

УДК 519.46:533.375

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

И. И. Рыжков

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mail: rii@icm.krasn.ru

Исследуются групповые свойства уравнений термодиффузии бинарной смеси в плоском течении. Построены оптимальные системы подалгебр первого и второго порядков для допускаемой алгебры Ли операторов, которая является бесконечномерной. Приведены примеры точных инвариантных решений, отыскание которых сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены точные решения, описывающие процесс термодиффузии в наклонном слое со свободной границей и вертикальном слое при наличии продольных градиентов температуры и концентрации. Изучено влияние параметра термодиффузии на режим течений.

Ключевые слова: термодиффузия, бинарная смесь, групповой анализ, инвариантные решения.

Введение. Термодиффузией называют молекулярный перенос вещества, связанный с наличием в среде (жидком растворе или газовой смеси) градиента температуры. При термодиффузии концентрация компонентов в областях повышенной и пониженной температуры различна. Наличие градиентов концентрации приводит к возникновению обыкновенной диффузии. Стационарное состояние устанавливается тогда, когда процессы диффузии и термодиффузии уравновешивают друг друга (т. е. процесс разделения компонентов смеси компенсируется процессом их перемешивания). На практике часто встречается нормальная термодиффузия, при которой более тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а менее тяжелые — в более нагретые области. В некоторых случаях наблюдается аномальная термодиффузия, при которой направление движения компонентов меняется на противоположное.

В данной работе рассматривается модель конвективного движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Основу модели составляют уравнения Навье — Стокса, дополненные уравнениями диффузии и переноса тепла. Используется приближение Обербека — Буссинеска, предназначенное для описания конвективных течений в естественных земных условиях. Предполагается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации легкого компонента: $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C)$. Здесь ρ_0 — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации; T , C — малые отклонения от средних значений; β_1 — коэффициент теплового расширения смеси; β_2 — концентрационный коэффициент плотности ($\beta_2 > 0$, так как C — концентрация легкого компонента). Движение смеси описывается системой уравнений [1]

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -(1/\rho_0)\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_1 T + \beta_2 C), \\
T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \chi\Delta T, \\
C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= d\Delta C + \alpha d\Delta T, \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где \mathbf{u} — вектор скорости; p — отклонение давления от гидростатического; ν , χ — кинематическая вязкость и температуропроводность смеси; d — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии; \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения. Все характеристики среды предполагаются постоянными и соответствуют средним значениям температуры и концентрации. В случае нормальной термодиффузии $\alpha < 0$, для аномальной термодиффузии $\alpha > 0$.

В литературе имеется ряд работ, посвященных построению точных решений системы (1) и исследованию их устойчивости. В частности, в [2, 3] рассматривалась устойчивость конвективных течений бинарной смеси в вертикальном канале при наличии продольных градиентов концентрации и (или) температуры без учета термодиффузии. В [4, 5] исследовалось влияние эффекта термодиффузии на устойчивость вертикального слоя с постоянной разностью температур между стенками (в последней работе в слое также имелся продольный градиент концентрации). Неустойчивость плоского горизонтального слоя несжимаемой бинарной газовой смеси под действием поперечного, модулированного по времени градиента температуры изучалась в [6].

Групповые свойства уравнений (1) в случае $\mathbf{g} = 0$ изучены в работе [7], в которой построено точное инвариантное решение, описывающее движение двух смесей с общей поверхностью раздела. Однако систематическое исследование рассматриваемой системы с помощью методов группового анализа еще не проводилось. Исключение составляет работа [8], в которой проведен групповой анализ трехмерных уравнений (1).

В данной работе рассматривается случай плоского движения, для которого следует положить $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$, $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$, $\mathbf{g} = (0, -g)$, где g — ускорение свободного падения. Исследуются групповые свойства соответствующих уравнений (1) и проводится классификация инвариантных решений (строятся оптимальные системы подалгебр). Приводятся примеры точных инвариантных решений и анализируется их физическая интерпретация. Показано, что найденные решения могут описывать процесс термодиффузии в наклонном слое со свободной границей и вертикальном слое с твердыми стенками.

1. Групповые свойства уравнений модели. Рассмотрим задачу о нахождении группы преобразований, оставляющих систему (1) неизменной. В теории Ли каждой группе преобразований ставится в соответствие алгебра Ли дифференциальных операторов. Как показывают вычисления, двумерные уравнения (1) допускают алгебру Ли L , которая представима в виде полупрямой суммы $L = L_4 \oplus L_\infty$. Конечномерная подалгебра L_4 образована операторами

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial T} - \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial C}, & X_3 &= \rho_0 g x^2 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial C}, \\
X_4 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} - u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3T \frac{\partial}{\partial T} - 3C \frac{\partial}{\partial C},
\end{aligned} \tag{2}$$

а бесконечномерный идеал L_∞ имеет базис

$$\begin{aligned}
H_1(f^1(t)) &= f^1(t) \frac{\partial}{\partial x^1} + f_t^1(t) \frac{\partial}{\partial u^1} - \rho_0 x^1 f_{tt}^1(t) \frac{\partial}{\partial p}, \\
H_2(f^2(t)) &= f^2(t) \frac{\partial}{\partial x^2} + f_t^2(t) \frac{\partial}{\partial u^2} - \rho_0 x^2 f_{tt}^2(t) \frac{\partial}{\partial p},
\end{aligned}$$

$$H_0(f^0(t)) = f^0(t) \frac{\partial}{\partial p},$$

где $f^i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) — произвольные гладкие функции. Если входящие в систему постоянные связаны соотношением $\alpha = \beta_1(d - \chi)/(\beta_2 d)$, $d \neq \chi$, то уравнения также допускают оператор

$$X_5 = T \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\beta_1}{\beta_2} T \frac{\partial}{\partial C}.$$

В дальнейшем предполагается, что это соотношение не выполнено и оператор X_5 не допускается. Система (1) также обладает дискретными симметриями

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \tilde{x}^1 = -x^1, \quad \tilde{u}^1 = -u^1, \\ d_2: \quad & \tilde{x}^2 = -x^2, \quad \tilde{u}^2 = -u^2, \quad \tilde{T} = -T, \quad \tilde{C} = -C. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Оптимальные системы подалгебр. Известно, что для отыскания существенно различных инвариантных решений (относительно действия допускаемой группы преобразований) необходимо построить оптимальные системы подалгебр для соответствующей алгебры Ли операторов [9–11]. Рассмотрим построение таких систем для алгебры Ли L . Оптимальная система подалгебр порядка k для алгебры L обозначена через $\Theta_k L$.

На первом этапе строится оптимальная система для конечномерной алгебры L_4 , при этом используется ее разложение в полупрямую сумму $L_4 = J \oplus N$ собственного идеала $J = \{X_1, X_2\}$ и подалгебры $N = \{X_3, X_4\}$. Оптимальная система ΘL_4 приведена в табл. 1. В первой графе указаны номера подалгебр. Во второй графе приведены базисы подалгебр, которые записаны символически номерами соответствующих операторов. Запись $\lambda 2 + 3$ означает $\lambda X_2 + X_3$ и т. д.; постоянная λ принимает любые вещественные значения. В третьей графе указан номер нормализатора подалгебры в L_4 (знаком равенства отмечены самонормализованные подалгебры). При построении оптимальной системы учитывались автоморфизмы, порождаемые дискретными симметриями (3).

На втором этапе строятся оптимальные системы первого и второго порядков для алгебры L , которая является бесконечномерной. Запишем оператор общего вида, принадлежащий идеалу L_∞ :

$$H(\mathbf{f}) = H_1(f^1) + H_2(f^2) + H_0(f^0), \quad \mathbf{f}(t) = (f^1(t), f^2(t), f^0(t)).$$

Таблица 1

Оптимальная система подалгебр ΘL_4

i	Базис P_i	Nor P_i	i	Базис P_i	Nor P_i
1	1, 2, 3, 4	= 1	11	1, 4	= 11
2	1, 2, 3	1	12	2, 4	= 12
3	1, 2, 4	= 3	13	$\lambda 2 + 3, 4$	= 13
4	2, 3, 4	= 4	14	1	1
5	1, $\lambda 2 + 3, 4$	= 5	15	2	1
6	1, 2	1	16	$\lambda 2 + 3$	1
7	2, 3	1	17	1 + 2	2
8	1, $\lambda 2 + 3$	1	18	1 + $\lambda 2 + 3$	2
9	1 + 2, $\lambda 1 + 3$	2	19	4	= 19
10	1 + 3, 2	2	20	0	1

Примечание. Знаком “=” отмечены самонормализованные подалгебры.

Таблица 2

Оптимальная система подалгебр $\Theta_1 L$

i	Базис	Примечание
1	X_1	
2	$X_1 + X_2$	—
3	$X_1 + \lambda X_2 + X_3$	
4	X_4	
5	$H_0(f^0)$	$f^0 \neq 0$
6	$X_2 + H_0(f^0)$	$f^0 \neq 0$
7	$H_1(f^1) + H_2(f^2)$	
8	$X_2 + H_1(f^1) + H_2(f^2)$	—
9	$\lambda X_2 + X_3 + H_1(f^1) + H_2(f^2)$	

Для построения $\Theta_1 L$ необходимо классифицировать подалгебры из двух классов:

- 1) $\{H(\mathbf{f})\}$,
- 2) $\{P + H(\mathbf{f})\}$, $\{P\} \in \Theta_1 L_4$.

Первый класс лежит в идеале L_∞ , а второй имеет нулевое пересечение с этим идеалом. Подалгебры с базисным оператором P берутся из оптимальной системы первого порядка $\Theta_1 L_4$ (см. табл. 1). Нахождение $\Theta_2 L$ сводится к классификации подалгебр из трех классов:

- 1) $\{H(\mathbf{f}), H(\mathbf{g})\}$,
- 2) $\{P + H(\mathbf{f}), H(\mathbf{g})\}$, $\{P\} \in \Theta_1 L_4$,
- 3) $\{P + H(\mathbf{f}), Q + H(\mathbf{g})\}$, $\{P, Q\} \in \Theta_2 L_4$.

Здесь первый класс принадлежит идеалу L_∞ , а второй и третий классы имеют соответственно одномерное и нулевое пересечения с идеалом L_∞ . Подалгебры $\{P, Q\}$ берутся из оптимальной системы второго порядка $\Theta_2 L_4$.

Оптимальная система $\Theta_1 L$ приведена в табл. 2. Для построения инвариантных решений используются конечномерные подалгебры из оптимальной системы второго порядка $\Theta_2 L$, которые приведены в табл. 3. Базисы подалгебр указаны во второй графе. Постоянные $\lambda, \mu, \gamma, \delta$ принимают любые вещественные значения, если не оговорено противное.

3. Построение точных решений. Рассмотрим примеры инвариантных решений, построенных относительно подалгебр из оптимальной системы $\Theta_2 L$ (см. табл. 3). Использование двумерных подалгебр позволяет свести интегрирование исходной системы к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем применяются стандартные обозначения векторов координат $\mathbf{x} = (x, y)$ и скорости $\mathbf{u} = (u, v)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим подалгебру 4 с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad H_1(1) + H_2(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}.$$

Соответствующее инвариантное решение имеет вид

$$u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad p = p(\xi), \quad T = T(\xi), \quad C = C(\xi), \quad \xi = y - \lambda x.$$

Подставляя это решение в систему (1), из уравнения неразрывности получаем $v = \lambda u + v_0$, где $v_0 = \text{const}$. Если $v_0 = 0$, то искомые функции удовлетворяют системе уравнений

$$\nu(\lambda^2 + 1)^2 u_{\xi\xi} + \lambda g(\beta_1 T + \beta_2 C) = 0, \quad p_\xi + (\rho_0 \nu / \lambda)(\lambda^2 + 1) u_{\xi\xi} = 0, \quad T_{\xi\xi} = C_{\xi\xi} = 0,$$

Таблица 3

Конечномерные подалгебры из оптимальной системы $\Theta_2 L$

i	Базис	Примечание
1	$X_1, H_0(1)$	—
2	$X_1, H_2(1)$	—
3	$X_1, H_1(1) + H_0(1)$	—
4	$X_1, H_1(1) + H_2(\lambda)$	$\lambda \geq 0$
5	$X_1, H_0(e^{\pm t})$	—
6	$X_1, H_2(e^{\pm t})$	—
7	$X_1, H_1(e^{\pm t}) + H_2(\lambda e^{\pm t})$	$\lambda \geq 0$
8	$X_1 + X_2, H_0(1)$	—
9	$X_1 + X_2, H_1(1) + H_0(\lambda)$	$\lambda \geq 0$
10	$X_1 + X_2, H_1(\lambda) + H_2(1)$	$\lambda \geq 0$
11	$X_1 + \lambda X_2, H_0(e^{\pm t})$	$\lambda > 0$
12	$X_1 + \lambda X_2, H_2(e^{\pm t})$	$\lambda > 0$
13	$X_1 + \lambda X_2, H_1(e^{\pm t}) + H_2(\mu e^{\pm t})$	$\lambda > 0, \mu \geq 0$
14	$X_1 + \lambda X_2 + X_3, H_1(1) + H_0(\mu)$	$\mu \geq 0$
15	$X_1 + \lambda X_2 + X_3, H_1(\mu) + H_2(1) + H_0(\rho_0 g t)$	$\mu \geq 0$
16	$X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3, H_0(e^{\pm t})$	$\mu > 0$
17	$X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3, H_1(e^{\pm t})$	$\mu > 0$
18	$X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3, H_1(\delta e^{\pm t}) + H_2(e^{\pm t}) + H_0(\mu \rho_0 g t e^{\pm t})$	$\mu > 0, \delta \geq 0$
19	$X_4, H_0(t^\gamma)$	—
20	$X_4, H_2(t^\gamma)$	$\gamma \neq 1/2$
21	$X_4, H_1(t^\gamma) + H_2(\lambda t^\gamma)$	$\gamma \neq 1/2, \lambda \geq 0$
22	$X_4, H_2(\sqrt{t}) + H_0(\lambda/t)$	$\lambda \geq 0$
23	$X_4, H_1(\sqrt{t}) + H_2(\mu\sqrt{t}) + H_0(\lambda/t)$	$\lambda \geq 0, \mu \geq 0$
24	X_1, X_2	—
25	$X_1, X_2 + H_0(1)$	—
26	$X_1, X_2 + H_1(1) + H_0(\lambda)$	$\lambda \geq 0$
27	$X_1, X_2 + H_1(\lambda) \pm H_2(1)$	$\lambda \geq 0$
28	$X_1, \lambda X_2 + X_3$	—
29	$X_1, \lambda X_2 + X_3 \pm H_2(1)$	—
30	$X_1, \lambda X_2 + X_3 + H_1(1) + H_2(\mu)$	—
31	$X_1 + X_2, \lambda X_1 + X_3 + H_1(\mu) + H_2(\delta)$	$\mu \geq 0$
32	$X_1 + X_3, X_2 + H_1(\lambda) + H_0(\mu)$	$\lambda \geq 0$
33	$X_1 + X_3, X_2 + H_1(\lambda) + H_2(\mu) + H_0(\mu \rho_0 g t)$	$\lambda \geq 0, \mu \neq 0$
34	X_1, X_4	—
35	$X_2 + H_0(\lambda\sqrt{t}), X_4$	$\lambda > 0$
36	$X_2 + H_1(\lambda t^2) + H_2(\mu t^2), X_4$	$\lambda \geq 0$
37	$\lambda X_2 + X_3 + H_2(4gt^2/9) + H_0(\mu\sqrt{t}), X_4$	$\mu > 0$
38	$\lambda X_2 + X_3 + H_1(\mu t^2) + H_2(\delta t^2), X_4$	$\mu \geq 0$

которая легко интегрируется:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\lambda g}{6\nu(\lambda^2 + 1)^2} ((\beta_1 c_1 + \beta_2 c_3)\xi^3 + 3(\beta_1 c_2 + \beta_2 c_4)\xi^2) + c_5 \xi + c_6, & v &= \lambda u, \\ p &= \frac{\rho_0 g}{2(\lambda^2 + 1)} ((\beta_1 c_1 + \beta_2 c_3)\xi^2 + 2(\beta_1 c_2 + \beta_2 c_4)\xi) + c_7, & & \\ T &= c_1 \xi + c_2, & C &= c_3 \xi + c_4, & \xi &= y - \lambda x. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь c_1, \dots, c_7 — произвольные постоянные. В дальнейшем для произвольных постоянных используются аналогичные обозначения.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим подалгебру 29 с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \lambda X_2 + X_3 \pm H_2(1) = \frac{\lambda}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{1 - \lambda}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial C} + \rho_0 g y \frac{\partial}{\partial p} \pm \frac{\partial}{\partial y}.$$

Инвариантное решение в данном случае записывается так:

$$u = U(x), \quad v = V(x), \quad p = P(x) \pm \frac{\rho_0 g}{2} y^2, \quad T = \tilde{T}(x) \pm \frac{\lambda}{\beta_1} y, \quad C = \tilde{C}(x) \pm \frac{1 - \lambda}{\beta_2} y.$$

Подставляя решение в исходную систему, из уравнения неразрывности имеем $U = U_0 = \text{const}$. Тогда из первого уравнения системы (1) следует $p = p_0 = \text{const}$. В дальнейшем рассматривается случай $U_0 = 0$, $\lambda \neq 0$. Новые неизвестные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\nu V_{xx} + g(\beta_1 \tilde{T} + \beta_2 \tilde{C}) = 0; \quad (5)$$

$$\chi \tilde{T}_{xx} \mp \lambda V / \beta_1 = 0; \quad (6)$$

$$d \tilde{C}_{xx} + \alpha d \tilde{T}_{xx} \mp (1 - \lambda) V / \beta_2 = 0. \quad (7)$$

Выразим функцию V из (6) и подставим ее в уравнения (5), (7). Тогда уравнение (7) можно проинтегрировать дважды, в результате получим

$$\tilde{T}_{xxxx} \pm \lambda g(\beta_1 \tilde{T} + \beta_2 \tilde{C}) / (\beta_1 \nu \chi) = 0; \quad (8)$$

$$\tilde{C} = (\beta_1 \chi (1 - \lambda) / (\beta_2 d \lambda) - \alpha) \tilde{T} + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2. \quad (9)$$

Подстановка функции C из (9) в (8) дает

$$\tilde{T}_{xxxx} \pm \frac{g(\beta_1(\lambda d + (1 - \lambda)\chi) - \beta_2 \lambda \alpha d)}{\beta_1 \nu \chi d} \tilde{T} \pm \frac{\beta_2 g \lambda}{\beta_1 \nu \chi} (\tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2) = 0. \quad (10)$$

Введем обозначение для коэффициента при \tilde{T} в (10):

$$a = \pm g(\beta_1(\lambda d + (1 - \lambda)\chi) - \beta_2 \lambda \alpha d) / (\beta_1 \nu \chi d).$$

Уравнение (10) имеет три различных решения для случаев $a < 0$, $a > 0$ и $a = 0$ [8]. Функции V и \tilde{C} определяются из уравнений (6) и (9) соответственно.

1. $a < 0$. Полагаем $\gamma = \pm \sqrt[4]{-a}$, тогда решение исходной системы записывается так:

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= \pm (\beta_1 \chi \gamma^2 / \lambda) (c_3 \operatorname{ch} \gamma x + c_4 \operatorname{sh} \gamma x - c_5 \cos \gamma x - c_6 \sin \gamma x), & p &= p_0 \pm \rho_0 g y^2 / 2, \\ T &= c_3 \operatorname{ch} \gamma x + c_4 \operatorname{sh} \gamma x + c_5 \cos \gamma x + c_6 \sin \gamma x + \beta_2 (c_1 x + c_2) \pm (\lambda / \beta_1) y, \end{aligned} \quad (11)$$

$$C = \left(\frac{\beta_1 \chi (1 - \lambda)}{\beta_2 \lambda d} - \alpha \right) (c_3 \operatorname{ch} \gamma x + c_4 \operatorname{sh} \gamma x + c_5 \cos \gamma x + c_6 \sin \gamma x) - \beta_1 (c_1 x + c_2) \pm \frac{1 - \lambda}{\beta_2} y.$$

Здесь введены новые константы c_1 и c_2 по формуле

$$c_i = -\frac{\lambda d}{\beta_1(\lambda d + (1 - \lambda)\chi) - \beta_2 \lambda \alpha d} \tilde{c}_i, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

2. $a > 0$. Полагая $\gamma = \pm\sqrt[4]{a/4}$, получим представление решения исходной системы в виде

$$\begin{aligned} u &= 0, & p &= p_0 \pm \rho_0 g y^2 / 2, \\ v &= \pm(2\beta_1 \chi \gamma^2 / \lambda)(c_4 \operatorname{sh} \gamma x \cos \gamma x - c_3 \operatorname{sh} \gamma x \sin \gamma x + c_6 \operatorname{ch} \gamma x \cos \gamma x - c_5 \operatorname{ch} \gamma x \sin \gamma x), \\ T &= c_3 \operatorname{ch} \gamma x \cos \gamma x + c_4 \operatorname{ch} \gamma x \sin \gamma x + c_5 \operatorname{sh} \gamma x \cos \gamma x + c_6 \operatorname{sh} \gamma x \sin \gamma x + \beta_2(c_1 x + c_2) \pm \lambda y / \beta_1, \\ C &= (\beta_1 \chi(1-\lambda) / (\beta_2 d \lambda) - \alpha)(c_3 \operatorname{ch} \gamma x \cos \gamma x + c_4 \operatorname{ch} \gamma x \sin \gamma x + c_5 \operatorname{sh} \gamma x \cos \gamma x + c_6 \operatorname{sh} \gamma x \sin \gamma x) - \\ &\quad - \beta_1(c_1 x + c_2) \pm (1-\lambda)y / \beta_2. \end{aligned} \quad (13)$$

В этом случае также производится замена констант по формуле (12).

3. $a = 0$. В этом случае решение имеет вид

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= (\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d) \left(\frac{c_5}{6} x^3 + \frac{c_4}{2} x^2 \pm c_3 x \pm c_2 \right), & p &= p_0 \pm \frac{\rho_0 g}{2} y^2, \\ T &= \pm \frac{c_5}{120} x^5 \pm \frac{c_4}{24} x^4 + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_1 x + c_0 \pm \frac{\chi}{\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d} y, \\ C &= -\frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\pm \frac{c_5}{120} x^5 \pm \frac{c_4}{24} x^4 + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_1 x + c_0 \right) - \\ &\quad - \frac{\nu(\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d)}{g \beta_2} (c_5 x + c_4) \pm \frac{d(\alpha \beta_2 - \beta_1)}{\beta_2(\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d)} y. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введены новые константы c_5 и c_4 по формулам

$$c_5 = -\frac{g \beta_2}{\nu(\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d)} \tilde{c}_1, \quad c_4 = -\frac{g \beta_2}{\nu(\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d)} \tilde{c}_2.$$

ПРИМЕР 3. Возьмем подалгебру 6, базисные операторы которой имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad H_2(e^{\pm t}) = e^{\pm t} \frac{\partial}{\partial y} \pm e^{\pm t} \frac{\partial}{\partial v} - \rho_0 e^{\pm t} y \frac{\partial}{\partial p}.$$

Инвариантное решение здесь имеет представление

$$u = U(x), \quad v = V(x) \pm y, \quad p = P(x) - \rho_0 y^2 / 2, \quad T = T(x), \quad C = C(x).$$

Подставляя данное решение в исходную систему, из уравнения неразрывности получаем выражение для компоненты скорости $U = \mp(x + c_1)$, где c_1 — произвольная постоянная. Тогда из первого уравнения системы (1) находится функция P в выражении для давления:

$$P(x) = -\rho_0 x^2 / 2 - c_1 \rho_0 x + c_2.$$

Остальные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\nu V_{xx} \pm (x + c_1) V_x \mp V + g(\beta_1 T + \beta_2 C) = 0; \quad (15)$$

$$\chi T_{xx} \pm (x + c_1) T_x = 0; \quad (16)$$

$$dC_{xx} \pm (x + c_1) C_x + \alpha d T_{xx} = 0. \quad (17)$$

Введем функцию

$$F^\mp(x, a) = \int_0^{(x+c_1)/\sqrt{2a}} \exp(\mp s^2) ds.$$

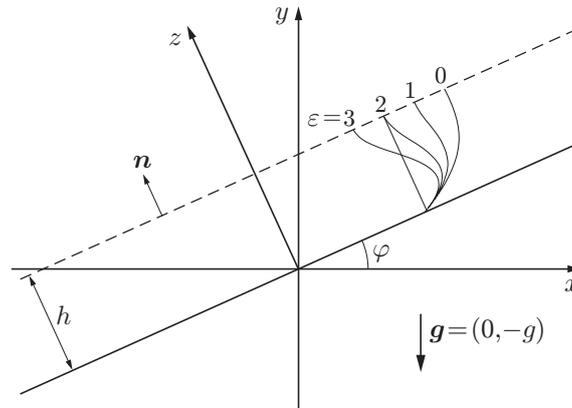


Рис. 1. Наклонный слой жидкости

Система (16), (17) интегрируется (см. [12]):

$$T = c_3 + c_4 F^\mp(x, \chi), \quad C = c_5 + c_6 F^\mp(x, d) + \alpha d T / (\chi - d). \quad (18)$$

Далее ищется решение однородного уравнения (15), которое согласно [12] записывается так:

$$V = c_7 [\exp(\mp(x + c_1)^2 / (2\nu)) \pm \sqrt{2/\nu} (x + c_1) F^\mp(x, \nu)] + c_8 (x + c_1) / \sqrt{2\nu}.$$

Решение соответствующего неоднородного уравнения находится путем подстановки выражений (18) в (15). В результате получаем пример точного решения системы (1) в виде

$$u = \mp(x + c_1),$$

$$v = c_7 [\exp(\mp(x + c_1)^2 / (2\nu)) \pm \sqrt{2/\nu} (x + c_1) F^\mp(x, \nu)] + c_8 (x + c_1) / \sqrt{2\nu} + \\ + g(\beta_1(\chi - d) + \beta_2 \alpha d)(\pm c_3 - c_4 G(x, \chi)) / (\chi - d) + \beta_2 g(\pm c_5 - c_6 G(x, d)) \pm y, \quad (19)$$

$$p = -\rho_0(x^2 + y^2)/2 - c_1 \rho_0 x + c_2, \quad T = c_3 + c_4 F^\mp(x, \chi), \quad C = c_5 + c_6 F^\mp(x, d) + \alpha d T / (\chi - d).$$

Здесь

$$G(x, a) = \left[\frac{x + c_1}{\sqrt{\nu a}} F^\mp(x, \nu) \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(\mp \frac{1}{2\nu} (x + c_1)^2\right) \right] \int_{-c_1}^x \exp\left(\pm \frac{a - \nu}{2\nu a} (\tau + c_1)^2\right) d\tau - \\ - \frac{x + c_1}{\sqrt{\nu a}} \int_{-c_1}^x \exp\left(\pm \frac{a - \nu}{2\nu a} (\tau + c_1)^2\right) F^\mp(\tau, \nu) d\tau \mp F^\mp(x, a).$$

4. Физическая интерпретация решений. Приведем возможную физическую интерпретацию решений, полученных в примерах 1, 2 из п. 3. Интерпретация решения (19), найденного в примере 3, представляется пока затруднительной.

Термодиффузия в наклонном слое. Рассмотрим решение (4), в котором все искомые функции сохраняют постоянные значения на прямых $\xi = y - \lambda x = \text{const}$. Пусть имеется слой жидкости толщиной h , расположенный под углом $0 \leq \varphi < 90^\circ$ к горизонту. Снизу и сверху жидкость ограничена нагретой твердой стенкой и свободной границей соответственно, при этом они являются прямыми линиями с единичным вектором нормали \mathbf{n} (рис. 1). Предполагается, что в любом поперечном сечении слоя существует постоянная разность температур Θ между твердой стенкой и свободной границей. На стенке

$y - x \operatorname{tg} \varphi = 0$ ставятся условия прилипания и отсутствия потока вещества, а также задается распределение температуры:

$$u = v = 0, \quad -d\left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right) = 0, \quad T = \Theta.$$

На свободной границе $y - x \operatorname{tg} \varphi = h / \cos \varphi$ должны быть выполнены кинематическое и динамическое условия

$$u \operatorname{tg} \varphi - v = 0, \quad ((p - p_g)E - 2\nu\rho_0 D(\mathbf{u}))\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_\Gamma \sigma. \quad (20)$$

Здесь p_g — давление на свободной границе; E — единичная матрица; $D(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций; $\sigma = \sigma(T, C)$ — коэффициент поверхностного натяжения; H — средняя кривизна свободной поверхности; $\nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ — поверхностный градиент. Так как в решении (4) температура и концентрация на свободной границе постоянны, то поверхностный градиент в (20) равен нулю. Свободная поверхность есть прямая линия, поэтому $H = 0$. Кинематическое условие здесь выполнено тождественно. На свободной границе также задается распределение температуры и ставится условие отсутствия потока вещества через границу:

$$T = 0, \quad -d\left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right) = 0.$$

Зададим среднюю концентрацию в поперечном сечении и предположим, что вдоль слоя она остается постоянной. Тогда для функции C , которая определяет отклонения от среднего значения, получается условие

$$\int_0^h C d\gamma = 0, \quad \gamma: y \operatorname{tg} \varphi + x = 0.$$

Для определения неизвестных постоянных решение (4) и граничные условия переписываются в безразмерной форме. Введем характерные масштабы времени h^2/ν , расстояния h , скорости $g\beta_1\Theta h^2/\nu$, давления $\rho_0 g h \beta_1 \Theta$, температуры Θ и концентрации $\beta_1\Theta/\beta_2$. В безразмерных переменных уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \operatorname{Gr}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{u} + \mathbf{q}(T + C), \\ T_t + \operatorname{Gr}(\mathbf{u} \cdot \nabla T) &= \Delta T / \operatorname{Pr}, \\ C_t + \operatorname{Gr}(\mathbf{u} \cdot \nabla C) &= (\Delta C - \varepsilon \Delta T) / \operatorname{Sc}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{q} = (0, 1)$. Система содержит четыре безразмерных параметра — числа Грасгофа $\operatorname{Gr} = g\beta_1\Theta h^3/\nu^2$, Прандтля $\operatorname{Pr} = \nu/\chi$, Шмидта $\operatorname{Sc} = \nu/d$ и параметр $\varepsilon = -\alpha\beta_2/\beta_1$, определяющий эффект термодиффузии.

Так как рассматриваемое решение зависит от одной переменной, удобно ввести ось z перпендикулярно к слою и записать все искомые величины как функции координаты z . Решение (4), удовлетворяющее поставленным граничным условиям, записывается в безразмерных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} u' &= \sin \varphi (2(\varepsilon + 1)z^3 - 3(\varepsilon + 2)z^2 + 6z) / 12, \\ p &= \cos \varphi (-(\varepsilon + 1)z^2 + (\varepsilon + 2)z - 1) / 2 + p'_g, \quad T = -z + 1, \quad C = \varepsilon(-z + 1/2). \end{aligned}$$

Здесь функция $u' = u / \cos \varphi$ определяет профиль скорости в поперечном сечении, $p'_g = p_g(\rho_0 g h \beta_1 \Theta)^{-1}$. На рис. 2 показаны профили скорости для различных значений параметра

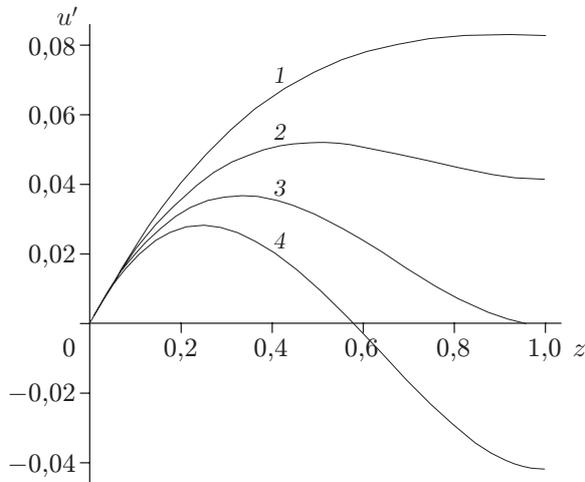


Рис. 2

Рис. 2. Профили скорости в наклонном слое при различных значениях параметра термодиффузии:

1 — $\varepsilon = 0$; 2 — $\varepsilon = 1$; 3 — $\varepsilon = 2$; 4 — $\varepsilon = 3$

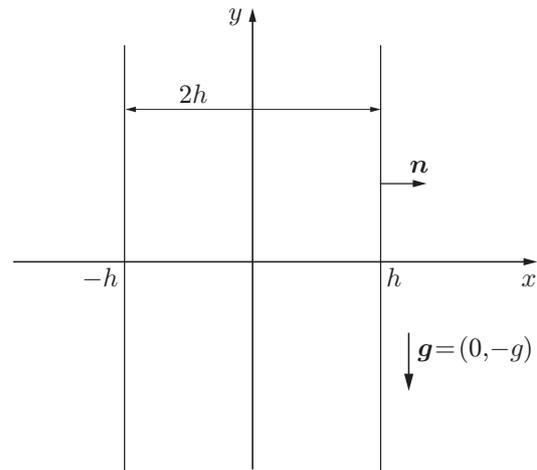


Рис. 3

Рис. 3. Вертикальный слой жидкости

термодиффузии при угле наклона $\varphi = 30^\circ$. Прямая $z = 0$ соответствует твердой стенке, а $z = 1$ — свободной границе. При отсутствии термодиффузии (кривая 1) жидкость поднимается вверх по слою за счет разности температур между стенкой и свободной границей. В случае аномальной термодиффузии параметр $\varepsilon < 0$ и легкий компонент концентрируется около холодной свободной границы. В результате скорость подъема жидкости увеличивается, однако ее профиль подобен профилю скорости для $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon > 0$ имеет место нормальная термодиффузия. Легкий компонент диффундирует в сторону нагретой стенки, а тяжелый — в сторону холодной границы. Это приводит к уменьшению скорости (кривая 2). При $\varepsilon = 2$ (кривая 3) скорость на свободной границе обращается в нуль. При дальнейшем увеличении параметра термодиффузии концентрация тяжелого компонента у свободной границы растет. Под действием силы тяжести жидкость начинает двигаться вниз, однако около стенки сохраняется противоположное направление движения (кривая 4).

Термодиффузия в вертикальном слое. Рассмотрим решение (11), (13), (14) и приведем его возможную физическую интерпретацию. Пусть имеется вертикальный слой жидкости толщиной $2h$ между двумя твердыми стенками с единичным вектором нормали \mathbf{n} (рис. 3). На стенках ставятся условия прилипания и отсутствия потока вещества через стенку, а также задается линейное распределение температуры по координате y . Предполагается, что в любом поперечном сечении имеется постоянная разность температур 2Θ . Таким образом, условия на стенках $x = \pm h$ имеют вид

$$u = v = 0, \quad T = Ay \pm \Theta, \quad -d\left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right) = 0. \quad (21)$$

Кроме того, ставятся условия замкнутости потока и постоянства вертикального градиента концентрации:

$$\int_{-h}^h v dx = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\partial C}{\partial y} dy = B. \quad (22)$$

Условия (21), (22) записываются в безразмерной форме

$$x = \pm 1: \quad u = v = 0, \quad T = \frac{\text{Ra}}{\text{Gr Pr}} y \pm 1, \quad \frac{\partial C}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\int_{-1}^1 v dx = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\partial C}{\partial y} dy = \frac{\text{Ra}_d}{\text{Gr Sc}}.$$

Здесь используются те же безразмерные переменные, что и в предыдущем примере, однако появляются два новых безразмерных параметра — число Рэлея $\text{Ra} = g\beta_1 Ah^4/(\nu\chi)$ и концентрационное число Рэлея $\text{Ra}_d = g\beta_2 Bh^4/(\nu d)$. Эти числа определяются по вертикальным градиентам температуры и концентрации соответственно.

Для выполнения поставленных граничных условий рассматриваемое решение подвергается преобразованию растяжения, которое задается оператором X_4 из (2). Это позволяет ввести в решение независимый вещественный параметр, который будет определять коэффициент при y в выражениях для концентрации (см. (11), (13)).

Параметр a , от которого зависит вид решения, в безразмерных переменных принимает вид $a' = \text{Ra}(\varepsilon + 1) + \text{Ra}_d$. Запишем решение, удовлетворяющее поставленным граничным условиям для всех трех случаев.

1. $\text{Ra}(\varepsilon + 1) + \text{Ra}_d < 0$. Решение системы (1) дается формулами

$$u = 0, \quad v = \frac{(\varepsilon + 1)\gamma^2}{S} \left[\frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma} - \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right], \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Ra}}{\text{Gr Pr}} + \frac{\text{Ra}_d}{\text{Gr Sc}} \right] y^2,$$

$$T = \frac{(\varepsilon + 1)\text{Ra}}{S} \left[\frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right] + \frac{\gamma \text{Ra}_d}{S} (\text{ctg } \gamma + \text{cth } \gamma)x + \frac{\text{Ra}}{\text{Gr Pr}} y,$$

$$C = \frac{(\varepsilon + 1)(\text{Ra}\varepsilon + \text{Ra}_d)}{S} \left[\frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right] - \frac{\gamma \text{Ra}_d}{S} (\text{ctg } \gamma + \text{cth } \gamma)x + \frac{\text{Ra}_d}{\text{Gr Sc}} y, \quad (23)$$

$$\gamma = \sqrt[4]{-\text{Ra}(\varepsilon + 1) - \text{Ra}_d}, \quad S = 2\text{Ra}(\varepsilon + 1) + \gamma \text{Ra}_d (\text{ctg } \gamma + \text{cth } \gamma).$$

2. $\text{Ra}(\varepsilon + 1) + \text{Ra}_d > 0$. Искомые функции записываются так:

$$u = 0, \quad v = \frac{4(\varepsilon + 1)\gamma^2}{S} (\sin \gamma \text{ch } \gamma \cos \gamma x \text{sh } \gamma x - \cos \gamma \text{sh } \gamma \sin \gamma x \text{ch } \gamma x),$$

$$T = \frac{2(\varepsilon + 1)\text{Ra}}{S} (\cos \gamma \text{sh } \gamma \cos \gamma x \text{sh } \gamma x + \sin \gamma \text{ch } \gamma \sin \gamma x \text{ch } \gamma x) +$$

$$+ \frac{\gamma \text{Ra}_d}{S} (\sin 2\gamma + \text{sh } 2\gamma)x + \frac{\text{Ra}}{\text{Gr Pr}} y,$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Ra}}{\text{Gr Pr}} + \frac{\text{Ra}_d}{\text{Gr Sc}} \right] y^2, \quad (24)$$

$$C = \frac{2(\varepsilon + 1)(\text{Ra}\varepsilon + \text{Ra}_d)}{S} (\cos \gamma \text{sh } \gamma \cos \gamma x \text{sh } \gamma x + \sin \gamma \text{ch } \gamma \sin \gamma x \text{ch } \gamma x) -$$

$$- \frac{\gamma \text{Ra}_d}{S} (\sin 2\gamma + \text{sh } 2\gamma)x + \frac{\text{Ra}_d}{\text{Gr Sc}} y,$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{\text{Ra}(\varepsilon + 1) + \text{Ra}_d}{4}}, \quad S = \text{Ra}(\varepsilon + 1)(\text{ch } 2\gamma - \cos 2\gamma) + \gamma \text{Ra}_d (\sin 2\gamma + \text{sh } 2\gamma).$$

3. $Ra(\varepsilon + 1) + Ra_d = 0$. Решение исходной системы имеет представление

$$\begin{aligned}
 u &= 0, & v &= \frac{15(\varepsilon + 1)}{2Ra(\varepsilon + 1) - 90} (x^3 - x), & p &= p_0 + \frac{Ra}{2GrPr} \left(1 - \frac{Pr}{Sc}(\varepsilon + 1)\right) y^2, \\
 T &= \frac{Ra(\varepsilon + 1)}{8Ra(\varepsilon + 1) - 360} (3x^5 - 10x^3 + 15x) - \frac{45}{Ra(\varepsilon + 1) - 45} x + \frac{Ra}{GrPr} y, & (25) \\
 C &= -\frac{Ra(\varepsilon + 1)}{8Ra(\varepsilon + 1) - 360} (3x^5 - 10x^3 + 15x) - \frac{45\varepsilon}{Ra(\varepsilon + 1) - 45} x - \frac{Ra(\varepsilon + 1)}{GrSc} y.
 \end{aligned}$$

Из приведенных формул видно, что при $\varepsilon = -1$ скорость обращается в нуль, а распределения температуры и концентрации становятся линейными по координате x . Следовательно, в системе возможно механическое равновесие. Кроме того, в первом и втором случаях можно подобрать градиенты температуры и концентрации (или соответствующие числа Рэлея Ra и Ra_d) таким образом, чтобы давление в слое было постоянным с точностью до гидростатического.

Профили скорости, температуры и концентрации в сечении $y = 0$ при различных значениях параметра термодиффузии приведены на рис. 4. Эти профили соответствуют числам Рэлея $Ra = 300$, $Ra_d = 0$. Функции v , T , C при $y = 0$ однозначно определяются заданием указанных параметров.

При отсутствии термодиффузии (кривая 2) жидкость поднимается вверх около нагретой границы и опускается вниз около холодной. В этом случае отсутствуют неоднородности концентрации ($C = 0$). Если параметр $\varepsilon > 0$, то происходит нормальная термодиффузия и легкий компонент диффундирует в сторону нагретой границы. Это приводит к увеличению скорости (кривая 1). При отрицательных значениях параметра имеет место аномальная термодиффузия. Легкий компонент стремится в сторону холодной границы, в результате чего скорость движения уменьшается. При $\varepsilon = -1$ наступает механическое равновесие. Дальнейшее уменьшение параметра термодиффузии приводит к инверсии профиля скорости (кривая 3). Концентрация легкого компонента у холодной границы становится достаточно высокой, для того чтобы вблизи этой границы жидкость начала подниматься вверх, а вблизи нагретой границы — опускаться вниз. При дальнейшем уменьшении параметра опять наблюдается инверсия профиля скорости (кривая 4). Непосредственно вблизи холодной и нагретой границ жидкость движется вверх и вниз соответственно, а в середине слоя направление движения меняется на противоположное. При этом наблюдаются значительные неоднородности температуры и концентрации в слое.

Решения (23)–(25) обобщают ряд ранее известных решений уравнений конвекции однородной жидкости [1], а также бинарной смеси [2–5] на случай термодиффузионного движения смеси при различных граничных условиях (наличие или отсутствие продольных градиентов температуры или концентрации и их различные направления).

Заключение. Изучены групповые свойства уравнений термодиффузии бинарной смеси в плоском случае. Найдены допускаемая алгебра Ли операторов и соответствующая группа преобразований, которая оказалась бесконечномерной. Построены оптимальные системы подалгебр первого и второго порядков (проведена классификация инвариантных решений). Найдены примеры точных решений, инвариантных относительно двумерных подалгебр из оптимальной системы. Отыскание таких решений сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведена физическая интерпретация полученных результатов. Найдены точные решения, описывающие процесс термодиффузии в наклонном слое со свободной границей и вертикальном слое при наличии продольных градиентов температуры и концентрации. Исследовано влияние эффекта термодиффузии на режим течений.

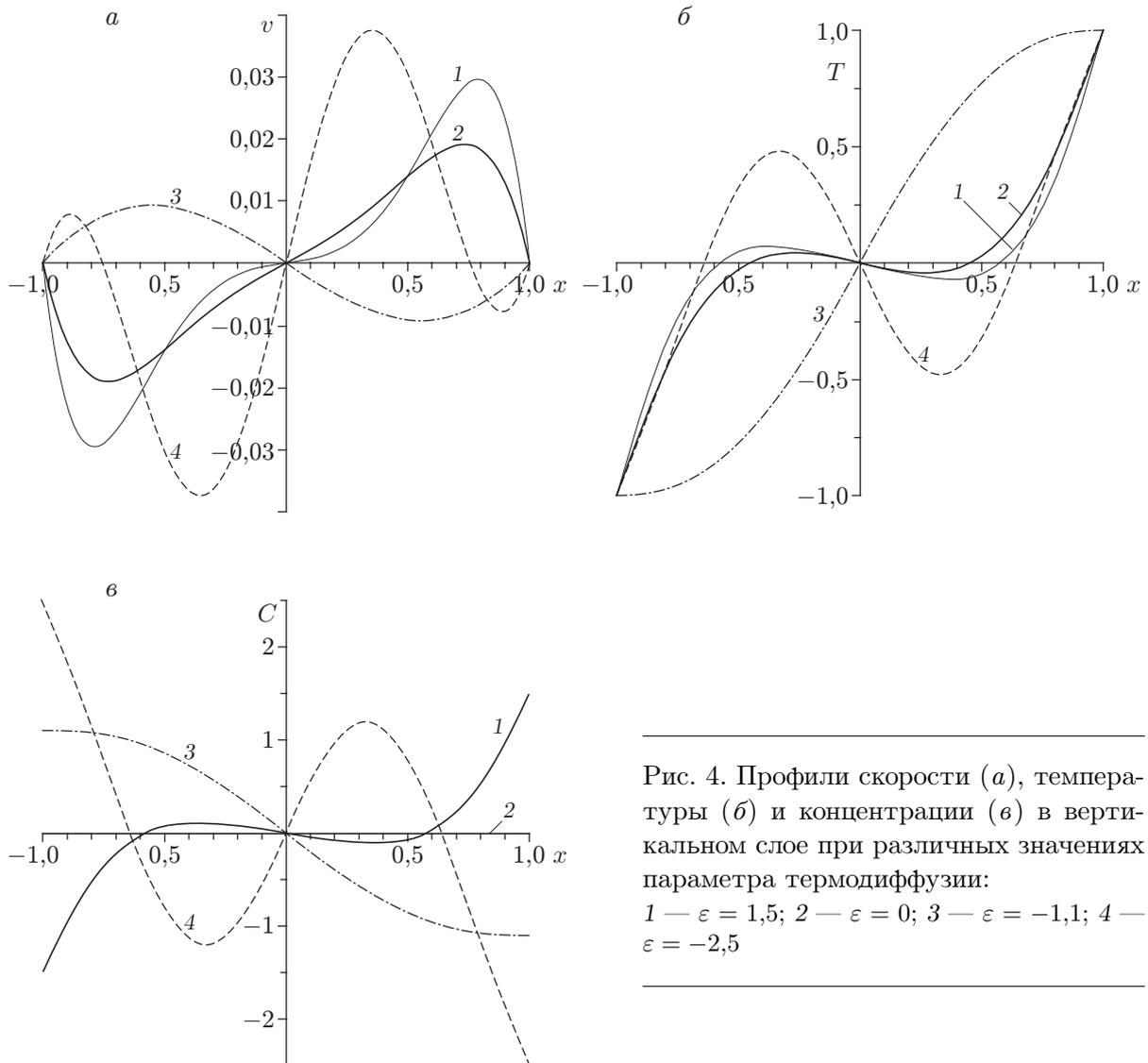


Рис. 4. Профили скорости (а), температуры (б) и концентрации (в) в вертикальном слое при различных значениях параметра термодиффузии:

1 — $\varepsilon = 1,5$; 2 — $\varepsilon = 0$; 3 — $\varepsilon = -1,1$; 4 — $\varepsilon = -2,5$

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения бинарной смеси // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 5. С. 823–830.
3. Yanase S., Kohno K. The effect of a salinity gradient on the instability of natural convection in a vertical fluid layer // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54, N 10. P. 3747–3756.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е. Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 66–71.

5. **Николаев Б. И., Тубин А. А.** Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси в плоской термодиффузионной колонне // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 248–254.
6. **Сморозин Б. Л.** Конвекция бинарной смеси в условиях термодиффузии и переменного градиента температуры // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 54–61.
7. **Андреев В. К.** Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии // Тр. III Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Красноярск, 25–29 авг. 2002 г. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2002. С. 13–17.
8. **Рыжков И. И.** Оптимальная система подалгебр для уравнений термодиффузии // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 95–104.
9. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
11. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
12. **Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

*Поступила в редакцию 8/XII 2004 г.,
в окончательном варианте — 24/II 2005 г.*
