} \left(-\frac{df}{d\eta} \right)^n - c \frac{df}{d\eta} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} \left(-\frac{df}{d\eta} \right)^{n-1} + \left((1-n) \left(-\frac{df}{d\eta} \right)^{n-2} \frac{d^2f}{d\eta^2} + c \text{Pr} \right) \frac{d\theta}{d\eta} + \text{Ec Pr} \left(-\frac{df}{d\eta} \right)^{n+1} + \gamma e^{-\eta} = 0. \tag{8}$$

Здесь $Pr = \mu c_p / \varkappa$ — неньютоновское число Прандтля; $Ec = u_s^2 / (c_p T_\infty)$ — число Эккерта; постоянная c — параметр отсоса; $\gamma = Q_0 K^{(n+1)/n} / (\varkappa T_\infty \rho^{(n+1)/n} u_s^{2/n})$ — параметр тепловыделения ($\gamma > 0$) или поглощения ($\gamma < 0$).

Запишем граничные условия уравнений (7), (8) в безразмерном виде

$$\eta = 0: \quad f = 1, \quad \theta = \theta_r, \quad \eta \rightarrow \infty: \quad f \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 1. \quad (9)$$

Здесь $\theta_r = T_s / T_\infty$.

Напряжение сдвига на поверхности определяется по формуле

$$\tau_s = \left(K \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \right)_{y=0}.$$

В безразмерных переменных выражение для коэффициента трения имеет вид

$$C_f = 2\tau_s / (\rho u_s^2) = 2|f'(0)|^n. \quad (10)$$

Тепловой поток на пластине равен

$$q_s = -\varkappa \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0},$$

число Нуссельта определяется выражением

$$Nu = -\theta'(0).$$

2. Точные решения уравнений импульса и энергии. Интегрируя уравнение (7) с учетом граничных условий (9), получаем

$$f = (a(\eta + c_2))^{n/(n-1)} / c, \quad (11)$$

где $c_2 = n / ((1-n)c^{1/n})$; $a = c(1-n)/n$; $0 < n < 1$.

Подставляя (11) в (8), получаем уравнение энергии в окончательном виде

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} (a(\eta + c_2)) + (a + c Pr) \frac{d\theta}{d\eta} + Ec Pr (a(\eta + c_2))^{(n+1)/(n-1)} + \gamma e^{-\eta} = 0. \quad (12)$$

В результате интегрирования уравнения (12) с граничными условиями (9) при $\theta_r = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \theta = & \{ (\eta + c_2)^{-p/a} [a(4an^2(c_2^{p/a} + (\eta + c_2)^{p/a}) + (n-1)\{2c_2^{p/a} np + \\ & + c_2^{(a+p)/a} (ac_2)^{(n+1)/(n-1)}(n-1)b - c_2(n-1)b(\eta + c_2)^{p/a} (a(\eta + c_2))^{(n+1)/(n-1)} + \\ & + (\eta + c_2)^{p/a} [2np + b\eta(a(\eta + c_2))^{(n+1)/(n-1)} - nb\eta(a(\eta + c_2))^{(n+1)/(n-1)}]] \} + \\ & + 2n e^{c_2} (2na + (n-1)p) \gamma \Gamma(p/a, c_2) - 2n e^{c_2} (2na + (n-1)p) \gamma \Gamma(p/a, \eta + c_2) \} / \\ & / [2an(2an + (n-1)p)]. \end{aligned}$$

Здесь $p = c Pr$; $b = Pr Ec$; Γ — гамма-функция.

3. Обсуждение результатов. На рис. 2–6 представлены распределения скорости и температуры при различных значениях c , n , Pr , γ , Ec и $\theta_r = 2$. На рис. 2, 3 показано влияние параметра отсоса c на распределение скорости и температуры при $n = 0,8$. Видно, что при наличии отсоса на границе толщина гидродинамического и теплового пограничных слоев уменьшается, что приводит к уменьшению скорости и температуры жидкости. На рис. 4 представлены профили температуры в зависимости от неньютоновского числа Прандтля Pr . Видно, что с увеличением значения Pr температура уменьшается. Полученные результаты подтверждают экспериментальные данные, согласно которым с увеличением Pr толщина теплового пограничного слоя уменьшается. Из рис. 5, на котором

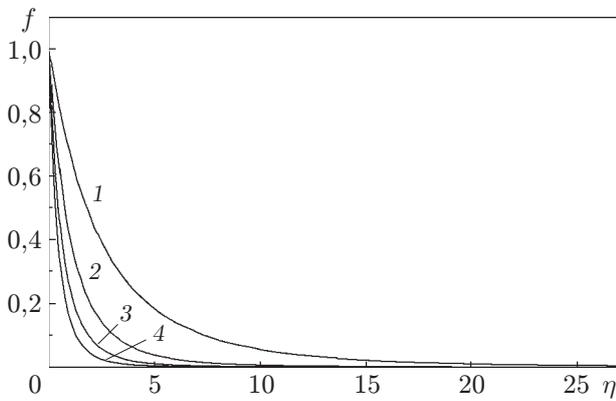


Рис. 2

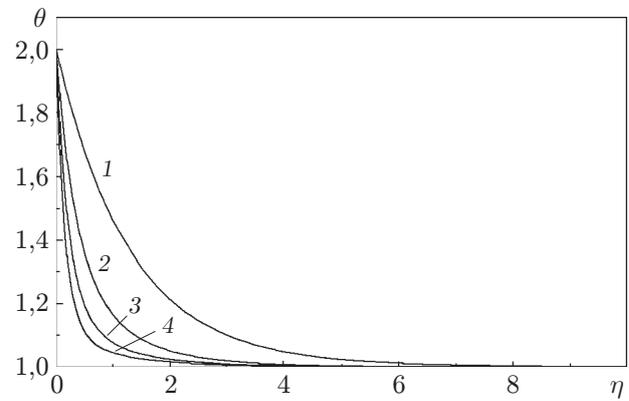


Рис. 3

Рис. 2. Распределение скорости при различных значениях c ($n = 0,8$):

1 — $c = 0,5$; 2 — $c = 1$; 3 — $c = 1,5$; 4 — $c = 2$

Рис. 3. Распределение температуры при различных значениях c ($n = 0,8$, $\gamma = 0,5$, $Pr = 3$, $Ec = 0,1$):

1 — $c = 0,5$; 2 — $c = 1$; 3 — $c = 1,5$; 4 — $c = 2$

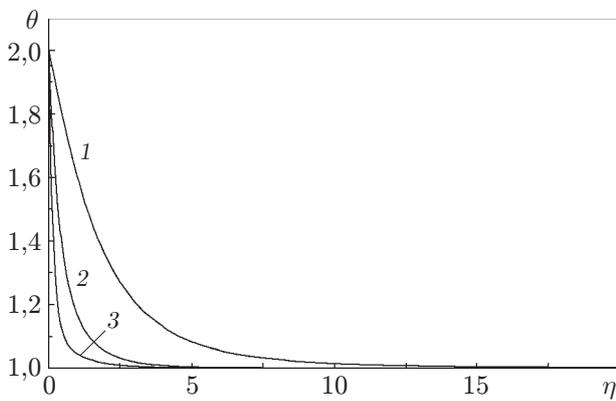


Рис. 4

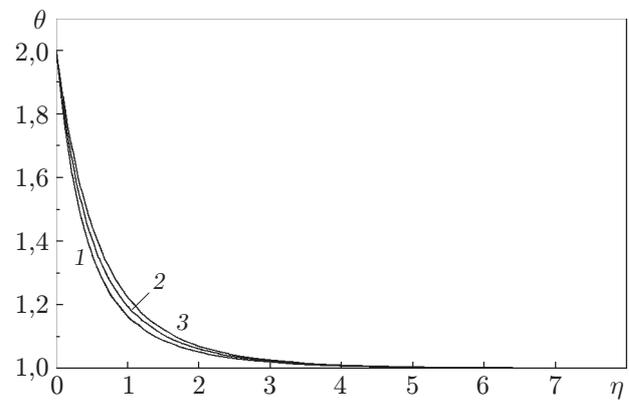


Рис. 5

Рис. 4. Распределение температуры при различных значениях Pr ($n = 0,8$, $\gamma = 0,5$, $c = 1$, $Ec = 0,1$):

1 — $Pr = 1$; 2 — $Pr = 3$; 3 — $Pr = 7$

Рис. 5. Распределение температуры при различных значениях Ec ($n = 0,8$, $\gamma = 0,5$, $Pr = 3$, $c = 1$):

1 — $Ec = 0,1$; 2 — $Ec = 0,3$; 3 — $Ec = 0,5$

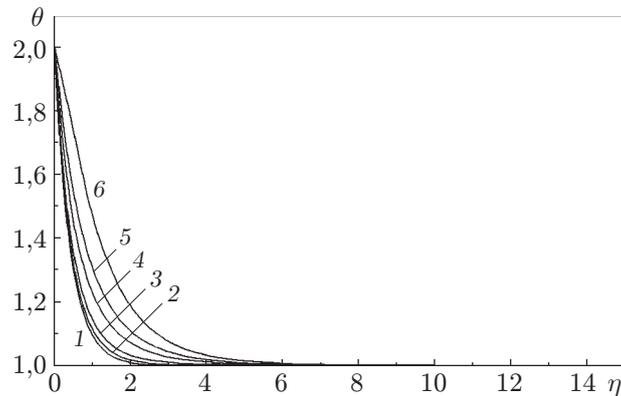


Рис. 6. Распределение температуры при различных значениях γ ($n = 0,8$, $Ec = 0,5$, $Pr = 3$, $c = 1$):

1 — $\gamma = -0,3$; 2 — $\gamma = -0,2$; 3 — $\gamma = 0$; 4 — $\gamma = 0,5$; 5 — $\gamma = 1$; 6 — $\gamma = 2$

Значения $-\theta'(0)$ и $|f'(0)|^n$ при различных значениях n , c , Pr , γ , Ec

n	c	Ec	Pr	γ	$ f'(0) ^n$	$-\theta'(0)$
0,6	2,0	0,1	3	0,5	2,0	8,2545
0,7	2,0	0,1	3	0,5	2,0	6,9987
0,8	2,0	0,1	3	0,5	2,0	6,1839
0,9	2,0	0,1	3	0,5	2,0	5,6167
0,8	0,5	0,1	3	0,5	0,5	0,7778
0,8	1,0	0,1	3	0,5	1,0	2,3500
0,8	1,5	0,1	3	0,5	1,5	4,1777
0,8	2,0	0,1	3	0,5	2,0	6,1839
0,8	1,0	0,1	3	0,5	1,0	2,3500
0,8	1,0	0,3	3	0,5	1,0	2,0500
0,8	1,0	0,5	3	0,5	1,0	1,7500
0,8	1,0	0,1	1	0,5	1,0	0,4500
0,8	1,0	0,1	3	0,5	1,0	2,3500
0,8	1,0	0,1	7	0,5	1,0	6,1466
0,8	1,0	0,5	3	-0,3	1,0	2,5500
0,8	1,0	0,5	3	-0,2	1,0	2,4500
0,8	1,0	0,5	3	0	1,0	2,2500
0,8	1,0	0,5	3	0,5	1,0	1,7500
0,8	1,0	0,5	3	1,0	1,0	1,2500
0,8	1,0	0,5	3	2,0	1,0	0,2500

показана зависимость температуры от числа Эккерта Ec , следует, что в случае, когда учитывается вязкая диссипация, температура жидкости выше. На рис. 6 приведены профили температуры в зависимости от параметра тепловыделения или теплопоглощения γ . Видно, что в случае тепловыделения ($\gamma > 0$) с увеличением значения γ температура увеличивается, в то время как в случае теплопоглощения ($\gamma < 0$) с увеличением абсолютного значения γ температура уменьшается. В таблице приведены зависимости коэффициента трения C_f и числа Нуссельта Nu от реологического индекса n , параметра отсоса c , числа Эккерта Ec , параметра тепловыделения или теплопоглощения γ и числа Прандтля Pr . Из уравнений (10), (11) следует, что коэффициент трения зависит только от параметра отсоса. Как показано в таблице, увеличение параметра отсоса приводит к увеличению коэффициента трения. Кроме того, из таблицы следует, что при увеличении n число Нуссельта уменьшается, а при увеличении числа Прандтля увеличивается. Это обусловлено тем, что

при большом значении Pr жидкость обладает большей теплоемкостью и, следовательно, интенсивность теплопередачи в ней увеличивается. Поэтому эффективность охлаждения горячей поверхности может быть увеличена за счет выбора хладагента, имеющего большее число Прандтля. Кроме того, при увеличении параметра отсоса увеличивается число Нуссельта. При $\gamma > 0$ число Нуссельта уменьшается при увеличении γ , в то время как при $\gamma < 0$ число Нуссельта увеличивается при увеличении $|\gamma|$. Однако увеличение числа Эккерта вызывает уменьшение числа Нуссельта, так как с увеличением числа Эккерта, соответствующего количеству тепла, выделяющегося при трении, эффективность охлаждения пластины уменьшается. Эта зависимость согласуется с профилями безразмерной температуры, показанными на рис. 5.

Заключение. В работе получено точное решение задачи о течении в пограничном слое степенной неньютоновской жидкости на бесконечной движущейся проницаемой пластине при наличии тепловыделения или теплопоглощения. Установлено, что решение существует только для псевдопластической жидкости ($n < 1$), в случае если на пластине задан отсос. Кроме того, обнаружено, что коэффициент трения и число Нуссельта увеличиваются при увеличении параметра отсоса. Показано, что число Нуссельта увеличивается, когда число Прандтля или параметр теплопоглощения увеличивается, и, наоборот, уменьшается при увеличении числа Эккерта, реологического индекса и параметра тепловыделения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sakiadis B. C.** Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces. 1. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow // *AIChE J.* 1961. V. 7. P. 26–28.
2. **Sakiadis B. C.** Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces. 2. Boundary-layer on a continuous flat surface // *AIChE J.* 1961. V. 7. P. 221–225.
3. **Erickson L. E., Fan L. T., Fox V. G.** Heat and mass transfer on a moving continuous flat plate with suction or injection // *Industr. Engng Chem. Fundam.* 1966. V. 5. P. 19–25.
4. **Tsou F. K., Sparrow E. M., Goldstein R. J.** Flow and heat transfer in the boundary-layer on a continuous moving surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1967. V. 10. P. 219–235.
5. **Chen C.-H.** Forced convection over a continuous sheet with suction or injection moving in a flowing fluid // *Acta Mech.* 1999. V. 138. P. 1–11.
6. **Fang T.** Similarity solutions for a moving-flat plate thermal boundary layer // *Acta Mech.* 2003. V. 163. P. 161–172.
7. **Cortell R.** Flow and heat transfer in a moving fluid over a moving flat surface // *Theor. Comput. Fluid Dynamic.* 2007. V. 21. P. 435–446.
8. **Schowalter W. R.** The application of boundary layer theory to power-law pseudoplastic fluid: similar solutions // *AIChE J.* 1960. V. 6. P. 24–28.
9. **Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E.** Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces // *AIChE J.* 1960. V. 6. P. 312–317.
10. **Kapur J. N., Srivastava R. C.** Similar solutions of the boundary layer equations for power-law fluids // *Z. angew. Math. Phys.* 1963. Bd 14. S. 383–388.
11. **Lee S. Y., Ames W. F.** Similarity solutions for non-Newtonian fluids // *AIChE J.* 1966. V. 12. P. 700–708.
12. **Berkovskii B. M.** A class of self-similar boundary layer problems for rheological power-law fluids // *Intern. Chem. Engng.* 1966. V. 6. P. 187–201.
13. **Hansen A. G., Na R. Y.** Similarity solutions of laminar incompressible boundary layer equations of non-Newtonian fluids // *Trans. ASME. J. Basic Engng.* 1968. V. 40. P. 71–74.

14. **Thompson E. R., Snyder W. T.** Drag reduction of a non-Newtonian fluid by fluid injection at the wall // *J. Hydronaut.* 1968. V. 2. P. 177–180.
15. **Thompson E. R., Snyder W. T.** Laminar boundary-layer flows of Newtonian fluids with non-Newtonian fluid injections // *J. Hydronaut.* 1970. V. 4. P. 86–91.
16. **Liu C. Y.** Asymptotic suction flow of power-law fluids // *J. Hydronaut.* 1973. V. 7. P. 135–136.
17. **Huang M. J., Lin B. L.** Forced convective flow over a flat plate in non-Newtonian power-law fluids // *Wärme- und Stoffübertragung.* 1992. Bd 27. S. 399–404.
18. **Howell T. G., Jeng D. R., De Witt K. J.** Momentum and heat transfer on a continuous moving surface in a power law fluid // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1997. V. 40. P. 1853–1861.
19. **Rao J. H., Jeng D. R., De Witt K. J.** Momentum and heat transfer in a power-law fluid with arbitrary injection/suction at a moving wall // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1999. V. 42. P. 2837–2847.
20. **Sahu A. K., Mathur M. N., Chaturani P., Saxena Bharatiya S.** Momentum and heat transfer from a continuous moving surface to a power-law fluid // *Acta Mech.* 2000. V. 142. P. 119–131.
21. **Ariel P. D.** On the flow of power-law fluid over a stretching sheet-techniques and solutions // *Acta Mech.* 2002. V. 156. P. 13–27.
22. **Gupta A. S., Misra J. C., Reza M.** Effects of suction or blowing on the velocity and temperature distribution in the flow past a porous flat plate of a power-law fluid // *Fluid Dynamics Res.* 2003. V. 32. P. 283–294.
23. **Cortell R.** A note on magnetohydrodynamic flow of a power-law fluid over a stretching sheet // *Appl. Math. Comput.* 2005. V. 168. P. 557–566.
24. **Mahmoud M. A. A., Mahmoud M. A.-E.** Analytical solutions of hydromagnetic boundary-layer flow of a non-Newtonian power-law fluid past a continuously moving surface // *Acta Mech.* 2006. V. 181. P. 83–89.
25. **Mahmoud A. A. M., Megahed A. M.** On steady hydromagnetic boundary-layer flow of a non-Newtonian power-law fluid over a continuously moving surface with suction // *Chem. Engng Comm.* 2007. V. 194. P. 1457–1469.
26. **Pop I., Gorla R. S. R.** Mixed convection similarity solutions of a non-Newtonian fluid on a horizontal surface // *Wärme- und Stoffübertragung.* 1990. Bd 26. S. 57–63.
27. **Gorla R. S. R., Lee J. K., Nakamura S., Pop I.** Effects of transverse magnetic field on mixed convection in wall plume of power-law fluids // *Intern. J. Engng Sci.* 1993. V. 31. P. 1035–1045.
28. **Lee J. K., Gorla R. S. R., Nakamura S., Pop I.** Mixed convection in wall plume of power-law fluids // *Acta Mech.* 1994. V. 102. P. 47–58.
29. **Chamkha A.** Similarity solution for thermal boundary layer on a stretched surface of a non-Newtonian fluid // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 1997. V. 24. P. 643–652.
30. **Ece M. C., Büyük E.** Similarity solutions for free convection to power-law fluids from a heated vertical plate // *Appl. Math. Lett.* 2002. V. 15. P. 1–5.
31. **Zheng L., Zhang X., He J.** Suitable heat transfer model for self-similar laminar boundary in power law fluids // *J. Thermal Sci.* 2004. V. 13. P. 150–154.
32. **Zheng L. C., Zhang X., Lu C. Q.** Heat transfer for power-law non-Newtonian fluids // *Chinese Phys. Lett.* 2006. V. 23. P. 3301–3304.
33. **Zhang H., Zhang X., Zheng L.** Numerical study of thermal boundary layer on a continuous moving surface in power law fluids // *J. Thermal Sci.* 2007. V. 16. P. 243–247.