

УДК 517.946

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭМУЛЬСИИ

А. Г. Петрова

Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул  
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 630090 Новосибирск

Доказано существование на полубесконечном интервале автомодельного решения задачи об одномерном движении эмульсии под действием термокапиллярных сил. Особенности поведения решения иллюстрируются численными примерами для эмульсий алюминий — свинец, в которых несущей фазой является свинец или алюминий. Проводится сравнение с решением автомодельной задачи, линеаризованной по малой концентрации примеси.

Ключевые слова: эмульсия, термокапиллярные силы, автомодельное решение.

**1. Постановка задачи.** Модель движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил сформулирована О. В. Воиновым и В. В. Пухначевым в 1995 г. [1]. Исследованию этой модели (вопросов устойчивости простейших решений, задачи затвердевания эмульсии в линеаризованной постановке, простейших разрывных решений) посвящен ряд работ, обзор основных результатов приведен в [2]. Однако даже в одномерном случае модель весьма сложна и недостаточно изучена. Представляет интерес нахождение и исследование нетривиальных точных решений полной задачи, в частности автомодельного решения с переменной  $\xi = x/\sqrt{t}$ . Отметим, что автомодельное решение линеаризованной задачи затвердевания эмульсии рассмотрено в [3].

Определяющие уравнения модели Воинова — Пухначева [1] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial(1-c)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-c)\mathbf{v}) &= 0, \\ \rho_d c \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \rho_m (1-c) \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= \\ &= -\nabla p + \operatorname{div}(\mu_m(1+cN)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*)) + \rho_d c \mathbf{g} + \rho_m (1-c) \mathbf{g}, \\ \rho_d \lambda_d c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) + \rho_m \lambda_m (1-c) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) &= \operatorname{div}(k(c)\nabla T); \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= K\mathbf{g} + L\nabla T. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $c \ll 1$  — концентрация дисперсной фазы;  $T$  — общая температура;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  — осредненные скорости дисперсной и несущей фаз соответственно;  $p$  — давление; индексы  $d$  и  $m$  используются для обозначения параметров дисперсной и несущей фаз соответственно;

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-5873.2006.1).

$\rho$  — плотность;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\lambda$  — удельная теплоемкость;  $k$  — теплопроводность;

$$N = \frac{\mu_m + 5\mu_d/2}{\mu_m + \mu_d}; \quad K = \frac{2R^2(\rho_d - \rho_m)(\mu_m + \mu_d)}{3\mu_m(2\mu_m + 3\mu_d)}; \quad L = \frac{2Rk_m\sigma_T}{(2\mu_m + 3\mu_d)(2k_m + k_d)};$$

$R$  — радиус сферических включений;  $\sigma_T$  — производная (с обратным знаком) поверхностного натяжения по температуре.

Теплопроводность смеси определялась с помощью линейного приближения (по малым значениям  $c$ ) формулы Максвелла. Поскольку модель [1] строилась в предположении малости концентрации дисперсной фазы, использование линейного приближения правомерно и целесообразно. В данном случае удобнее использовать нелинейную теплопроводность  $k(c)$ . Ее значение ограничено снизу и сверху:  $\min(k_d, k_m)$  и  $\max(k_d, k_m)$ . Пусть  $\max|k'(c)| \leq P$ . Для простоты при получении оценок будем считать  $P/\min(k_d, k_m) \leq 5$ , хотя формула Максвелла позволяет получить более точную оценку.

В случае одномерного движения с плоскими волнами задача сводится к системе двух уравнений [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ c \left( Kg + L \frac{\partial T}{\partial x} \right) - f \right\} (1 - c) &= 0, \\ [\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1 - c)] \left( \frac{\partial T}{\partial t} + f \frac{\partial T}{\partial x} \right) + (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m) c (1 - c) \left( Kg + L \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} &= \\ &= k_m \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - Mc) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

где  $g = |g|$ ;  $f = f(t) = cu + (1 - c)v$  — среднеобъемная скорость движения эмульсии. Для ее определения требуется дополнительное граничное условие, например,  $f = 0$  в случае, когда течение имеет плоскость симметрии или непроницаемую стенку.

Если  $Kg = 0$ ,  $f(t) = \gamma/\sqrt{t}$ , то одномерная задача допускает автомодельную формулировку

$$\begin{aligned} -\frac{\xi}{2} \frac{dc}{d\xi} + \left( (1 - 2c)L \frac{dT}{d\xi} - \gamma \right) \frac{dc}{d\xi} + c(1 - c)L \frac{d^2T}{d\xi^2} &= 0, \\ \left( -\frac{\xi}{2} - \gamma \right) (\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1 - c)) \frac{dT}{d\xi} + c(1 - c) (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m) \left( L \frac{dT}{d\xi} \right)^2 &= \frac{d}{d\xi} \left( k(c) \frac{dT}{d\xi} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\xi = x/\sqrt{t}$ ;  $c = c(\xi)$ ;  $T = T(\xi)$ .

Наиболее естественная краевая задача для системы (1.2) возникает в случае  $\gamma = 0$  при граничных условиях

$$c(\infty) = c_\infty, \quad T(0) = T_0, \quad T(\infty) = T_\infty, \quad T_0 > T_\infty \quad (1.3)$$

и соответствует скачкообразному повышению температуры на левой границе. Менее естественная, но более простая краевая задача

$$c(0) = c_0, \quad LT_\xi(0) = \theta_0 \quad (1.4)$$

соответствует заданию на левой границе постоянной концентрации, отличной от начальной, и градиента температуры специального вида. Введем следующее обозначение:

$\theta(\xi) = L dT/d\xi$ . Эту величину будем называть автомодельной относительной скоростью (см. (1.1)). В дальнейшем всюду  $\gamma = 0$ . Систему (1.2) запишем в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\xi}{2} \frac{dc}{d\xi} + ((1-2c)\theta) \frac{dc}{d\xi} + c(1-c) \frac{d\theta}{d\xi} &= 0, \\ -\frac{\xi}{2} (\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1-c))\theta + c(1-c)(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)\theta^2 &= \frac{d}{d\xi} (k(c)\theta). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Аналогично тому как это сделано в [3] для задачи затвердевания примеси, линеаризуем систему (1.2) относительно малой концентрации. В результате система распадается, концентрация находится из уравнения

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dc}{d\xi} + \frac{dc}{d\xi} \frac{dT}{d\xi} + c \frac{d^2 T}{d\xi^2} = 0, \quad (1.6)$$

где  $T(\xi)$  является решением уравнения

$$-\frac{\xi}{2} \rho_m \lambda_m \frac{dT}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( k_m \frac{dT}{d\xi} \right). \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.6), (1.7), (1.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} T(\xi) &= T_0 + \theta_0 \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\xi^2 \rho_m \lambda_m}{4k_m}\right) d\xi, \\ c(\xi) &= c_0 \exp\left(-\theta_0 \int_0^\xi \frac{\xi \rho_m \lambda_m \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m / (4k_m))}{\xi k_m - 2k_m \theta_0 \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m / (4k_m))} d\xi\right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_0 &= (T_\infty - T_0) / \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m / (4k_m)) d\xi, \\ c_0 &= c_\infty \exp\left(\theta_0 \int_0^\infty \frac{\xi \rho_m \lambda_m \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m / (4k_m))}{\xi k_m - 2k_m \theta_0 \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m / (4k_m))} d\xi\right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

В отличие от линеаризованной задачи существование решения полной автомодельной задачи (1.2), (1.3) не очевидно. Прежде чем доказывать ее разрешимость, рассмотрим более простую вспомогательную задачу (1.5), (1.4).

**2. Вспомогательная краевая задача.** Разрешая систему (1.5) относительно производных, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\xi} &= \theta \left( \frac{\xi}{2} - (1-2c)\theta \right) \frac{-\xi(\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1-c))/2 + c(1-c)(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)\theta}{\xi k(c)/2 - (k(c)(1-2c) - k'(c)c(1-c))\theta}, \\ \frac{dc}{d\xi} &= c(1-c)\theta \frac{-\xi(\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1-c))/2 + c(1-c)(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)L\theta}{\xi k(c)/2 - (k(c)(1-2c) - k'(c)c(1-c))\theta}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем функции

$$\psi(\xi, c, \theta) = \frac{\xi/2 - (1-2c)\theta}{\xi k(c)/2 - (k(c)(1-2c) - k'(c)c(1-c))\theta}; \quad (2.2)$$

$$\varphi(\xi, c, \theta) = \frac{-\xi(\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1 - c))/2 + c(1 - c)(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)\theta}{\xi k(c)/2 - (k(c)(1 - 2c) - k'(c)c(1 - c))\theta} \quad (2.3)$$

и запишем систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\xi} &= -\frac{\xi}{2} (\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1 - c))\theta\psi + c(1 - c)(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)\theta^2\psi(\xi, c, \theta), \\ \frac{dc}{d\xi} &= c(1 - c)\theta\varphi(\xi, c, \theta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для системы (2.4) на промежутке  $[0, \infty)$  рассмотрим краевую задачу (1.4), которая принимает вид

$$c(0) = c_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.5)$$

Будем искать классическое решение задачи (2.4), (2.5) на участке  $[0, \infty)$ , причем

$$c \in [0, c^*], \quad (2.6)$$

где  $c^* \leq 0,1$  — некоторое положительное число. Следует отметить, что ограничение (2.6) не усложняет задачу, так как рассматриваемая модель построена в предположении малости концентрации.

Следующий результат вытекает из классических теорем для обыкновенных дифференциальных уравнений:

**Лемма 2.1.** *Задача (2.4), (2.5) с граничными условиями, удовлетворяющими (2.6), имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий и ограниченное на промежутке  $[0, \infty)$ .*

**Лемма 2.2.** *Для решения задачи (2.4), (2.5) с граничными условиями, удовлетворяющими (2.6), справедливы представления*

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \theta_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\xi \psi \xi (\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1 - c)) d\xi\right) / \\ &/ \left[1 - \theta_0 \int_0^\xi c(1 - c)(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)\psi \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\xi \psi \eta (\rho_d \lambda_d c + \rho_m \lambda_m (1 - c)) d\eta\right) d\xi\right]; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$c(\xi)(1 - c(\xi)) = c_0(1 - c_0) \exp\left(\int_0^\xi (1 - 2c)\theta(\xi)\varphi(\xi, c, \theta) d\xi\right) \quad (2.8)$$

и неравенства

$$\theta < 0, \quad c > 0. \quad (2.9)$$

Формулы (2.7)–(2.9) следуют непосредственно из уравнений (2.4) и краевых условий (2.5).

Остальные свойства решения  $c(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  существенно зависят от знака разности  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m$ . Из формул (2.3), (2.7), (2.8) следует, что в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$  функции  $c(\xi)$  и  $\theta(\xi)$  являются монотонно возрастающими; если  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m < 0$ , то они имеют минимумы в рассматриваемом промежутке, что несколько усложняет доказательство.

**3. Оценки автомодельной относительной скорости.** Следующее утверждение проверяется непосредственно.

**Лемма 3.1.** При выполнении условий (2.6) функция  $\psi$ , заданная формулой (2.2), является гладкой функцией своих аргументов, удовлетворяющей неравенству

$$\alpha \leq \psi(\xi, c, \theta) \leq \beta, \quad (3.1)$$

где

$$\alpha = \frac{0,64}{\max(k_d, k_m)}, \quad \beta = \frac{4}{\min(k_d, k_m)},$$

при  $c \in [0, c^*]$ ,  $c^* \leq 0,1$ ,  $P/\min(k_d, k_m) \leq 5$ .

**Лемма 3.2.** В области применимости леммы 3.1 отрицательная функция  $\theta$ , являющаяся решением задачи (2.4), (2.5), удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |\theta_0| \exp(-\xi^2 \beta \rho_d \lambda_d / 4) / \left(1 + |\theta_0| c^* \beta (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m) \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m \alpha / 4) d\xi\right) \leq \\ \leq |\theta| \leq |\theta_0| \exp(-\xi^2 \alpha \rho_m \lambda_m / 4) \end{aligned} \quad (3.2)$$

в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$  и

$$|\theta_0| \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m \beta / 4) \leq |\theta| \leq 2|\theta_0| \exp(-\xi^2 \rho_d \lambda_d \alpha / 4) \quad (3.3)$$

при

$$|\theta_0| < 1 / \left(2\beta(\rho_m \lambda_m - \rho_d \lambda_d) c^* \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \rho_d \lambda_d \alpha / 4) d\xi\right) \quad (3.4)$$

в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m < 0$ .

Доказательство леммы 3.2 основано на использовании представления (2.7) для функции  $\theta(\xi)$  и оценок (3.1) для функции  $\psi$ .

**4. Оценки концентрации.** Следующее утверждение проверяется непосредственно.

**Лемма 4.1.** В случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} -a \leq \varphi \leq 0, \\ a = \max\left(\frac{\rho_m \lambda_d + (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m) c^*}{\min(k_d, k_m)}, \frac{4c^* (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)}{\min(k_d, k_m)}\right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m < 0$  — соотношения

$$0 < \varphi(\xi) \leq \frac{4c^* (\rho_m \lambda_m - \rho_d \lambda_d)}{\min(k_d, k_m)} \quad \text{при } \xi \leq \xi^*; \quad (4.2)$$

$$-\frac{\rho_m \lambda_m}{\min(k_d, k_m)} \leq \varphi(\xi) \leq 0 \quad \text{при } \xi > \xi^*, \quad (4.3)$$

где  $\xi^*$  — корень уравнения  $\varphi(\xi, c(\xi), \theta(\xi)) = 0$ .

Доказательство леммы 4.1 состоит в использовании оценки (3.1) применительно к интегральным представлениям (2.7), (2.8).

**Лемма 4.2.** Для функции  $c(\xi)$ , являющейся решением вспомогательной задачи (2.4), (2.5), имеют место следующие оценки:

— в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$

$$c_0(1 - c_0) \leq c(\xi)(1 - c(\xi)) \leq c_0(1 - c_0) \exp \left( |\theta_0| \int_0^\xi a \exp(-\xi^2 \alpha \rho_m \lambda_m / 4) d\xi \right); \quad (4.4)$$

— в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m < 0$

$$c_0(1 - c_0) \exp(-1) \leq c(\xi)(1 - c(\xi)) \leq c_0(1 - c_0) \exp \left( \frac{\rho_m \lambda_m}{4(\rho_m \lambda_m - \rho_d \lambda_d) c^*} \right). \quad (4.5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для получения оценки снизу в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$  достаточно заметить, что функция  $c(\xi)$  монотонно не убывает, а для получения оценки сверху необходимо использовать представление (2.8), оценку (3.2) для функции  $\theta$  и оценку (4.1) для функции  $\varphi$ .

Для получения оценок в случае  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_d < 0$  запишем представление (2.8) в виде

$$c(\xi)(1 - c(\xi)) = c_0(1 - c_0) \exp \left( \int_0^{\xi^*} (1 - 2c)\theta\varphi(\xi, c, \theta) d\xi + \int_{\xi^*}^{\infty} (1 - 2c)\theta\varphi(\xi, c, \theta) d\xi \right), \quad (4.6)$$

где  $\xi^*$  — корень уравнения  $\varphi(\xi, c(\xi), \theta(\xi)) = 0$ . Из (4.6) следует неравенство

$$c(\xi)(1 - c(\xi)) \geq c_0(1 - c_0) \exp \left( \int_0^{\xi^*} (1 - 2c)\theta(\xi)\varphi(\xi, c, \theta) d\xi \right),$$

которое вместе с оценками (3.3) и (4.2) приводит к оценке снизу в (4.5). Для того чтобы получить оценку сверху, отбросим первое (отрицательное) слагаемое в аргументе экспоненты в равенстве (4.6). В результате получим неравенство

$$c(\xi)(1 - c(\xi)) \leq c_0(1 - c_0) \exp \left( \int_{\xi^*}^{\infty} (1 - 2c)\theta\varphi(\xi, c, \theta) d\xi \right).$$

Тем самым с учетом (3.3) и (4.3) неравенство (4.5) и лемма 4.2 доказаны.

**5. Существование автомодельного решения основной задачи.** Вернемся к задаче (1.2), (1.3) в случае  $\gamma = 0$ . Проинтегрируем (2.7) в интервале от 0 до  $\infty$  и подставим  $\xi = \infty$  в формулу (2.8). В результате получим уравнения

$$T_\infty - T_0 = \frac{1}{L} \int_0^\infty \theta d\xi \equiv -F(\theta_0, c_0),$$

$$c_\infty(1 - c_\infty) = c_0(1 - c_0) \exp \left( \int_0^\infty (1 - 2c)\theta(\xi)\varphi(\xi, c, \theta) d\xi \right) \equiv G(\theta_0, c_0).$$

Рассмотрим случай  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$ . Из оценок (3.2) следует неравенство

$$|\theta_0| \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \beta \rho_d \lambda_d / 4) d\xi / \left[ L \left( 1 + |\theta_0| c^* \beta (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m) \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \rho_m \lambda_m \alpha / 4) d\xi \right) \right] \leq \\ \leq F(\theta_0, c_0) \leq \frac{|\theta_0|}{L} \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \alpha \rho_m \lambda_m / 4) d\xi,$$

из которого в силу непрерывности  $F$  и условия  $F(0, c_0) = 0$  следует, что для любых  $T_0, T_\infty$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < T_0 - T_\infty \leq \frac{\sqrt{\rho_m \lambda_m \alpha}}{\sqrt{\rho_d \lambda_d \beta} L \beta c^* (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)}, \quad (5.1)$$

и для любых  $c_0 \in (0, c^*]$  найдется  $\theta_0 < 0$ , такое что

$$T_0 - T_\infty = F(\theta_0, c_0). \quad (5.2)$$

Обозначим через  $\theta_0(c_0)$  наименьшее по модулю решение уравнения (5.2).

Используя оценку (4.4), получим

$$c_0(1 - c_0) \leq G(\theta_0(c_0), c_0) \leq c_0(1 - c_0) \exp \left( |\theta_0(c_0)| \int_0^\infty a \exp(-\xi^2 \alpha \rho_m \lambda_m / 4) d\xi \right).$$

Поскольку функция  $G$  непрерывна и обращается в нуль при  $c_0 = 0$ , для любых  $c_\infty$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < c_\infty \leq c^*, \quad (5.3)$$

найдется значение  $c_0 \in (0, c_\infty)$ , такое что уравнение

$$c_\infty(1 - c_\infty) = G(\theta_0(c_0), c_0) \quad (5.4)$$

имеет решение. Тем самым доказано существование решения системы уравнений (2.1) при исходных данных задачи, удовлетворяющих условиям (5.1) и (5.3). Распределение температуры восстанавливается по формуле

$$T(\xi) = \int_0^\xi \theta d\xi + T_0. \quad (5.5)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Пусть  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m \geq 0$ . Тогда для любых  $T_0, T_\infty, c_0$ , удовлетворяющих условиям (5.1), (5.3), справедливы соотношения

$$0 < T_0 - T_\infty \leq \frac{\sqrt{\rho_m \lambda_m \alpha}}{\sqrt{\rho_d \lambda_d \beta} L \beta c^* (\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)}, \quad 0 < c_\infty \leq c^*,$$

где  $c^*$  — любое число в интервале  $(0, 0,1)$ . В этом случае задача (1.5) имеет классическое решение, ограниченное на всем интервале  $[0, \infty)$ .

Рассмотрим случай  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m < 0$ . Из неравенства (3.3) леммы 3.2 получаем оценку

$$\frac{|\theta_0|}{L} \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \beta \rho_m \lambda_m / 4) d\xi \leq F(\theta_0, c_0) \leq \frac{2|\theta_0|}{L} \int_0^\infty \exp(-\xi^2 \alpha \rho_d \lambda_d / 4) d\xi.$$

С учетом ограничения (3.4) на значение  $\theta_0$  и условия непрерывности функции  $F(\theta_0, c_0)$  заключаем, что для любых  $T_0, T_\infty$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < T_0 - T_\infty \leq \frac{1}{L\beta c^*(\rho_m \lambda_m - \rho_d \lambda_d)}, \quad (5.6)$$

и для любых  $c_0 \in (0, c^*]$  найдется значение  $\theta_0 < 0$ , являющееся решением уравнения (5.2). Как и выше, обозначим через  $\theta_0(c_0)$  наименьшее по модулю решение уравнения (5.2).

Из оценки (4.5) леммы 4.2 следует

$$c_0(1 - c_0) \exp(-1) \leq G(\theta_0(c_0), c_0) \leq c_0(1 - c_0) \exp\left(\frac{\rho_m \lambda_m}{4(\rho_m \lambda_m - \rho_d \lambda_d)} c^*\right).$$

Отсюда заключаем, что для любых  $c_\infty$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < c_\infty(1 - c_\infty) \leq c^*(1 - c^*) \exp(-1), \quad (5.7)$$

найдется значение  $c_0 \in (0, c_\infty)$ , такое что уравнение (5.4) имеет решение. По формуле (5.5) восстанавливается температура. Тем самым доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m < 0$ . Тогда для любых  $T_0, T_\infty, c_0$ , удовлетворяющих условиям (5.6), (5.7), справедливы соотношения

$$0 < T_0 - T_\infty \leq \frac{1}{L\beta c^*(\rho_m \lambda_m - \rho_d \lambda_d)}, \quad 0 < c_\infty(1 - c_\infty) \leq c^*(1 - c^*) \exp(-1),$$

где  $c^*$  — любое число в интервале  $(0, 0,1)$ . В этом случае задача (1.5), (1.4) имеет классическое решение, ограниченное на всем интервале  $[0, \infty)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В теоремах 1 и 2 ограничения, налагаемые на исходные данные, могут быть уточнены, однако и в такой форме они не усложняют задачу и выполняются в большинстве реальных случаев, как это следует из примеров, рассмотренных ниже. В случае  $\rho_d \lambda_d = \rho_m \lambda_m$  ограничения сверху на разность  $T_0 - T_\infty$  отсутствуют.

**6. Примеры численных расчетов.** Поскольку численное решение задачи движения эмульсии — предмет отдельного исследования, ограничимся примерами численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (вспомогательной задачи), полученными с использованием пакета MathCad. Рассмотрим два типичных случая, соответствующих условиям теорем 1 и 2. Константы, характеризующие теплофизические свойства элементов, взяты из [4], значение  $R$  принималось равным  $10^{-5}$  м. Ниже приводятся результаты, соответствующие условиям теорем 1, 2. В частности, в примерах 1, 2 решалась вспомогательная задача с условиями  $c_0 = 0,001$ ,  $\theta_0 = -0,025$  м/с<sup>1/2</sup>.

*Пример 1.* Несущая фаза — свинец, дисперсная — алюминий. Значения параметров  $\rho_d \lambda_d = 2584911$  Дж/(К·м<sup>3</sup>),  $\rho_m \lambda_m = 1431855$  Дж/(К·м<sup>3</sup>),  $k_d = 62$  Дж/(К·м·с),  $k_m = 19,77$  Дж/(К·м·с),  $L = 0,00000608$  м<sup>2</sup>/(К·с) [4] соответствуют условию теоремы 1. На рис. 1 данному решению соответствует монотонный профиль концентрации, выходящий на асимптоту  $c = 0,0062028163$  (кривая 1). Разность температур составила 27,442 К. В рассматриваемом случае  $c^* \leq 0,007$  и выполнено условие (5.1).

Решению задачи, линеаризованной по малой концентрации примеси (формулы (1.8)), соответствует кривая 2 на рис. 1. Различия наблюдаются лишь при очень малых аргументах (порядка  $10^{-4}$ ). Однако даже в масштабе рис. 1 видно, что решение линеаризованной задачи выходит на асимптоту, лежащую несколько ниже асимптоты решения полной задачи ( $c = 0,0061825704$ ).

*Пример 2.* Несущая фаза — алюминий, дисперсная — свинец. Значения параметров  $\rho_d \lambda_d = 1431855$  Дж/(К·м<sup>3</sup>),  $\rho_m \lambda_m = 2584911$  Дж/(К·м<sup>3</sup>),  $k_d = 19,77$  Дж/(К·м·с),  $k_m = 62$  Дж/(К·м·с),  $L = 0,00000568$  м<sup>2</sup>/(К·с) [4] соответствуют условию теоремы 2.



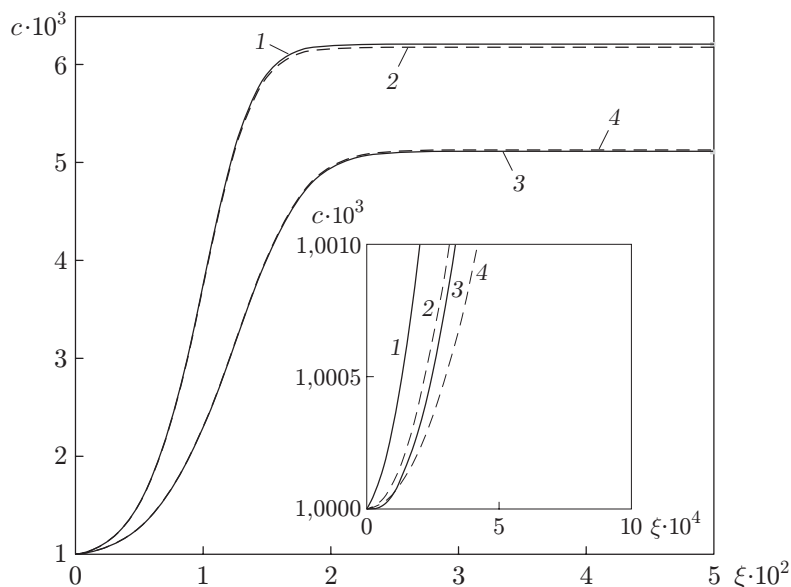


Рис. 1. Распределение концентрации в линеаризованных (1, 3) и полных (2, 4) задачах:

1, 2 — концентрация алюминия в эмульсии свинец — алюминий; 3, 4 — концентрация свинца в эмульсии алюминий — свинец

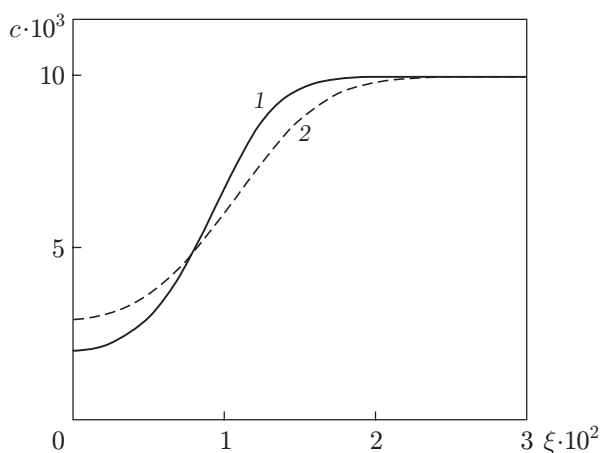


Рис. 2. Распределение концентрации в линеаризованных задачах при одних и тех же начальных данных:

1 — концентрация алюминия в эмульсии свинец — алюминий; 2 — концентрация свинца в эмульсии алюминий — свинец

В этом случае асимптотическое значение  $c = 0,005\,116\,193$ , разность температур составляет 38,206 К. Из результатов расчетов следует, что в окрестности нуля концентрация изменяется немонотонно ( $c_{\min} = 0,000\,999\,994\,8$ ). В данном случае  $c^* \leq 0,006$  и выполнены условия (5.6), (5.7) и ограничение (3.4). Так же как и в примере 1, приведено решение задачи, линеаризованной по малой концентрации примеси, которому соответствует кривая 3 на рис. 1. Решение линеаризованной задачи строго монотонно и выходит на асимптоту, лежащую несколько ниже асимптоты решения полной задачи ( $c = 0,005\,125\,282\,1$ ), которому соответствует кривая 4 на рис. 1.

*Пример 3.* Две эмульсии при одних и тех же условиях (1.3). Поскольку в масштабе рис. 1 профили концентрации в полной и линеаризованной задачах практически неразличимы, рассмотрим исходную краевую задачу (1.3) для двух эмульсий при одних и тех же начальных данных ( $c_\infty = 0,01$ ,  $T_\infty = 1173$  К,  $T_0 = 1153$  К), вычисляя соответствующие значения  $\theta_0$ ,  $c_0$  с помощью формул (1.9). Для состава эмульсии свинец — алюминий  $c_0 = 0,002$ ,  $\theta_0 = -0,01822$  м/с<sup>1/2</sup>, для состава алюминий — свинец  $c_0 = 0,0029206$ ,  $\theta_0 = -0,013$  м/с<sup>1/2</sup>.

На рис. 2 представлена зависимость  $c(\xi)$  для двух эмульсий (кривая 1 — профиль концентрации в линеаризованной задаче для эмульсии свинец — алюминий, кривая 2 — то же для эмульсии алюминий — свинец). Графики решения полных задач в этом масштабе практически не отличаются от соответствующих графиков решения линеаризованных задач. Различия наблюдаются в случае большей концентрации, например,  $c = 0,05$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Pukhnachov V. V., Voinov O. V.** Mathematical model of motion of emulsion under effect of thermocapillary forces and microacceleration // Abstr. of 9th Europ. symp. on gravity dependent phenomena in phis. sci. Berlin: S. n., 1995. P. 32–33.
2. **Pukhnachov V. V., Voinov O. V., Petrova A. G., et al.** Dynamics, stability and solidification of emulsion under the action of thermocapillary forces and microacceleration // Lecture notes on physics. Interfacial fluid dynamics and transport processes. Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. P. 325–354.
3. **Петрова А. Г., Пухначев В. В.** Одномерное движение эмульсии с затвердеванием // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 128–136.
4. **Таблицы физических величин:** Справ. М.: Атомиздат, 1976.

*Поступила в редакцию 8/VIII 2006 г.*

---