

УДК 532.526.2

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ С ТРЕЩИНОЙ

В. Д. Жесткая, М. Р. Джабраилов\*

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре

\* Филиал ОАО "Опытно-конструкторское бюро им. П. О. Сухого",  
681018 Комсомольск-на-Амуре  
E-mail: kks@knastu.ru

Построена математическая модель задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной. Приведены примеры расчета прогибов ледяного покрова и выполнен анализ их результатов.

Ключевые слова: ледяной покров, трещина, движущаяся нагрузка.

В практике судоходства и при эксплуатации инженерных сооружений на речной и морской акваториях может возникнуть необходимость разрушения ледяного покрова. Во многих случаях весьма эффективным является использование для этого судов на воздушной подушке (СВП). Разрушение ледяного покрова при этом может происходить как под действием веса судна, движущегося по поверхности льда, так и вследствие возбуждения в ледяном покрове изгибно-гравитационной волны с достаточной для разрушения амплитудой [1]. Для разработки рекомендаций по режиму движения СВП при разрушении ледяного покрова возникает необходимость расчета напряженно-деформированного состояния ледяного покрова.

Наблюдения за процессом разрушения ледяного покрова движущимся СВП показывают, что окончательному разрушению предшествует появление трещин, рассекающих ледяной покров на достаточно крупные блоки. Поскольку при этом лед в течение некоторого времени сохраняет определенную несущую способность, которая обеспечивается взаимодействием кромок трещин, для определения параметров движения СВП при разрушении ледяного покрова необходим расчет напряженно-деформированного состояния не только непрерывного ледяного покрова, но и ледяного покрова с образовавшимися в нем трещинами.

Для построения математической модели поставленной задачи используем прямоугольную систему координат, оси  $x$ ,  $y$  которой расположены в плоскости ледяной пластины, а ось  $z$  направлена вверх. В соответствии с работой [2] ледяной покров представляется в виде пластины, а вода считается идеальной несжимаемой жидкостью. Глубину водоема будем полагать постоянной.

В качестве основных зависимостей примем дифференциальное уравнение вязкоупругих колебаний ледяного покрова [2]

$$D \left( 1 + \tau_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + \rho_w g w + \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = p(x, y, t), \quad (1)$$

уравнение Лапласа для потенциала скорости движения жидкости

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

и граничные условия на дне водоема

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0 \quad (3)$$

и на границе льда и воды

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $w$  — прогиб льда;  $t$  — время;  $\rho_w, \rho_i$  — плотность воды и льда соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — толщина ледяного покрова;  $\Phi$  — потенциал скорости;  $p$  — интенсивность внешней нагрузки;  $H$  — глубина водоема;  $\tau_f$  — время релаксации деформаций;  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Краевые условия на трещине определим следующим образом. При раскрытии трещины ее берега не смещаются по вертикали относительно друг друга, а силы их взаимодействия перпендикулярны берегам и приводятся к распределенной моментной нагрузке, представляющей собой изгибающий момент на берегу трещины [3]. При этом в данной точке трещины интенсивность моментной нагрузки  $m$  зависит от угла раскрытия трещины  $\varphi$ :  $k\varphi = m$  ( $k$  — погонный коэффициент жесткости, одинаковый для всех точек трещины). В результате принятых допущений в данной точке трещины на каждом ее берегу получаем краевые условия

$$M_\xi = k \left( \left. \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|_{x=0} \right), \quad M_\xi = -D \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( w + \tau_f \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( w + \tau_f \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right),$$

где  $x$  — абсцисса данной точки в общей системе координат;  $w$  — прогиб в этой точке;  $\partial w / \partial t$  — скорость изменения прогиба в этой точке;  $\xi, \eta$  — нормаль и касательная к линии трещины в этой точке в плоскости  $xOy$  соответственно;  $M_\xi$  — изгибающий момент на берегу трещины.

Численное решение данной задачи основано на методе, представляющем собой комбинацию метода конечных элементов и метода конечных разностей [4].

При расчете будем рассматривать ограниченную в горизонтальной плоскости область ледяного покрова с находящейся под ней жидкостью. Размер данной области должен быть достаточным для того, чтобы считать, что на ее границе  $\Gamma$  перемещения пластины практически отсутствуют, и принять на  $\Gamma$  условия жесткой заделки. На вертикальной поверхности, ограничивающей жидкость под ледяным покровом, необходимо обеспечить условие непротекания

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad (5)$$

где  $n$  — нормаль, перпендикулярная оси  $z$ .

Исключив из уравнений (1)–(5) потенциал скорости  $\Phi$  и проведя преобразования с использованием метода конечных элементов [4, 5], получим систему матричных дифференциальных уравнений второго порядка (см. (10) в [4] или (2.33) в [5]). Используя для решения данной системы метод конечных разностей, получим систему матричных уравнений (см. (12) в [4] или (2.35) в [5]), решив которую можно найти прогибы ледяной пластины. При этом учет краевых условий на трещине, не меняя вида матричных дифференциальных уравнений, приводит к изменению только значений матричных коэффициентов.

Начальные условия формулируются для каждой конкретной задачи. Например, в случае, когда до начала движения СВП находится в покое в некоторой точке ледяного покрова, при  $t = 0$  прогиб пластины равен статическому прогибу под действием веса судна,

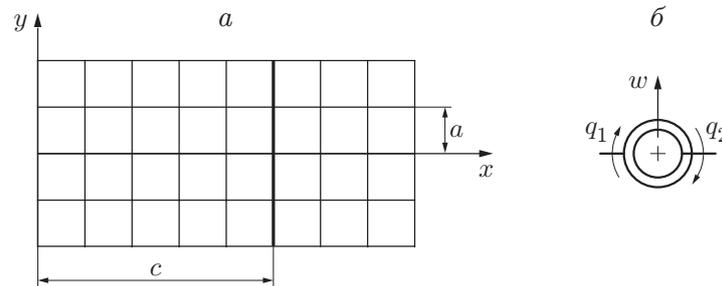


Рис. 1. Дискретизация пластины с трещиной:

$a$  — дискретная модель,  $b$  — шарнирный элемент, соединяющий берега трещины; сплошная линия — трещина

а начальная скорость  $(\partial w / \partial t)|_{t=0} = 0$ . В случае, когда нагрузка приложена к ледяному покрову мгновенно, без удара и сразу начиная движение (например, при сходе СВП с берега на лед), прогиб и скорость его изменения в начальный момент времени равны нулю.

Заметим, что при получении указанных выше матричных уравнений одним из этапов являлась дискретизация пластины. В методе конечных элементов могут использоваться элементы различного типа, формы и размеров, что позволяет учитывать ряд особенностей конкретной задачи (таких как криволинейные границы водоема или местные ослабления ледяного покрова). В частности, одной из таких особенностей является трещина.

Для того чтобы пояснить способ учета трещин при построении дискретной модели, рассмотрим следующий пример. Пусть в пластине прямоугольной формы имеется одна сквозная трещина, расположенная параллельно стороне пластины. В этом случае дискретизацию пластины целесообразно провести, используя “совместные” конечные элементы с 16 степенями свободы [6] (рис. 1,  $a$ ). Для учета краевых условий на трещине между ее берегами в узлах сетки введем дополнительный конечный элемент, представляющий собой упругий шарнир (рис. 1,  $b$ ). Вертикальное перемещение шарнира равно прогибу пластины  $w$  в данном узле, а угловые перемещения  $q_1, q_2$  равны угловым перемещениям кромок трещины:

$$q_1 = -\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=c-0}, \quad q_2 = -\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=c+0}.$$

Зависимость угловых перемещений в шарнире от возникающего в нем момента  $M$ , равного по значению и противоположного по знаку соответствующему моменту на берегу трещины, определяется соотношением  $q_1 - q_2 = AM$ , а матрица жесткости шарнирного конечного элемента имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} 1/A & -1/A \\ -1/A & 1/A \end{bmatrix}.$$

Коэффициент податливости  $A$  можно определить из натуральных или аналогичных математических экспериментов. Однако вследствие сложности натуральных экспериментов со льдом, а также высокого уровня развития технологий численного моделирования предпочтительным является второй метод.

В работе [7] показано, что для моделирования трещины упругим шарниром необходимо знать значение погонного коэффициента жесткости  $k$ , характеризующего изгибающий момент сопротивления раскрытию берегов трещины единичной длины. Тогда коэффициент  $1/A$ , входящий в матрицу жесткости упругошарнирного элемента, равен  $lk$  ( $l = a$  — длина зоны взаимодействия берегов трещины в соответствующем узле;  $a$  — длина стороны конечного элемента (см. рис. 1,  $a$ )).

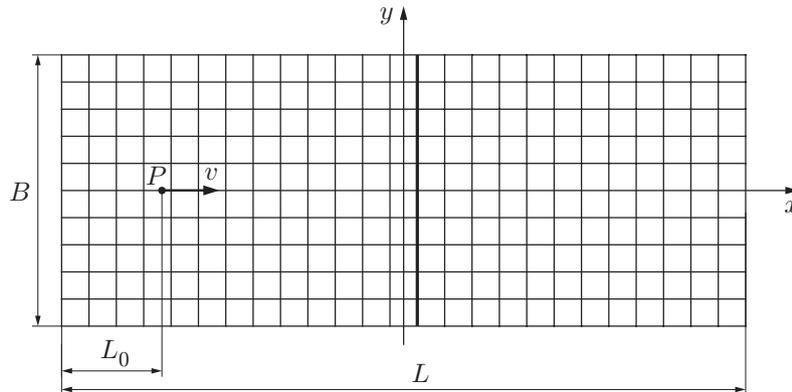


Рис. 2. Дискретная модель пластины (сплошная линия — трещина)

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Прямоугольная в плане ледяная пластина длиной  $L = 1000$  м и шириной  $B = 400$  м жестко заделана по контуру, оси координат  $x, y$  являются осями симметрии пластины. Трещина расположена на прямой  $x = 20$  м и пересекает пластину по всей ее ширине (рис. 2). В точке  $x = -350$  м,  $y = 0$  ( $L_0 = 150$  м) к пластине приложена сосредоточенная сила  $P$ , при этом пластина имеет соответствующий статический прогиб. Из состояния покоя сила  $P$  начинает двигаться по оси  $x$ , мгновенно приобретая постоянную скорость  $v$ . При движении силы пластина получает динамический прогиб  $w(x, y, t)$ . Исходные данные задачи следующие:  $E = 0,73 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 1$  м,  $H = 5$  м,  $\rho_i = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\tau_f = 10$  с,  $P = 0,4 \cdot 10^6$  Н,  $v = 5$  м/с. Дискретная модель пластины состоит из квадратных конечных элементов с длиной стороны  $a = 40$  м, шаг сетки по времени [4]  $\Delta t = 0,2$  с. Для расчета прогибов использовалась специально разработанная программа, которая предполагает вычисление статического прогиба, полученного пластиной до начала движения силы. В данном случае коэффициент погонной жесткости  $k$  определялся из математического эксперимента, объектом которого являлась балка-стенка прямоугольного поперечного сечения со сквозной трещиной в середине пролета [8]. При плоском изгибе балки в зоне контакта берегов трещины возникают контактные напряжения и контактное сечение поворачивается, т. е. трещина раскрывается на некоторый угол. Определение напряжений и перемещений в балке-стенке выполнено в программном комплексе MSC/NASTRAN с моделированием балки мембранными конечными элементами. В результате расчета находим угол раскрытия трещины  $\varphi$  и изгибающий момент  $M$ , возникающий в сечении балки под воздействием контактных напряжений. При малых прогибах зависимость  $\varphi(M)$  оказывается практически линейной и можно найти коэффициент податливости  $A = \varphi/M$ , а затем коэффициент  $k$ .

При указанных параметрах задачи расчеты проводились с моделированием сквозной прямолинейной трещины идеальным шарнирным соединением ( $k = 0$ ) и упругим шарнирным соединением ( $k = 3 \cdot 10^7$  Н/рад при  $h = 1$  м по методу [8]).

На рис. 3 приведены прогибы пластины в точках оси  $x$ . При определении  $k$  длина балки-стенки выбиралась равной удвоенному расстоянию  $d = 30$  м от берега трещины до ближайшей точки перегиба графика прогибов на оси  $x$ , полученному при  $k = 0$ . На рис. 3 видно, что в рассмотренных случаях форма упругой поверхности пластины одинакова, различие имеется лишь в значениях максимального прогиба и составляет 21,4 % максимального прогиба в случае упругих шарниров.

На рис. 4 показан участок поверхности пластины при  $y \geq 0$  (с учетом симметрии задачи относительно оси  $x$ ) для момента времени, когда динамические прогибы принимают

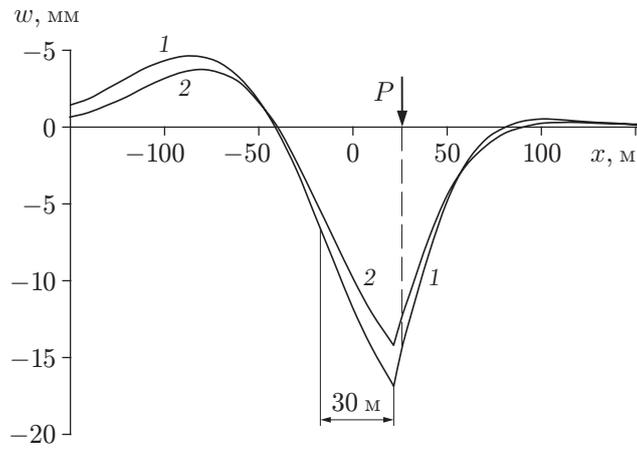


Рис. 3. Прогибы ледяной пластины на оси  $x$  при  $x = 25$  м:  
 1 —  $k = 0$ , 2 —  $k = 3 \cdot 10^7$  Н/рад

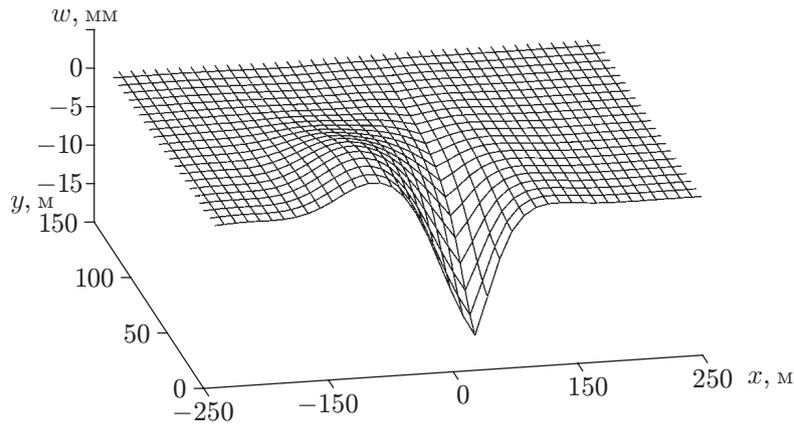


Рис. 4. Прогиб поверхности пластины

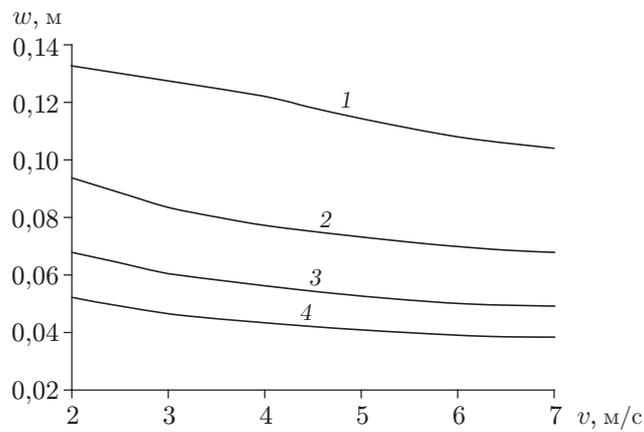


Рис. 5. Зависимость максимальных прогибов от скорости движения силы:  
 1 —  $h = 0,2$  м; 2 —  $h = 0,3$  м; 3 —  $h = 0,4$  м; 4 —  $h = 0,5$  м

максимальные значения (при этом сила  $P$  находится в точке  $x = 25$  м). На рис. 3, 4 видно, что максимальные прогибы возникают в точках пластины, через которые проходит трещина.

Для того чтобы определить зависимость максимальных динамических прогибов от скорости движения нагрузки, выполнена серия расчетов для прямоугольной ледяной пластины (см. рис. 2) длиной  $L = 900$  м и шириной  $B = 300$  м. Сквозная прямолинейная трещина моделируется идеальными шарнирами, расположена на оси  $y$  и пересекает пластину по всей ее ширине; дискретная модель пластины состоит из квадратных конечных элементов с длиной стороны  $a = 25$  м; в начальный момент времени сосредоточенная сила  $P = 0,4 \cdot 10^6$  Н находится в состоянии покоя на оси  $x$  в точке  $x = -350$  м,  $y = 0$  ( $L_0 = 100$  м), при этом пластина имеет соответствующий статический прогиб; в момент начала движения нагрузка мгновенно приобретает постоянную скорость. Остальные параметры задачи имеют те же значения, что и в предыдущем случае. Для  $h = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$  м (рис. 5) выполнены расчеты для различных скоростей движения нагрузки  $v = 2 \div 7$  м/с с шагом 1 м/с. Из рис. 5 следует, что с увеличением скорости движения нагрузки значение максимальных прогибов уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев В. А. Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова / В. А. Зуев, В. М. Козин. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1988.
2. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
3. Зуев В. А., Грамузов Е. М., Двойченко Ю. А. Разрушение ледяного покрова: Материалы по обмену опытом. Горький: Науч.-техн. о-во им. А. Н. Крылова: Волж.-Кам. межобл. правление, 1989. Вып. 2.
4. Жесткая В. Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 243–248.
5. Жесткая В. Д. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом / В. Д. Жесткая, В. М. Козин. Владивосток: Дальнаука, 2003.
6. Бойцов Г. В. Справочник по строительной механике корабля: В 3 т. / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. Л.: Судостроение, 1982. Т. 2.
7. Джабраилов М. Р. Моделирование сквозных трещин в ледяном покрове при численном решении задачи о напряженно-деформированном состоянии ледяного покрова, находящегося под действием движущейся нагрузки // Сб. докл. 2-й конф. “Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения”, Владивосток, 31 авг. — 6 сент. 2003 г. Комсомольск-на-Амуре: Ин-т машиноведения и металлургии ДВО РАН, 2003. С. 48–56.
8. Джабраилов М. Р. Определение коэффициента погонной жесткости при моделировании сквозной трещины в изотропной упругой ледяной пластине цилиндрическим шарниром с внутренним сопротивлением // Сб. докл. 2-й конф. “Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения”, Владивосток, 31 авг. — 6 сент. 2003 г. Комсомольск-на-Амуре: Ин-т машиноведения и металлургии ДВО РАН, 2003. С. 32–38.

*Поступила в редакцию 2/IV 2007 г.,  
в окончательном варианте — 24/V 2007 г.*