

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУСЛОЙНОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ПОГРУЖЕННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ, ПРИ ОСЕВОЙ НАГРУЗКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

А. Горбанпур Арани^{*,**}, М. Хашемиан^{**}, А. Логман^{**},
М. Мохаммадимер^{**}

* Институт наноуслуг и нанотехнологий Университета Кашана, 87317-51167 Кашан, Иран

** Университет Кашана, 87317-51167 Кашан, Иран

E-mails: aghorban@kashanu.ac.ir, a_ghorbanpour@yahoo.com

С использованием модели механики сплошной среды и принципа минимума полной энергии исследована устойчивость движения одно- и двуслойной углеродных нанотрубок при динамической осевой нагрузке. С помощью метода Рэлея — Ритца определены собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки и критическая динамическая осевая нагрузка для одно- и двуслойной углеродных нанотрубок. С использованием модели Уинклера и теории Леннарда-Джонса изучено воздействие упругой среды и сил Ван-дер-Ваальса между двумя слоями в двуслойной углеродной нанотрубке. С помощью модели Эрингена при решении задачи учитывается эффект малых масштабов длины. Показано, что критическая динамическая осевая нагрузка увеличивается, если в изолированную углеродную нанотрубку вставляется другая углеродная нанотрубка. Трубки погружены в упругую среду.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, устойчивость движения, энергетический метод, упругая среда, осевая нагрузка.

Введение. Нанотехнологии используются для производства новых материалов, инструментов, систем и генераторов, позволяющих управлять производственными процессами на атомном и молекулярном уровнях. Поэтому представляет интерес изучение элементов, состоящих из атомов углерода. Существуют различные формы углерода, представляющие собой как один из наиболее мягких материалов, так и один из наиболее твердых материалов, известных в природе. В то же время атомы углерода легко связываются с другими атомами, в том числе с атомами углерода.

Существует большое количество работ, в которых показано, что углеродные нанотрубки обладают рядом особенностей и имеют различные приложения. В [1, 2] представлена модель упругой оболочки для решения задачи об осевом продольном изгибе двуслойной углеродной нанотрубки, погруженной в упругую среду. При этом на поверхностях раздела трубок действуют силы Ван-дер-Ваальса. В работе [3] с использованием нелокальной теории упругости предложена нелокальная модель многослойных оболочек в задаче о критической нагрузке для многослойной углеродной нанотрубки при равномерном внешнем радиальном давлении. Получено явное выражение для критического давления, исследовано влияние малого масштаба длины на критическое давление. Теория нелокальной механики сплошной среды введена А. Эрингеном [4]. Согласно этой теории напряжение

в точке является функцией напряжений во всех точках тела. Продольный изгиб и критическое осевое давление двуслойных углеродных нанотрубок, погруженных в упругую среду, исследованы в работах [5, 6]. Показано, что критическая осевая сила для двуслойной углеродной нанотрубки, погруженной в упругую среду, больше критической осевой силы для однослойной углеродной нанотрубки, однако критическое осевое давление двуслойной углеродной нанотрубки, погруженной в упругую среду, меньше критического осевого давления однослойной углеродной нанотрубки. В [7] изучена задача об изгибе изолированной многослойной углеродной трубки, находящейся под действием крутящего момента и сжимающей продольной силы, а также внутреннего и внешнего давлений. С использованием модели Уинклера исследовано влияние малого масштаба длины и окружающей упругой среды, показано, что внутреннее давление приводит к увеличению критической нагрузки, в то время как внешнее давление — к ее уменьшению.

В работе [8] с помощью энергетического метода изучен упругий продольный изгиб длинной двуслойной углеродной нанотрубки, помещенной в упругую среду и находящейся под действием дальнего поля гидростатического давления. Показано, что критическое давление зависит от отношения внутреннего радиуса к толщине, параметров материала упругой среды и силы Ван-дер-Ваальса. Результаты исследования [9] обобщены на тонкостенные цилиндрические оболочки, получены удовлетворительные результаты.

Большинство исследований проведено для нанотрубок при различных видах статических нагрузок. Однако многие нанокompозитные структуры подвергаются действию динамических нагрузок.

В работе [10] изучалась устойчивость вращающихся цилиндрических оболочек, подвергнутых периодическим осевым нагрузкам, в [11] — устойчивость движения функционально разделенных цилиндрических оболочек при периодической осевой нагрузке. В [12] с использованием моделей балок Эйлера — Бернулли и Тимошенко и модели оболочек Доннела исследованы поперечные колебания одно- и двуслойной углеродных нанотрубок при осевой нагрузке. Установлено, что предсказания, сделанные с помощью модели балок Эйлера — Бернулли и модели оболочек Доннела, являются наименее и наиболее точными соответственно.

В [13] предложена приближенная методика изучения динамического продольного изгиба двуслойных углеродных нанотрубок при внезапном осевом нагружении, развита модель упругих оболочек для исследования динамического продольного изгиба двуслойных углеродных нанотрубок при ступенчатой осевой нагрузке. В этой модели учитываются силы Ван-дер-Ваальса между внешними и внутренними трубками. Полученные результаты показали, что при динамическом продольном изгибе критическая нагрузка для двуслойных углеродных нанотрубок больше, чем в случае статического продольного изгиба.

В данной работе с помощью принципа минимума полной энергии исследована динамическая устойчивость тонкостенной цилиндрической модели оболочки при динамической осевой нагрузке для одно- и двуслойных углеродных нанотрубок. Методом Рэлея — Ритца получены собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки и критическая динамическая осевая нагрузка для одно- и двуслойной углеродных нанотрубок. Для того чтобы описать колебания углеродной нанотрубки более точно, с использованием нелокальной теории были модифицированы современные классические модели.

1. Геометрия и условие нагружения двуслойной углеродной нанотрубки.

На рис. 1 представлена схема двуслойной углеродной нанотрубки, погруженной в упругую среду. Длина углеродной нанотрубки равна L , толщина — h , радиусы внешней и внутренней нанотрубок — R_1 и R_2 соответственно. Система цилиндрических координат выбрана в соответствии с геометрией углеродной нанотрубки. Продольное, радиальное и окружное направления обозначены через x , z , θ соответственно, компоненты смещений в направлении

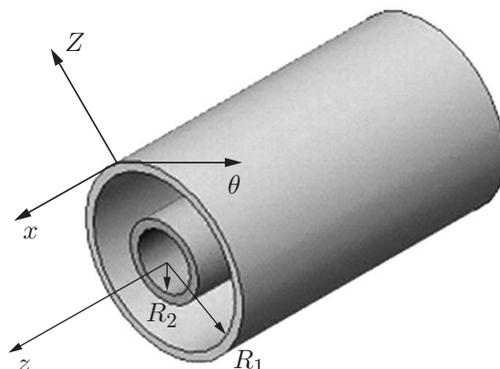


Рис. 1. Схема двуслойной углеродной нанотрубки, погруженной в упругую среду

ях x, z, θ — через u, w, v соответственно. К углеродной нанотрубке приложена сжимающая динамическая осевая нагрузка [10, 11]

$$N_a = N_0 + N_s \cos(pt) \tag{1}$$

(N_0, N_s — амплитуды статической и динамической нагрузок соответственно; t — время; p — частота приложенной нагрузки).

2. Влияние упругой среды. С использованием модели Уинклера исследуется воздействие упругой среды на двуслойную углеродную нанотрубку. Нормальное давление на каждую точку, находящуюся в области между внешней нанотрубкой и упругой средой, линейно связано с радиальным смещением внешней углеродной нанотрубки в каждой точке:

$$p_1^w = p_0^w - dw_1. \tag{2}$$

Здесь p_0^w — начальное (до начала продольного изгиба) давление в области между внешней углеродной нанотрубкой и упругой средой; d — постоянная Уинклера, зависящая от механических свойств упругой среды и внешнего радиуса углеродной нанотрубки; w_1 — радиальное смещение внешней углеродной нанотрубки.

3. Силы взаимодействия Ван-дер-Ваальса. Сила взаимодействия Ван-дер-Ваальса между внутренней и внешней углеродными нанотрубками в двуслойной углеродной нанотрубке может быть смоделирована с помощью модели [1] Леннарда-Джонса. Поэтому давление, действующее на внешнюю углеродную нанотрубку со стороны внутренней углеродной нанотрубки, определяется следующим уравнением [1, 2]:

$$p_1^v = c(w_2 - w_1). \tag{3}$$

В уравнении (3) давление считается положительным, если оно направлено внутрь трубки; w_1, w_2 — радиальные смещения внешних и внутренних углеродных нанотрубок соответственно; $c = 61,9917 \text{ нН/м}^3$ — коэффициент Ван-дер-Ваальса [1] при условии, что $r = 14,2 \text{ нм}$ — длина связи С-С.

С использованием уравнений (2), (3) и третьего закона Ньютона получено давление на внешнюю и внутреннюю углеродные нанотрубки [1, 14]:

$$p_1 = p_1^v + p_1^w = c(w_2 - w_1) - dw_1, \quad p_2 = p_2^v = -\frac{R_1}{R_2} c(w_2 - w_1).$$

4. Влияние малого масштаба длины. Поскольку в нанотехнологиях имеют место малые масштабы длины, возникает вопрос о применимости модели классической механики. Учет малого размера структуры материала, такого как шаг решетки между одиночными атомами, очень существен в задачах нанотехнологии. Так как в моделях механики

сплошной среды этот размер не учитывается, используется нелокальная модель механики сплошной среды. В работах [3, 12, 15] приведены соотношения Эрингена между напряжениями и деформациями для однородных изотропных и упругих твердых частиц в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta - (e_0 a)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x), \\ \tau_{x\theta} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 \tau_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tau_{x\theta}}{\partial \theta^2} \right) &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{x\theta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь σ_x, σ_θ — составляющие напряжения в направлениях x и θ соответственно; $\tau_{x\theta}$ — напряжение сдвига; $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ — компоненты деформации в направлениях x и θ соответственно; $\varepsilon_{x\theta}$ — деформация сдвига; e_0 — постоянная материала; a — характерная длина материальных атомных связей (например, длина связи С–С); R — срединный радиус нанотрубки; E — модуль Юнга; ν — коэффициент поперечного сжатия Пуассона.

Уравнения Эрингена (4) можно разрешить относительно напряжений [15]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta + (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} \right) \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x + \frac{(e_0 a)^2}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right), \\ \tau_{x\theta} &= \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{x\theta} + (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{x\theta}}{\partial \theta^2} \right) \right).\end{aligned}\quad (5)$$

5. Соотношения между деформацией и смещением. В случае цилиндрической оболочки соотношения между деформацией и смещением имеют вид

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x + z k_x, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + z k_\theta, \quad \bar{\gamma}_{x\theta} = \gamma_{x\theta} + z k_{x\theta}, \quad (6)$$

где $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\gamma}_{x\theta}$ — компоненты тензора деформаций для произвольной точки по толщине; $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$ — компоненты тензора деформаций срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} \beta_x^2, & \beta_x &= -w_{,x}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \frac{1}{2} \beta_\theta^2, & \beta_\theta &= -\frac{w_{,\theta}}{R}, \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right) + \beta_x \beta_\theta;\end{aligned}\quad (7)$$

$$k_x = \beta_{x,x}, \quad k_\theta = \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R}, \quad k_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right), \quad (8)$$

β_x, β_θ — углы поворотов сечений оболочки в осевом и азимутальном направлениях соответственно.

6. Однослойная углеродная нанотрубка. Рассмотрим деформирование однослойной углеродной нанотрубки.

6.1. *Функция Лагранжа для однослойной углеродной нанотрубки.* Запишем выражение для функции Лагранжа [16]:

$$\Pi = T - (U_m + U_b + U_a + \Omega). \quad (9)$$

Здесь U_m, U_b, U_a, T, Ω — энергия мембранной деформации, энергия изгибной и осевой деформации, кинетическая и потенциальная энергия упругой среды соответственно.

В цилиндрических координатах выражение для полной энергии деформации записывается в следующем виде:

$$U = \frac{R}{2} \iiint (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_z \bar{\varepsilon}_z + \bar{\sigma}_\theta \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\tau}_{x\theta} \bar{\gamma}_{x\theta} + \bar{\tau}_{z\theta} \bar{\gamma}_{z\theta} + \bar{\tau}_{\theta z} \bar{\gamma}_{\theta z}) dx d\theta dz \quad (10)$$

($\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензоров напряжения и деформации по толщине оболочки).

Подставляя уравнения (5), (6) в уравнение (10) и используя уравнения (7), (8), выражения для энергии мембранной и изгибной деформаций оболочки можно представить в виде

$$U_m = \frac{RC}{2} \iint \left[\varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + (e_0 a)^2 \varepsilon_x \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \nu \varepsilon_x \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} + \varepsilon_\theta^2 + \frac{1}{R^2} (e_0 a)^2 \varepsilon_\theta \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} (e_0 a)^2 \nu \varepsilon_\theta \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \theta^2} + (1 - \nu) \left(\varepsilon_{x\theta}^2 + (e_0 a)^2 \varepsilon_{x\theta} \frac{\partial^2 \varepsilon_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{(e_0 a)^2}{R^2} \varepsilon_{x\theta} \frac{\partial^2 \varepsilon_{x\theta}}{\partial \theta^2} \right) \right] dx d\theta,$$

$$U_b = \frac{RD}{2} \iint \left[k_x^2 + 2\nu k_x k_\theta + (e_0 a)^2 k_x \frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \nu k_x \frac{\partial^2 k_\theta}{\partial x^2} + k_\theta^2 + \frac{1}{R^2} (e_0 a)^2 k_\theta \frac{\partial^2 k_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} (e_0 a)^2 \nu k_\theta \frac{\partial^2 k_x}{\partial \theta^2} + (1 - \nu) \left(k_{x\theta}^2 + (e_0 a)^2 k_{x\theta} \frac{\partial^2 k_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{(e_0 a)^2}{R^2} k_{x\theta} \frac{\partial^2 k_{x\theta}}{\partial \theta^2} \right) \right] dx d\theta,$$

где C , D — мембранная и изгибная жесткость соответственно.

Согласно [10] выражения для энергии осевых напряжений и кинетической энергии записываются следующим образом:

$$U_a = \frac{1}{2} \iint N_a (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) R dx d\theta, \quad T = \frac{1}{2} \rho h \iint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R dx d\theta,$$

где h , ρ — толщина и плотность углеродной нанотрубки соответственно.

Рассматривая воздействие упругой среды как внешнее давление, выражение для потенциальной энергии упругой среды представим в виде [17]

$$\Omega = -R \iint (-dw) w dx d\theta = R d \iint w^2 dx d\theta.$$

6.2. *Вторая вариация функции Лагранжа для однослойной углеродной нанотрубки.* Для того чтобы получить вторую вариацию функции Лагранжа, выполним замену в уравнении (9):

$$u = u_0 + u_i, \quad v = v_0 + v_i, \quad w = w_0 + w_i.$$

Здесь величины u_0, v_0, w_0 соответствуют состоянию устойчивого равновесия углеродной нанотрубки; u_i, v_i, w_i — приращения смещения.

Собирая квадратичные члены в выражениях для смещений w_i, v_i, u_i , получаем выражение для второй вариации функции Лагранжа.

6.3. *Собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки.* Определение собственных частот очень важно при динамическом нагружении нанотрубок. Очевидно, что частота приложенной динамической нагрузки должна существенно отличаться от собственных частот колебаний углеродной нанотрубки. В случае свободно опертой оболочки выражения для смещений можно записать в виде [11]

$$u_i = A_1 e^{i\omega_n t} \cos(m\pi x/L) \cos(n\theta), \quad v_i = A_2 e^{i\omega_n t} \sin(m\pi x/L) \sin(n\theta), \quad (11)$$

$$w_i = A_3 e^{i\omega_n t} \sin(m\pi x/L) \cos(n\theta),$$

где n — число волн в окружном направлении; m — число полуволн в осевом направлении; ω_n — собственная частота колебаний цилиндрической оболочки при постоянной осевой нагрузке N_0 .

Подставляя (11) в выражение для второй вариации функции Лагранжа, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi = & \frac{1}{8nL^5R^5m\pi} e^{2i\omega nt} \left[-C\nu A_2^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n - C(e_0a)^2 A_1^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n^3 + \right. \\ & + C\nu(e_0a)^2 A_1^2 m^3 \pi^4 L^4 R^4 n^3 + 2C(e_0a)^2 A_2 A_1 m^2 \pi^3 L^5 R^3 n^4 + 2DA_3^2 m^5 \pi^6 L^2 R^6 n - \\ & - C\nu A_1^2 m \pi^2 L^6 R^4 n^3 - 2C(e_0a)^2 A_2^2 m \pi^2 L^6 R^2 n^5 + 2C(e_0a)^2 A_1 A_2 m^4 \pi^5 L^3 R^5 n^2 + \\ & + 2A_3^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n N_0 + 2D\nu(e_0a)^2 A_3^2 m^3 \pi^4 L^4 R^2 n^5 + C\nu(e_0a)^2 A_1^2 m \pi^2 L^6 R^2 n^5 - \\ & - 2D(e_0a)^2 A_3^2 m^7 \pi^8 R^6 n + 2DA_3^2 m \pi^2 L^6 R^2 n^5 - C(e_0a)^2 A_2^2 m^5 \pi^6 L^2 R^6 n - \\ & - C(e_0a)^2 A_2^2 m^3 \pi^4 L^4 R^4 n^3 + 2C\nu(e_0a)^2 A_3 A_1 m^2 \pi^3 L^5 R^3 n^3 - C(e_0a)^2 A_1^2 m \pi^2 L^6 R^2 n^5 + \\ & + 2CA_2^2 m \pi^2 L^6 R^4 n^3 + 4DA_3^2 m^3 \pi^4 L^4 R^4 n^3 + CA_2^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n + C\nu(e_0a)^2 A_2^2 m^3 \pi^4 L^4 R^4 n^3 + \\ & + 2A_2^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n N_0 + C\nu(e_0a)^2 A_2^2 m^5 \pi^6 L^2 R^6 n + 2CA_3^2 m \pi^2 L^6 R^4 n - 2C(e_0a)^2 A_3^2 m \pi^2 L^6 R^2 n^3 + \\ & + 4A_3^2 m \pi^2 L^6 R^6 n d - 2CA_1 A_2 m^2 \pi^3 L^5 R^5 n^2 - 4C(e_0a)^2 A_3 A_2 m \pi^2 L^6 R^2 n^4 + CA_1^2 m \pi^2 L^6 R^4 n^3 - \\ & - 2C(e_0a)^2 A_1^2 m^5 \pi^6 L^2 R^6 n - 4D(e_0a)^2 A_3^2 m^5 \pi^6 L^2 R^4 n^3 + 2D\nu(e_0a)^2 A_3^2 m^5 \pi^6 L^2 R^4 n^3 - \\ & - 2C\nu A_1 A_2 m^2 \pi^3 L^5 R^5 n^2 + 2A_1^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n N_0 + 4CA_3 A_2 m \pi^2 L^6 R^4 n^2 - 4C\nu A_3 A_1 m^2 \pi^3 L^5 R^5 n - \\ & - 2D(e_0a)^2 A_3^2 m \pi^2 L^6 n^7 - 4D(e_0a)^2 A_3^2 m^3 \pi^4 L^4 R^2 n^5 + 2C\nu(e_0a)^2 A_1 A_3 m^4 \pi^5 L^3 R^5 n + \\ & \left. + 2CA_1^2 m^3 \pi^4 L^4 R^6 n \right] + \frac{e^{2i\omega t}}{4} \rho h \omega^2 L \pi (A_3^2 + A_1^2 + A_2^2). \quad (12) \end{aligned}$$

В силу метода Рэлея — Ритца имеем

$$\frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial A_1} = \frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial A_2} = \frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial A_3} = 0. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем три уравнения, которые можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Здесь $[m_{ij}]$ — симметрическая матрица.

Нетривиальное решение задачи (14) существует, если определитель равен нулю:

$$\det [m_{ij}] = 0. \quad (15)$$

Значения механических параметров однослойной углеродной нанотрубки, исследуемой в данной работе, взяты из [4, 5]: $E = 4,84$ ТПа, $\nu = 0,3$, $D = 1,765\,289 \cdot 10^{-19}$ Дж, $C = 376,595$ нН/нм, $d = 0,899\,950\,35$ нН/нм³, $e_0 = 0,39$. Выбирались следующие значения геометрических параметров для однослойной углеродной нанотрубки: $R = 1,696$ нм, $h = 0,075$ нм, $L = 35$ нм, $a = 0,142$ нм [5]. При этом значение амплитуды статической нагрузки равно $N_0 = -0,5Eh^2/(R\sqrt{3(1-\nu^2)}) = -4,857\,700\,346$ нН/нм [11, 17, 18]. Подставляя указанные значения в уравнение (15), получаем собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки при $1 \leq n \leq 3$, $1 \leq m \leq 3$ (см. таблицу).

Собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки при $1 \leq n \leq 3, 1 \leq m \leq 3$

n	$\omega_{n1}, \text{ТГц}$	$\omega_{n2}, \text{ТГц}$	$\omega_{n3}, \text{ТГц}$
$m = 1$			
1	$1,239\,624\,642 \cdot 10^{-4}$	$9,180\,816\,011 \cdot 10^{-4}$	$2,142\,164\,049 \cdot 10^{-3}$
2	$1,706\,821\,411 \cdot 10^{-4}$	$1,790\,499\,027 \cdot 10^{-3}$	$3,374\,118\,750 \cdot 10^{-3}$
3	$2,3325 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-3}$	$4,75 \cdot 10^{-3}$
$m = 2$			
1	$1,3931 \cdot 10^{-4}$	$9,8769 \cdot 10^{-4}$	$2,16 \cdot 10^{-3}$
2	$1,6703 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$3,39 \cdot 10^{-3}$
3	$1,2999 \cdot 10^{-4}$	$2,68 \cdot 10^{-3}$	$4,77 \cdot 10^{-3}$
$m = 3$			
1	$1,9361 \cdot 10^{-4}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$2,19 \cdot 10^{-3}$
2	$1,6659 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-3}$	$3,42 \cdot 10^{-3}$
3	$2,2551 \cdot 10^{-4}$	$2,71 \cdot 10^{-3}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$

6.4. *Критическая динамическая осевая нагрузка для однослойной углеродной нанотрубки.* Поскольку согласно [18] радиальное смещение значительно больше осевого и окружного смещений ($u \ll w, v \ll w$), во второй вариации функции Лагранжа не учитывались члены u_i и v_i :

$$\begin{aligned}
 \delta^2\Pi = & \frac{CR}{2} \iint \left(\frac{w_i^2}{R^2} + \frac{1}{R^4} (e_0a)^2 w_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right) dx d\theta + \\
 & + DR \iint \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{\nu(e_0a)^2}{2R^4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\nu(e_0a)^2}{2R^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \right. \\
 & + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{(e_0a)^2}{2R^6} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta^4} - \\
 & - \frac{\nu(e_0a)^2}{R^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^3 \partial \theta} - \frac{\nu(e_0a)^2}{R^4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x \partial \theta^3} - \frac{\nu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{(e_0a)^2}{2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \\
 & + \left. \frac{(e_0a)^2}{R^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^3 \partial \theta} + \frac{(e_0a)^2}{R^4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x \partial \theta^3} \right) dx d\theta + \\
 & + \iint N_a(w_{i,x}^2) R dx d\theta - \frac{1}{2} \rho h \iint \dot{w}_i^2 R dx d\theta + Rd \iint w_i^2 dx d\theta. \quad (16)
 \end{aligned}$$

В данной работе принимается граничное условие простого опирания, поэтому для w выбрано разложение в двойной ряд Фурье с коэффициентом $q(t)$ [18]:

$$w_i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta), \quad q(t) = f \sin\left(\frac{pt}{2}\right) + b \cos\left(\frac{pt}{2}\right). \quad (17)$$

В этом случае метод Рэлея — Ритца формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial \sin^2(pt/2)} = 0, \quad \frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial \cos^2(pt/2)} = 0, \quad \frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial \cos(pt/2) \sin(pt/2)} = 0. \quad (18)$$

Подставляя (17) в уравнение (16) и применяя метод Рэлея — Ритца (18), получаем уравнение

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^2 \\ b^2 \\ bf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $[n_{ij}]$ — симметрическая матрица.

Система уравнений (19) имеет нетривиальные решения в том случае, если ее определитель равен нулю. Из этого условия определяется критическая динамическая осевая нагрузка. Следует отметить, что нагрузка, действующая на углеродную нанотрубку, является сжимающей. Уравнение (16) получено в случае динамической осевой нагрузки для однослойной углеродной нанотрубки с использованием указанных выше значений параметров. Критическая нагрузка определялась при значении частоты $p = 10^{-4}$ ТГц, меньшем по сравнению с наименьшей собственной частотой колебаний нанотрубки.

7. Двуслойная углеродная нанотрубка. Рассмотрим деформирование двуслойной углеродной нанотрубки.

7.1. *Функция Лагранжа для двуслойных углеродных нанотрубок.* Запишем выражение для функции Лагранжа:

$$\Pi = T_1 - (U_{m1} + U_{b1} + U_{a1} + \Omega_1) + T_2 - (U_{m2} + U_{b2} + U_{a2} + \Omega_2).$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют внешним и внутренним нанотрубкам; Ω_1, Ω_2 — значения потенциальной энергии давлений p_1 и p_2 :

$$\Omega_1 = -R_1 \iint p_1 w_1 dx d\theta = -R_1 \iint (c(w_2 - w_1) - dw_1) w_1 dx d\theta,$$

$$\Omega_2 = -R_2 \iint p_2 w_2 dx d\theta = R_1 \iint (c(w_2 - w_1)) w_2 dx d\theta,$$

остальные обозначения те же, что в (9).

7.2. *Вторая вариация функции Лагранжа для двуслойных углеродных нанотрубок.* Используя те же упрощения, что и в подп. 6.4, получим вторую вариацию функции Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = & \frac{CR_1}{2} \iint \left(\frac{w_{i1}^2}{R_1^2} + \frac{(e_0 a)^2 w_{i1}}{R_1^4} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial \theta^2} \right) dx d\theta + \\ & + DR_1 \iint \left[\frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{\nu (e_0 a)^2}{2R_1^4} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\nu (e_0 a)^2}{2R_1^2} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \right. \\ & + \frac{\nu}{R_1^2} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x^2} + \frac{1}{2R_1^4} \left(\frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{(e_0 a)^2}{2R_1^6} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial \theta^4} - \\ & - \frac{\nu (e_0 a)^2}{R_1^2} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^3 \partial \theta} - \frac{\nu (e_0 a)^2}{R_1^4} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x \partial \theta^3} - \frac{\nu}{R_1^2} \left(\frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{(e_0 a)^2}{2} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^4} + \\ & + \left. \frac{(e_0 a)^2}{R_1^2} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x^3 \partial \theta} + \frac{(e_0 a)^2}{R_1^4} \frac{\partial^2 w_{i1}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i1}}{\partial x \partial \theta^3} \right] dx d\theta + \iint N_{a1} w_{i,x1}^2 R_1 dx d\theta - \\ & - \frac{1}{2} \rho h \iint \dot{w}_{i1}^2 R_1 dx d\theta + R_1 \iint (-c w_{i2} w_{i1} + c w_{i1}^2 + d w_{i1}^2) dx d\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{CR_2}{2} \iint \left(\frac{w_{i2}^2}{R_2^2} + \frac{(e_0a)^2 w_{i2}}{R_2^4} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial \theta^2} \right) dx d\theta + \\
 & + DR_2 \iint \left[\frac{1}{R_2^2} \left(\frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{\nu(e_0a)^2}{2R_2^4} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\nu(e_0a)^2}{2R_2^2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \right. \\
 & + \frac{\nu}{R_2^2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x^2} + \frac{1}{2R_2^4} \left(\frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{(e_0a)^2}{2R_2^6} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial \theta^4} - \\
 & - \frac{\nu(e_0a)^2}{R_2^2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^3 \partial \theta} - \frac{\nu(e_0a)^2}{R_2^4} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x \partial \theta^3} - \frac{\nu}{R_2^2} \left(\frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \frac{(e_0a)^2}{2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^4} + \\
 & + \left. \frac{(e_0a)^2}{R_2^2} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x^3 \partial \theta} + \frac{(e_0a)^2}{R_2^4} \frac{\partial^2 w_{i2}}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial^4 w_{i2}}{\partial x \partial \theta^3} \right] dx d\theta + \iint N_{a2} w_{i,x2}^2 R_2 dx d\theta - \\
 & - \frac{1}{2} \rho h \iint \dot{w}_{i2}^2 R_2 dx d\theta + R_1 \iint (c w_{i2}^2 - c w_{i2} w_{i1}) dx d\theta. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Здесь $N_{a1} = N_{a2} = N_a$ [2].

7.3. *Критическая динамическая осевая нагрузка для двуслойных углеродных нанотрубок.* Чтобы получить критическую динамическую осевую нагрузку для двуслойных углеродных нанотрубок, смещения в уравнении (20) заменяются выражениями

$$w_{i1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Aq(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta), \quad w_{i2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Bq(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta). \quad (21)$$

В этом случае метод Рэлея — Ритца записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 (\delta^2 \Pi)}{\partial A \partial (\sin^2(pt/2))} = 0, \quad \frac{\partial^2 (\delta^2 \Pi)}{\partial B \partial (\sin^2(pt/2))} = 0, \quad \frac{\partial^2 (\delta^2 \Pi)}{\partial A \partial (\cos^2(pt/2))} = 0, \\
 \frac{\partial^2 (\delta^2 \Pi)}{\partial B \partial (\cos^2(pt/2))} = 0, \quad \frac{\partial^2 (\delta^2 \Pi)}{\partial A \partial (\sin(pt/2) \cos(pt/2))} = 0, \quad \frac{\partial^2 (\delta^2 \Pi)}{\partial B \partial (\sin(pt/2) \cos(pt/2))} = 0.
 \end{aligned}$$

Подставляя уравнение (21) в уравнение (20) и применяя метод Рэлея — Ритца, получаем уравнение

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & q_{24} & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & q_{33} & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{65} & q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Af^2 \\ Bf^2 \\ Ab^2 \\ Bb^2 \\ Abf \\ Bbf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $[q_{ij}]$ — симметрическая матрица. Так же как в случае однослойной углеродной нанотрубки, приравнявая определитель $[q_{ij}]$ к нулю, получим значение критической сжимающей осевой нагрузки для двуслойной углеродной нанотрубки. В расчетах принимались следующие значения параметров: $R_1 = 1,696$ нм, $R_2 = 1,356$ нм, $c = 99,186\,669\,3$ нН/нм³ [5].

8. Результаты численных расчетов. На рис. 2 приведена зависимость критической динамической осевой нагрузки от осевых и окружных мод в случае продольного изгиба для одно- и двуслойной углеродных нанотрубок. Видно, что критическая динамическая осевая нагрузка увеличивается, если в однослойную углеродную нанотрубку, погруженную в упругую среду, вставлена другая нанотрубка.

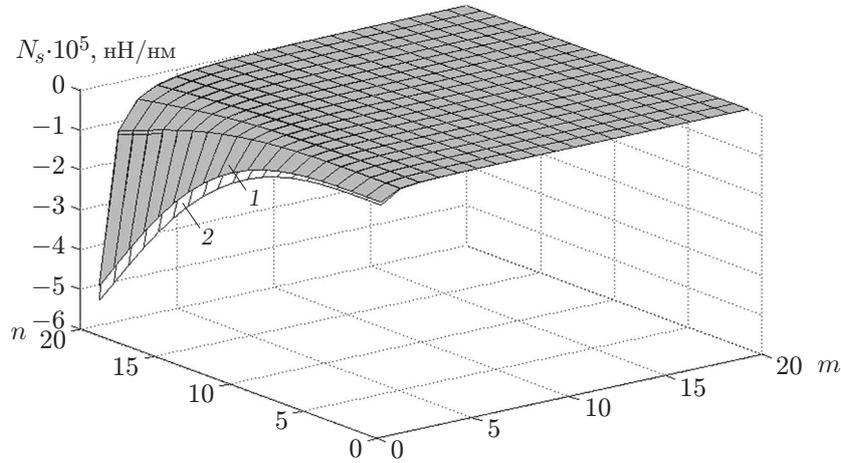


Рис. 2. Зависимость критической динамической осевой нагрузки от осевых и окружных мод в случае продольного изгиба для однослойной (1) и двуслойной (2) углеродных нанотрубок

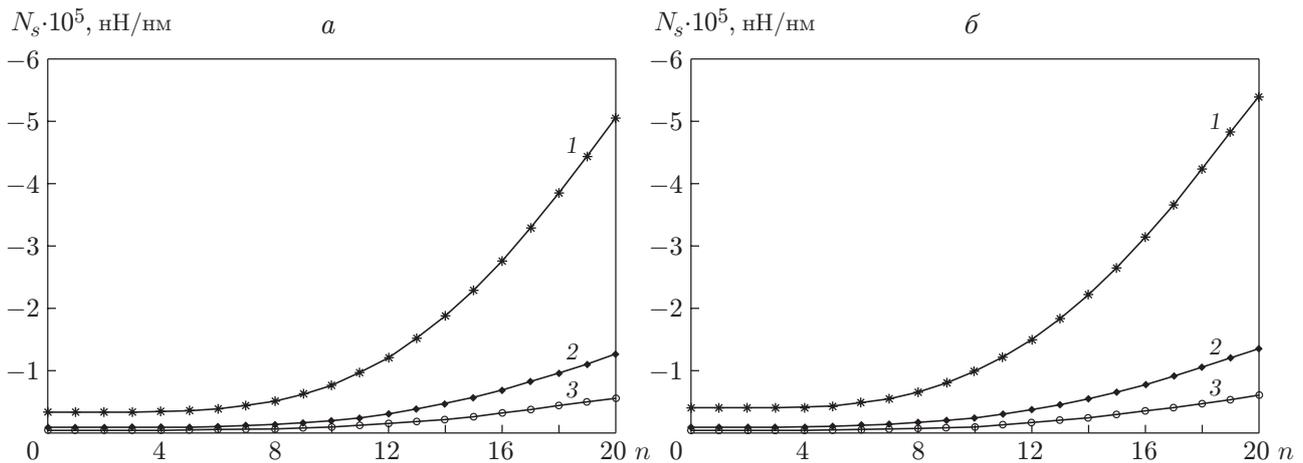


Рис. 3. Зависимость критической динамической осевой нагрузки от окружной моды при продольном изгибе для однослойной (а) и двуслойной (б) углеродных нанотрубок при различных значениях m :
1 — $m = 1$; 2 — $m = 2$; 3 — $m = 3$

На рис. 3 представлена зависимость критической динамической осевой нагрузки для однослойной и двуслойной углеродных нанотрубок от окружной моды продольного изгиба. Очевидно, что с увеличением окружной моды продольного изгиба критическая динамическая осевая нагрузка увеличивается.

На рис. 4 показана зависимость критической динамической осевой нагрузки от осевых и окружных мод для двуслойной углеродной нанотрубки в случае, когда внешние и внутренние изолированные нанотрубки погружены в упругую среду. Видно, что для двуслойной углеродной нанотрубки критическая динамическая осевая нагрузка больше, чем для изолированной внешней нанотрубки, и меньше, чем для изолированной внутренней нанотрубки, а в случае однослойной углеродной нанотрубки критическая динамическая осевая нагрузка увеличивается с уменьшением радиуса нанотрубки.

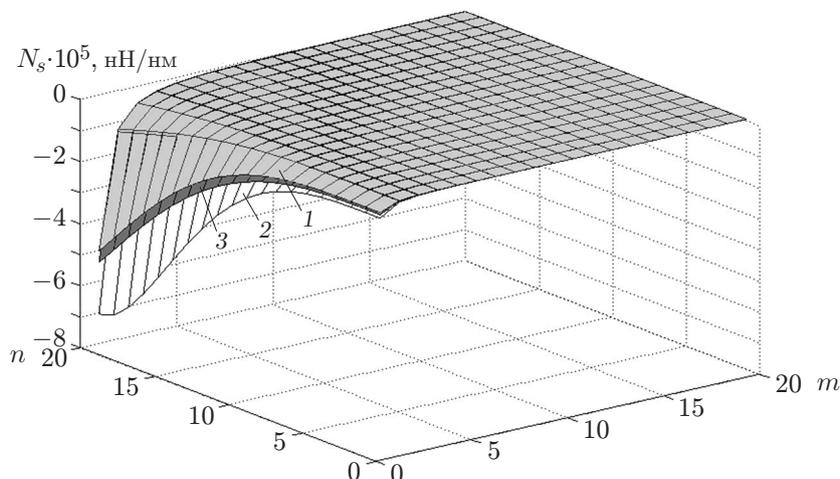


Рис. 4. Зависимость критической нагрузки от осевых и окружных мод для изолированных внешней (1) и внутренней (2) однослойных углеродных нанотрубок и двуслойной углеродной нанотрубки (3)

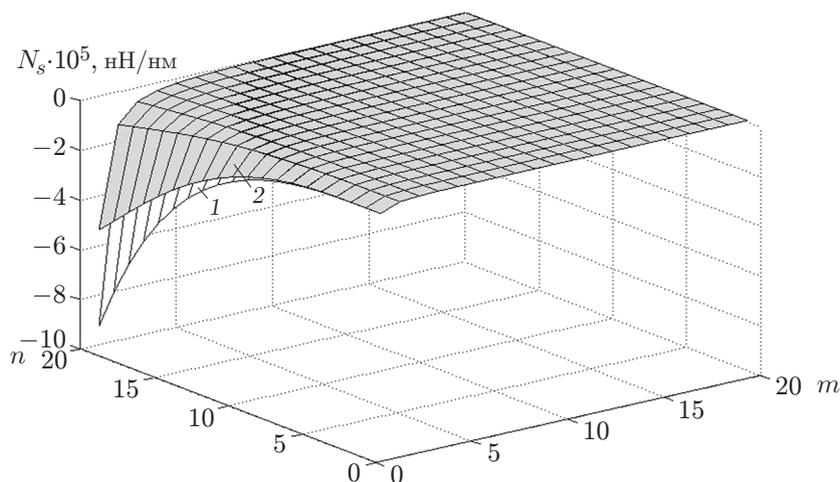


Рис. 5. Влияние мелкомасштабного коэффициента на критическую динамическую осевую нагрузку в случае двуслойных углеродных нанотрубок: 1 — критическая нагрузка без учета мелкомасштабного коэффициента; 2 — с учетом мелкомасштабного коэффициента

На рис. 5 показано влияние мелкомасштабного коэффициента $e_0 a$ на критическую динамическую осевую нагрузку для двуслойной углеродной нанотрубки. Видно, что в случае учета малого масштаба критическая динамическая осевая нагрузка уменьшается.

С использованием программного обеспечения Matlab получено минимальное значение динамической осевой нагрузки $N_s = -11,9714$ нН/нм для двуслойной углеродной нанотрубки без учета мелкомасштабного коэффициента при $n = 1$, $m = 61$. Для однослойной углеродной нанотрубки $N_s = -9,8947$ нН/нм при $n = 1$, $m = 58$. Также получено минимальное значение динамической осевой нагрузки $N_s = -10,9605$ нН/нм для двуслойной углеродной нанотрубки с учетом мелкомасштабного коэффициента (на основе нелокальной теории упругости) при $n = 1$, $m = 61$. Для однослойной углеродной нанотрубки $N_s = -9,0719$ нН/нм при $n = 1$, $m = 58$.

Таким образом, согласно уравнению (1) критическая осевая нагрузка N_a , полученная с учетом и без учета мелкомасштабного коэффициента, больше критической статической осевой нагрузки $N_{cr} = 2N_0$ [18].

Заключение. В данной работе с использованием модели механики сплошной среды и принципа минимума полной энергии изучена устойчивость движения одно- и двуслойной углеродных нанотрубок, погруженных в упругую среду, под действием динамической осевой нагрузки. С помощью модели Эрингена изучено влияние мелкомасштабного коэффициента на критическую нагрузку.

Результаты проведенного исследования показывают, что при продольном изгибе двуслойных нанотрубок локальные и нелокальные критические динамические нагрузки больше критических статических нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ru C. Q.** Axially compressed buckling of a double walled carbon nanotube embedded in an elastic medium // *J. Mech. Phys. Solids*. 2001. V. 49. P. 1265–1279.
2. **Ru C. Q.** Effect of van der Waals forces on axial buckling of a double-walled carbon nanotube // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 87. P. 7227–7231.
3. **Zhang Y. Q., Liu G. R., Han X.** Effect of small length scale on elastic buckling of multi-walled carbon nanotubes under radial pressure // *Phys. Lett. A*. 2006. V. 349. P. 370–376.
4. **Eringen A. C.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // *J. Appl. Phys.* 1983. V. 54. P. 4703–4710.
5. **Ranjbartoreh A. R., Ghorbanpour A., Soltani B.** Double-walled carbon nanotube with surrounding elastic medium under axial pressure // *Phys. E*. 2007. V. 39. P. 230–239.
6. **Ranjbartoreh A. R., Wang G. X., Ghorbanpour Arani A., Loghman A.** Comparative consideration of axial stability of single- and double-walled carbon nanotube and its inner and outer tubes // *Phys. E*. 2008. V. 41. P. 202–208.
7. **Ghorbanpour Arani A., Rahmani R., Arefmanesh A., Golabi S.** Buckling analysis of multi-walled carbon nanotubes under combined loading considering the effect of small length scale // *J. Mech. Sci. Tech.* 2008. V. 22. P. 429–439.
8. **Zhang Y. Q., Liu G. R., Qiang H. F., Li G. Y.** Investigation of buckling of double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium using the energy method // *Intern. J. Mech. Sci.* 2006. V. 48. P. 53–61.
9. **Fok S. L.** Analysis of the buckling of long cylindrical shells embedded in an elastic medium using the energy method // *J. Strain Anal. Engng Design*. 2002. V. 37. P. 375–383.
10. **Liew K. M., Hu Y. G., Ng T. Y., Zhao X.** Dynamic stability of rotating cylindrical shells subjected to periodic axial loads // *Intern. J. Solids Struct.* 2006. V. 43. P. 7553–7570.
11. **Ng T. Y., Lam K. Y., Liew K. M., Reddy J. N.** Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading // *Intern. J. Solids Struct.* 2001. V. 38. P. 1295–1309.
12. **Ghorbanpour Arani A., Mohammadimehr M., Arefmanesh A., Ghasemi A.** Transverse vibration of short carbon nanotube using cylindrical shell and beam models // *Proc. Inst. Mech. Engng. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2010. V. 224. P. 745–756.
13. **Sun C., Liu K.** Dynamic buckling of double-walled carbon nanotubes under step axial load // *Acta Mech. Solida Sinica*. 2009. V. 22. P. 27–36.
14. **Sun C., Liu K.** Dynamic torsional buckling of a double-walled carbon nanotube in an elastic medium // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 2008. V. 27. P. 40–49.

15. **Xie G. Q., Han X., Long S. Y.** Effect of small size on dispersion characteristics of wave in carbon nanotubes // Intern. J. Solids Struct. 2007. V. 44. P. 1242–1255.
16. **Dym C. L.** Stability theory and its applications to structural mechanics. Leiden: Noordhoff Intern. Publ., 1974.
17. **Brush D. O.** Buckling of bars, plates and shells / D. O. Brush, B. O. Almroth. N. Y.: McGraw-Hill, 1975.
18. **Darabi M., Darvizeh M., Darvizeh A.** Nonlinear analysis of dynamic stability for functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading // Composit. Struct. 2008. V. 83. P. 201–211.

*Поступила в редакцию 16/X 2009 г.,
в окончательном варианте — 18/X 2010 г.*
