

УДК 519.6

УСТАНОВЛЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИММЕТРИЧНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

А. М. Липанов, С. А. Карсканов

Институт прикладной механики УрО РАН, 426067 Ижевск

E-mail: elle@udman.ru

Сформулирована задача о расчете полей параметров ламинарного стационарного симметричного потока. Выполнены расчеты двумерного течения в канале с внезапным изменением сечения. Проанализирована эволюция трехмерного возмущения, вводимого в канал на начальной стадии расчетов. Показано, что при числе Рейнольдса $Re = 50$ двумерный поток в канале устанавливается при безразмерном времени $t > 20$, а стационарное состояние в тех же условиях достигается при $t \approx 100$. На расстоянии около $10h$ (h — ширина канала на входе) поток становится одномерным, но вследствие сжимаемости продольная компонента вектора скорости остается функцией продольной координаты канала.

Ключевые слова: уравнения гидромеханики, число Рейнольдса, число Маха, отрывная зона.

Ламинарные стационарные внутренние потоки газов можно разделить на симметричные и несимметричные. Симметричное течение реализуется при малых значениях числа Рейнольдса Re . В работе [1] показано, что поток симметричен при $Re = 50$, но уже при $Re = 150$ поток хотя и остается стационарным, но оказывается несимметричным. Представляет интерес анализ процессов установления и изменения по длине канала параметров ламинарного потока, когда реализуется течение симметричной струи в плоском канале со скачком площади поперечного сечения на левой границе (рис. 1).

Решалась следующая система трехмерных уравнений гидромеханики сжимаемой среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho UV) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho UW) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right],$$

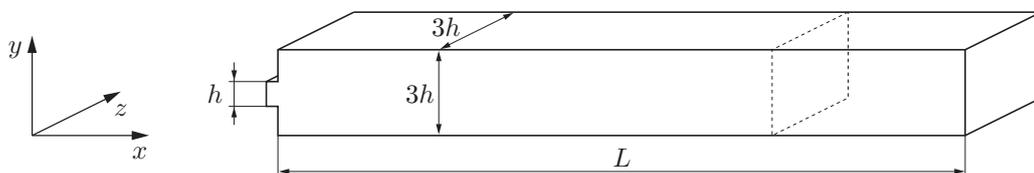


Рис. 1. Область интегрирования

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V U) + \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho V^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V W) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right], \quad (2) \\
& \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho W U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho W V) + \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho W^2) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{4}{3} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \right\}; \\
& \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(P + \rho E)U] + \frac{\partial}{\partial y} [(P + \rho E)V] + \frac{\partial}{\partial z} [(P + \rho E)W] = \\
& = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu U \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu V \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu W \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu U \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu W \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] - \\
& - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu U \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu V \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu W \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь t — время; x, y, z — декартовы координаты; U, V, W — компоненты вектора скорости; T — температура; ρ — плотность; P — давление; E — полная внутренняя энергия; μ — вязкость; λ — теплопроводность. Значения μ и λ принимались постоянными.

При выполнении расчетов уравнения (1)–(3) записывались в безразмерном виде. Использовались следующие масштабы: h — расстояние между обтекаемыми поверхностями на входе в канал, \hat{U} — максимальная величина продольной компоненты вектора скорости потока на входе в канал, $\hat{P}, \hat{\rho}$ — давление и плотность газа на входе в канал, соответствующие \hat{U} .

Уравнения (1)–(3) записаны в дивергентной форме, поэтому за знаками частных производных переменные величины отсутствуют.

В уравнении (3)

$$E = \frac{U^2 + V^2 + W^2}{2} + c_V T \quad (4)$$

(c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме).

Используя уравнение состояния идеального газа $P = \rho R T$ и соотношение $c_p = c_V + R$, уравнение (4) можно записать в виде

$$E = \frac{U^2 + V^2 + W^2}{2} + \frac{1}{k-1} \frac{P}{\rho},$$

где $k = c_p/c_V$; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; R — универсальная газовая постоянная.

При решении уравнений (1)–(3) использовались следующие начальные условия:

$$U = V = W = 0, \quad P = P_{in}, \quad T = T_{in}.$$

Граничные условия на входе

$$\begin{aligned} P_0 &= s_0 \rho_0^k; \\ U_0 &= \varphi(y, \delta_U) + C_1(P_0 - \langle P \rangle) \varphi(y, \delta_T), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\varphi(y, \delta_\xi) = \begin{cases} 1 - (1 - y/\delta_\xi)^N, & 0 \leq y \leq \delta_\xi, \\ 1, & \delta_\xi < y \leq h - \delta_\xi, \\ 1 - ((y - h + \delta_\xi)/\delta_\xi)^N, & h - \delta_\xi < y \leq h, \end{cases}$$

$\xi \rightarrow (U, T)$; δ_U, δ_T — толщины динамического и теплового пограничных слоев соответственно; s_0 — удельная энтропия; $\langle P \rangle$ — среднее давление P_0 на входе в канал; $C_1 = 1/(k M_0)$; $M_0 = U_0/C_0$ — число Маха; $C_0 = (k P_0/\rho_0)^{1/2}$ — скорость звука; N — порядок аппроксимации внутри области интегрирования.

Две другие компоненты вектора скорости равны нулю:

$$V_0 = W_0 = 0. \quad (6)$$

Граничные условия на выходе

$$P_L = P_a + C_2 \sigma(t), \quad (7)$$

где P_a — безразмерное давление окружающей среды;

$$C_2 = \frac{k M}{2H + M \langle m \rangle(t)}, \quad \sigma(t) = m(L, t) - \langle m \rangle(t),$$

$$\langle m \rangle(t) = \frac{1}{L} \int_S m(x, t) dx, \quad m(x, t) = \iint_{S(x)} \rho U dy dz, \quad m(L, t) = \iint_{S(L)} \rho U dy dz,$$

H — полувысота канала.

Следует отметить, что разности $P_0 - \langle P \rangle$ и $m(L, t) - \langle m \rangle(t)$ в соответствии с работой [2] используются для “вывода” из области интегрирования возмущений, достигающих левой и правой границ соответственно. При использовании указанных разностей условия (5) и (7) являются нестационарными.

Граничные условия на обтекаемых поверхностях

$$U = V = W = \frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

Поскольку рассматриваемая область интегрирования — это не ограниченный в направлении координаты z зазор между двумя обтекаемыми поверхностями, для выделения объема конечных размеров одна из плоскостей (x, y) выбиралась соответствующей координате $z = 0$. С учетом результатов работ [1, 3] на расстоянии $\pm H_z$ от нее использовались условия периодичности

$$U_+ = U_-, \quad V_+ = V_-, \quad W_+ = W_-, \quad P_+ = P_-, \quad \rho_+ = \rho_-.$$

Расстояние $\pm H_z$ выбиралось методом проб, в рассматриваемых примерах $H_z = 1,5h$.

Уравнения (1)–(3) интегрировались по времени методом Рунге — Кутты со вторым порядком точности. По пространственным переменным частные производные первого и второго порядков рассчитывались с восьмым порядком точности методом Залесака [4]

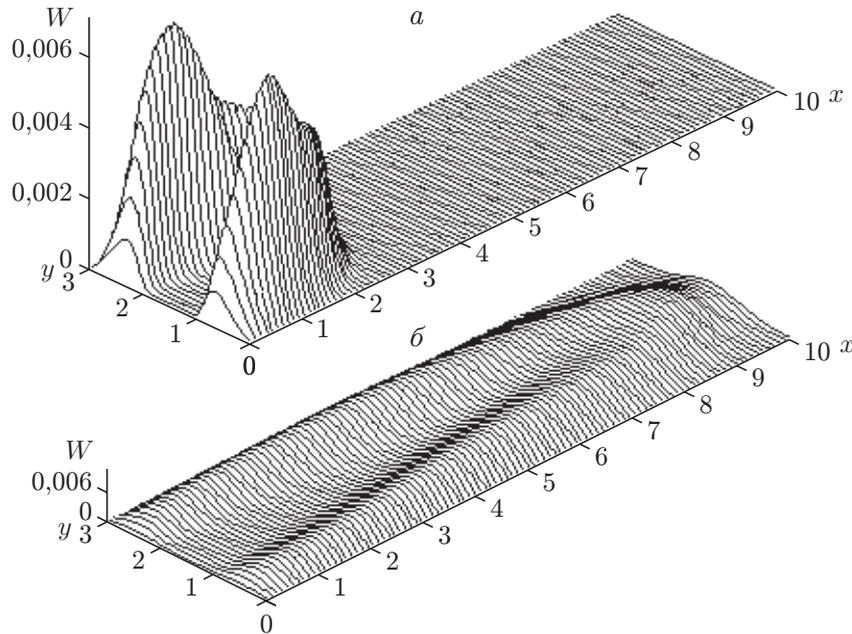


Рис. 2. Эволюция компоненты W вектора скорости потока во времени при $Re = 50$:
 a — $t = 3,4$; b — $t = 14,2$

в соответствии с [1]. Использовались разностные сетки с постоянными по пространству шагами интегрирования вдоль направлений x, y, z .

Используемый метод был проверен на устойчивость и сходимость при $Re = 10^4$. В соответствии с подходом, изложенным в работе [1], сходимость приближенного решения составляла 0,1 %.

На входе в канал на начальной стадии расчетов (первые 100 шагов интегрирования по времени) задавалось трехмерное возмущение:

$$V_0 = W_0 = 0,1U_0, \quad (8)$$

после чего использовались условия (6).

Об эволюции третьей компоненты W вектора скорости можно судить, анализируя данные рис. 2, на котором показана зависимость W от x и y при $z = 0$ в различные моменты времени. На рис. 2, a переменная W соответствует моменту, когда на входе в канал ее значение оказывается равным нулю не только на границе, но и в ближайшей внутренней точке (реализуется условие $\partial W/\partial x = 0$ при $x = 0$). Это условие выполняется после 1700 шагов интегрирования по безразмерному времени ($t = 3,4$) и соответствует числу Рейнольдса $Re = 50$. Во всех расчетах число Маха $\hat{M} = 0,6$. К этому моменту времени передний фронт возмущения углубляется в канал на расстояние $x \approx 3h$.

На расстоянии $y \approx 1,5h$ при уменьшении x передний фронт поверхности $W(x, y)$ круто спадает. При $x \rightarrow 0$ значение $W(x, y)$ остается близким к нулю. Справа и слева от фронта видны поверхности, начинающиеся в отрывных зонах. Каждая из них имеет экстремум.

Можно сделать вывод, что в момент, соответствующий 100 шагам интегрирования по времени ($t = 0,2$), вводимое возмущение находилось достаточно близко от входа в канал.

Компонента W вектора скорости эволюционирует со временем. При этом ее пространственное распределение сохраняется. На входе в канал при $t > 3,4$ выполняется условие $\partial W/\partial x = 0$, но крутизна поверхности $W(x, y)$ и максимальное значение W уменьшаются. Возмущение распространяется вниз по потоку. К моменту времени $t = 8$ передний

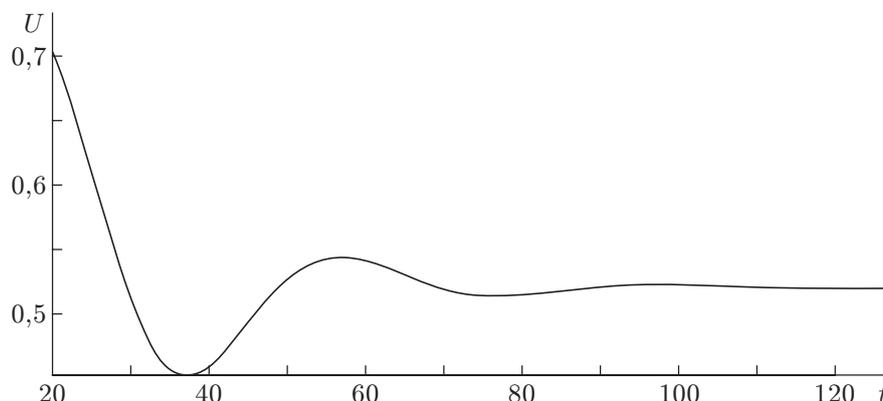


Рис. 3. Зависимость продольной компоненты вектора скорости потока от времени в точке $(12h, 0, 0)$

фронт возмущения находится на расстоянии $x \approx 5,5h$. При этом максимальное значение величины W уменьшается более чем в три раза по сравнению с ее значением при $t = 3,4$ (рис. 2,а). Максимум W находится в окрестности входной части канала. В дальнейшем поверхность $W(x, y)$ становится более полой с максимумом вблизи ее переднего фронта (рис. 2,б), но максимальное значение W на порядок меньше, чем при $t = 3,4$. Наконец, при $t > 20$ третья компонента вектора скорости исчезает. На правой границе области интегрирования (рис. 2,б) значение W не превышает нескольких единиц в четвертой значащей цифре и ею можно пренебречь.

С ростом Re время, в течение которого исчезает компонента W вектора скорости, увеличивается. Функцию $W_{\max}(t, Re)$ с погрешностью не более 4 % можно аппроксимировать выражением

$$W_{\max}(t, Re) = f(t)[1 + \phi(Re)] + \varphi(Re),$$

где $f(t) = a + b/t$; $a = -0,0093$; $b = 0,02265$,

$$\phi(Re) = k \frac{Re - Re_0}{100}, \quad \varphi(Re) = c \left(\frac{Re - Re_0}{100} \right)^2 + d \frac{Re - Re_0}{100},$$

$k = 1,05$; $c = 0,01$; $d = 0,0035$; $Re_0 = 40$.

Когда симметричный поток становится двумерным (это соответствует моменту времени $t \approx 20$ при $Re = 50$), его параметры еще остаются нестационарными. На рис. 3 показано изменение во времени продольной компоненты U вектора скорости потока в канале длиной $L = 15h$ при $y = z = 0, x = 12h$. Видно, что при $t = 20$ значение $U = 0,7$. С ростом t продольная компонента U вектора скорости сначала уменьшается и при $t = 38,34$ достигает минимума ($U_{\min} = 0,456$). Затем значение U увеличивается и при $t = 56,2$ становится максимальным, а при $t \gtrsim 100$ выходит на постоянный уровень. Аналогично изменяется давление.

Таким образом, можно сделать вывод, что при $Re = 50$ и $t > 100$ течение становится стационарным.

На рис. 4 представлено поле векторов скорости движения газа в окрестности левой границы канала при $Re = 60$. Видны отрывные зоны. С увеличением Re отрывные зоны вытягиваются вниз по потоку. Между отрывными зонами и центральной частью струи формируется двумерное течение газа.

В окрестности левой границы канала вертикальная составляющая вектора скорости потока в его центральной части равна нулю. В пределах отрывных зон эта величина того же порядка, что и продольная компонента. Протяженность отрывных зон достигает $4h$.

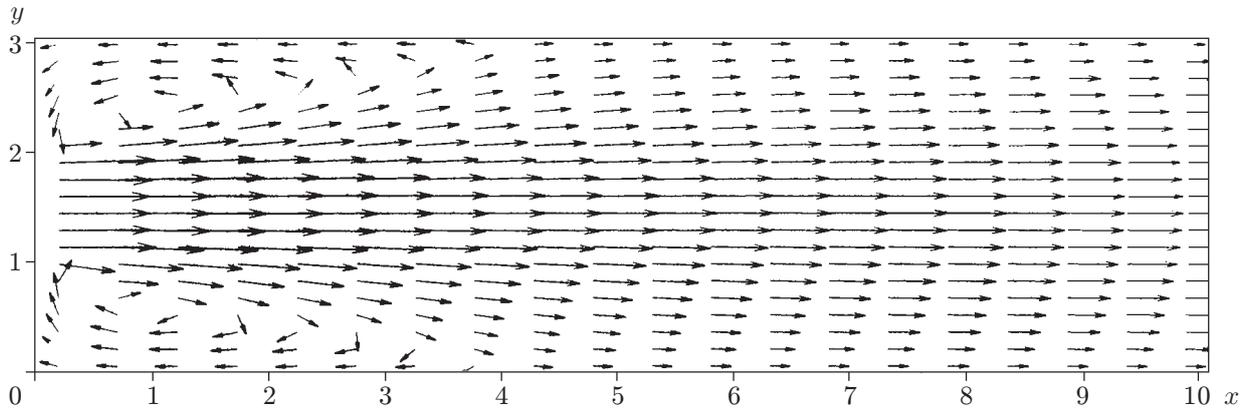


Рис. 4. Векторы скорости потока в плоскости xy ($z = 0$) при $Re = 60$

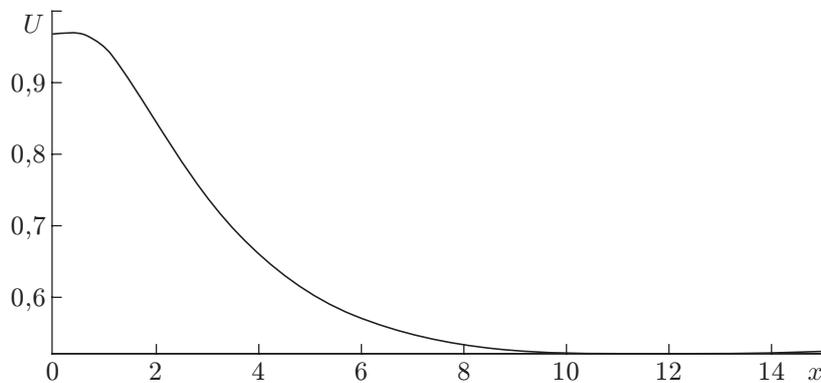


Рис. 5. Изменение продольной компоненты вектора скорости потока по длине канала ($y = 0, z = 0$) при $Re = 50, M = 0,6$

За их пределами компонента скорости V достаточно быстро уменьшается. На расстоянии $x \approx 10h$ значение $V \leq 0,002$ и далее с увеличением x стремится к нулю.

При тех же условиях по мере удаления от левой границы продольная компонента также уменьшается и достигает минимума ($U_{\min} \approx 0,52$) при $x \approx 11,6h$ (рис. 5).

Об эволюции профиля $U(y)$ можно судить на основе данных рис. 6: с ростом координаты x изменение скорости U по сечению канала становится меньше. При $Re = 40, x = 7h, 10h$ профили $U(y)$ практически совпадают. При $Re = 50, 60$ различие профилей более значительно. Это объясняется тем, что в канале конечной длины при изменяющихся по его длине плотности и давлении продольная компонента U в зависимости от x изменяется по всей длине канала (см. рис. 5).

Для достаточно длинных каналов при больших значениях x реализуется условие $\rho U = \text{const}$, но из-за переменности ρ величина U также изменяется. Поэтому для сжимаемой среды получить асимптотически профиль Пуазейля не удастся. Различие составляет $2 \div 3 \%$.

Профиль единственной (в условиях двумерного потока) компоненты вектора вихря $\xi = \partial V / \partial x - \partial U / \partial y$, как и профили других параметров течения, симметричен. Максимумы компоненты ξ соответствуют координатам $y = h, 2h$ при $x = 0$. На расстоянии $y = 2h$ значение $\xi > 0$, при $y = h$ значение $\xi < 0$. С ростом Re максимумы вектора вихря ($x = 0, y = h, 2h$) увеличиваются.

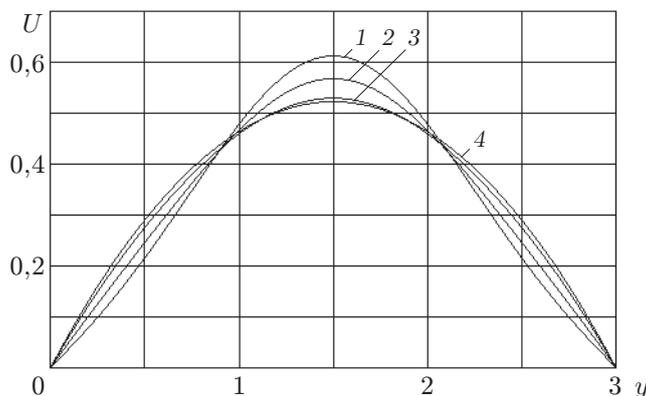


Рис. 6. Распределение продольной компоненты вектора скорости потока по высоте канала в различных сечениях при $Re = 40$:
 1 — $x = 4h$; 2 — $x = 5h$; 3 — $x = 7h$; 4 — $x = 10h$

Таблица 1

Re	P_0	P_{\max}	x_*
40	0,945	1,025	4,57
50	0,929	1,013	5,58
60	0,920	1,008	6,50

Таблица 2

Re	T	
	$x = 0$	$x = L$
40	0,984	1,043
50	0,979	1,037
60	0,976	1,033

Вниз по потоку величина вектора вихря уменьшается, стремясь асимптотически к предельной величине, соответствующей наибольшему значению $\partial U / \partial y$.

Проанализируем изменение температуры, давления и плотности. В условиях дозвукового потока эти параметры изменяются незначительно. Наиболее существенно (до 9,5 %) изменяется давление в окрестности левой границы канала. Сначала оно растет, на расстоянии $x = x_*$, зависящем от Re , давление, отнесенное к давлению в окружающей среде, проходит через максимум, а затем стремится к единице на правой границе канала. Значения давления P_0 на левой границе и P_{\max} (при $x = x_*$), а также координаты $x = x_*$ приведены в табл. 1. С ростом Re значения P_0 и P_{\max} уменьшаются, а координата x_* сдвигается в глубь канала. Интенсивность изменения давления по длине канала ослабевает. Характер изменения плотности аналогичен, но она изменяется слабее, чем давление. При $Re = 40$ плотность возрастает с $\rho = 0,96$ на левой границе области интегрирования до $\rho = 0,988$ в точке, где $\rho = \rho_{\max}$. Изменение плотности примерно в три раза меньше, чем изменение давления при том же значении Re . С ростом Re изменения плотности и давления увеличиваются. При $Re = 50$ плотность изменяется с 0,948 до 0,982, т. е. на 0,034, а давление — на 0,084. При $Re = 60$ плотность изменяется с 0,941 до 0,979, т. е. на 0,038, а давление увеличивается на 0,088.

С увеличением x температура монотонно возрастает, стремясь асимптотически к профилю $T(y)$, соответствующему стационарному профилю для продольной компоненты вектора скорости. Пределы изменения температуры ядра дозвукового потока больше, чем у плотности, но меньше, чем у давления (табл. 2).

При $Re = 40$ изменение давления и плотности составляет 8,4 и 2,9 % соответственно, в то время как температура по длине канала возрастает на 6 %. При $Re = 60$ соответствующие значения равны 9,5, 4,0 и 5,8 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Липанов А. М.** Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А. М. Липанов, Ю. Ф. Кисаров, И. Г. Ключников. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001.
2. **Федорченко А. Т.** Численное исследование нестационарных дозвуковых течений вязкого газа во внезапно расширяющемся плоском канале // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 4. С. 32–41.
3. **Рождественский Б. Л., Симакин И. Н.** Моделирование турбулентных течений в плоском канале // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 1. С. 96–121.
4. **Zalesak S. T.** A physical interpretation of the Richtmyer two-step Lax — Wendroff scheme, and its generalization to higher spatial order // Advances in computer methods for partial differential equations: Proc. of the 5th IMACS Intern. symp. on computer methods for partial different. equations, Bethlehem (USA), June 19–21, 1984. New Brunswick: Rutgers Univ. Press, 1984. P. 491–496.

*Поступила в редакцию 19/IV 2006 г.,
в окончательном варианте — 18/VII 2006 г.*
