

УДК 539.3

ОБ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА СПЛОШНОСТИ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru

В рамках теории больших вязкоупругопластических деформаций рассчитывается одномерный процесс деформирования материала и последующей разгрузки в окрестности одиночного цилиндрического дефекта сплошности. Основное внимание уделяется исследованию формирования поля остаточных напряжений в процессе “нагрузка — разгрузка”, а также влияния вязкостных свойств материала на уровень и распределение таких напряжений. Проведено сравнение с результатами решения соответствующей задачи по теории больших упругопластических деформаций.

Ключевые слова: конечные деформации, вязкость, пластическое течение, остаточные напряжения.

Введение. Особенности формирования поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности рассматривались ранее в рамках модели больших упругопластических деформаций [1]. Оказалось, что предположение об идеальном характере пластического течения и учет только упругих свойств материала при его деформировании до начала пластического течения и при разгрузке обуславливают “приспособляемость” дефекта к циклическим нагрузкам. Иными словами, необратимые деформации вблизи дефекта с ростом числа циклов не накапливаются, а остаточные напряжения в его окрестности остаются неизменными после каждой разгрузки. Очевидно, что учет вязкостных свойств материала на стадии его необратимого деформирования приводит к замедлению пластического течения и, следовательно, к развитию дефекта сплошности. Скорость этого развития и определяет, главным образом, усталостную прочность изделия, работающего при циклических нагрузках. Менее очевидно проявление вязкостных свойств на стадии деформирования, предваряющего пластическое течение, или на стадии разгрузки. Ниже будем рассматривать именно этот случай, а пластическое течение, так же как в [1], будем считать идеальным. Отметим, что перемещения точек деформируемой среды в окрестности дефекта сплошности соизмеримы с его размерами, поэтому нельзя использовать предположение о малости деформаций. В окрестности дефекта сплошности они всегда большие.

1. Исходные модельные зависимости. Одной из целей настоящей работы является сравнение полученных результатов с результатами решения рассматриваемой задачи в модели идеальной упругопластической среды. Как отмечено выше, такая задача рассмотрена в работе [1], где использовалась модель больших упругопластических деформа-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00537-а) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-890.2003.1).

ций, предложенная в [2]. Поэтому данная математическая модель выбирается в качестве основы построения дальнейших модельных зависимостей. В работе [2] разделение полных деформаций Альманси d_{ij} на обратимую e_{ij} и необратимую p_{ij} составляющие основано на требовании, чтобы компоненты последних изменялись при разгрузке по законам, аналогичным законам в случае, если тело движется как жесткое целое. Поэтому определим составляющие полных деформаций Альманси с помощью уравнений их переноса [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj} - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p + r_{ik} p_{kj} - p_{ik} r_{kj}, \\ \frac{de_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (e_{ik} v_{k,j} + v_{k,i} e_{kj} - r_{ik} e_{kj} + e_{ik} r_{kj} - \varepsilon_{ik}^p e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}^p), \\ 2\varepsilon_{ij} &= v_{i,j} + v_{j,i}, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + F_{ij}(e_{st}, \varepsilon_{st}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Соотношения (1.1) записаны в переменных Эйлера в прямоугольной декартовой системе координат. Здесь u_i — компоненты вектора перемещений; компоненты кососимметричного тензора F_{ij} не выписываются, в [2] приведены явные выражения для них. Первое соотношение в (1.1) можно рассматривать в качестве определения тензора скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p . Это тензор источников в уравнении переноса для тензора p_{ij} , и, следовательно, само соотношение есть определение объективной производной, связывающей p_{ij} и ε_{ij}^p . Можно показать (см. [2]), что компоненты тензора деформаций Альманси d_{ij} вычисляются по зависимостям

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - (1/2)e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}. \quad (1.2)$$

Далее будем предполагать, что деформируемая среда является несжимаемой. Связь между девиаторами напряжений, деформациями и скоростями деформаций можно принять в форме простейшего линейного соотношения

$$\begin{aligned} \tau_{ij} + \alpha \frac{D\tau_{ij}}{Dt} &= 2\mu m_{ij} + 2\beta \varepsilon_{ij} \quad \text{при } p_{ij} \equiv 0, \\ \tau_{ij} + \alpha \frac{D\tau_{ij}}{Dt} &= 2\mu m_{ij}^e + 2\beta \varepsilon_{ij} \quad \text{при } p_{ij} \neq 0, \\ \tau_{ij} &= \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}, \quad m_{ij} = d_{ij} - (1/3)d_{kk}\delta_{ij}, \\ m_{ij}^e &= e_{ij} - (1/2)e_{ik}e_{kj} - (1/3)e_{kk}\delta_{ij} + (1/6)e_{ks}e_{sk}\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь α, μ, β — постоянные материала; D/Dt — производная Яумана. Следует отметить, что первая зависимость в (1.3) является предельной для второй при стремлении к нулю необратимых деформаций.

Принимая принцип максимума Мизеса, имеем ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0. \quad (1.4)$$

В качестве пластического потенциала далее будем использовать призму Треска

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2K = 0. \quad (1.5)$$

Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.5) в рассматриваемом изотермическом случае достаточно записать обычные кинематические зависимости и дифференциальные следствия законов сохранения.

2. Постановка задачи. Начальные условия пластического течения. Микротрещину, рассматриваемую в качестве дефекта сплошности, будем считать достаточно

длинной по сравнению с ее поперечными размерами. Если пренебречь влиянием концов микротрещины на процесс деформирования материала вдали от них, то данное деформирование можно считать одномерным. Для дальнейшего упрощения постановки задачи полагаем, что дефект является цилиндрической полостью радиуса r_0 и сжатие материала задается давлением на цилиндрической поверхности начального радиуса $R_0 \gg r_0$:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p(t). \quad (2.1)$$

Здесь $R(t)$ — текущий радиус внешней цилиндрической поверхности; σ_{rr} — компонента тензора напряжений в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Граничную поверхность дефекта считаем свободной:

$$\sigma_{rr}|_{r=s} = 0 \quad (2.2)$$

($s(t)$ — текущий радиус цилиндрического дефекта сплошности). При возрастающей функции $p(t)$ материал вязкоупруго деформируется до достижения этой функцией порогового значения $p(t_0) = p_0$. В этот же момент времени t_0 напряженное состояние на границе $r = s(t_0) = s_0$ выходит на поверхность нагружения (1.5), которая задается уравнением

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2K. \quad (2.3)$$

Пренебрегая инерционными эффектами, данное состояние примем в качестве начального для последующего процесса пластического течения. Условие несжимаемости материала

$$(1 - u_{,r})\left(1 - \frac{u}{r}\right) = 1, \quad u_{,r} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2.4)$$

где $u(r) = u_r$ — единственная отличная от нуля компонента перемещения, позволяет определить кинематику среды с точностью до произвольной функции времени $\varphi = \varphi(t)$ (или $s(t)$, или $R(t)$):

$$\begin{aligned} u &= r - (r^2 + \varphi)^{1/2}, & \varphi &= R_0^2 - R^2 = r_0^2 - s^2, \\ 2d_{rr} &= 1 - \eta^{-1}, & 2d_{\theta\theta} &= 1 - \eta, & \eta &= 1 + r^{-2}(R_0^2 - R^2), \\ v &= v_r = -\dot{\varphi}/2r. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь точкой обозначена производная по времени. С учетом (2.5) из первого равенства (1.3) в рассматриваемом случае следует

$$\begin{aligned} \tau_{rr} + \alpha \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} - \frac{\dot{\varphi}}{2r} \tau_{rr,r} \right) &= \frac{2\mu}{3} \left(1 - \left(1 + \frac{\varphi}{r^2} \right)^{-1} \right) + \mu \frac{\varphi}{3r^2} + \beta \frac{\dot{\varphi}}{r^2}, \\ \tau_{\theta\theta} + \alpha \left(\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} - \frac{\dot{\varphi}}{2r} \tau_{\theta\theta,r} \right) &= -\frac{\mu}{3} \left(1 - \left(1 + \frac{\varphi}{r^2} \right)^{-1} \right) - 2\mu \frac{\varphi}{3r^2} - \beta \frac{\dot{\varphi}}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В (2.6) $(1 + r^{-2}\varphi)^{-1}$ можно рассматривать в качестве суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому τ_{rr} и $\tau_{\theta\theta}$ можно представить в виде

$$\tau_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(t)}{n!r^{2n}}, \quad \tau_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(t)}{n!r^{2n}}, \quad (2.7)$$

где $a_n(t)$, $b_n(t)$ — неизвестные функции. Если в (2.6) сумму геометрической прогрессии заменить на бесконечный ряд, то с учетом (2.7) получим

$$T(a_n) - \mu \frac{\varphi}{r^2} - \beta \frac{\dot{\varphi}}{r^2} + \frac{2\mu}{3} L(r, \varphi) = 0, \quad T(b_n) + \mu \frac{\varphi}{r^2} + \beta \frac{\dot{\varphi}}{r^2} - \frac{\mu}{3} L(r, \varphi) = 0,$$

$$T(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + \alpha \dot{a}_n}{n!r^{2n}} + \alpha \dot{\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!r^{2n+2}}, \tag{2.8}$$

$$L(r, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\varphi}{r^2}\right)^n.$$

Система дифференциальных уравнений (2.6) относительно $\tau_{rr}(r, t)$, $\tau_{\theta\theta}(r, t)$ и $\varphi(t)$ замыкается уравнением, следующим из уравнения движения среды, которое интегрируется по r в пределах $s \leq r \leq R$ с использованием (2.5) и с учетом условий (2.1), (2.2). Это уравнение с учетом (2.7) можно записать в виде

$$H(a_n, b_n, R, s) + M(\varphi, s, R) + p(t) = 0,$$

$$H(a_n, b_n, R, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2nn!} \left(\frac{1}{R^{2n}} - \frac{1}{s^{2n}}\right), \tag{2.9}$$

$$M(\varphi, s, R) = \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\varphi} \ln(sR^{-1}) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{s^2}\right) \dot{\varphi}^2 \right).$$

Здесь ρ — плотность среды.

Приравнивая в (2.7) и (2.8) коэффициенты при одинаковых степенях r , совместно с (2.9) получаем бесконечную рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций времени $\varphi(t)$, $a_n(t)$, $b_n(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \alpha^{-1}(-a_1 + \mu\varphi + \beta\dot{\varphi}), \\ \dot{b}_1 &= \alpha^{-1}(-b_1 - \mu\varphi - \beta\dot{\varphi}), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{a}_n &= \alpha^{-1}(-a_n - \alpha n(n-1)\dot{\varphi}a_{n-1} - (2\mu/3)(-1)^n n! \varphi^n), \\ \dot{b}_n &= \alpha^{-1}(-b_n - \alpha n(n-1)\dot{\varphi}b_{n-1} + (\mu/3)(-1)^n n! \varphi^n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Поскольку деформирование начинается из свободного состояния, начальные условия задачи для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений будут однородными: $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = a_n(0) = b_n(0) = 0$. Если в рядах (2.7) ограничиться конечным числом слагаемых, то решение системы (2.10) может быть получено численно. Расчеты показали, что, несмотря на малость размеров дефекта сплошности, ряды (2.7) сходятся достаточно быстро. В численных расчетах достаточно взять шесть слагаемых ряда.

Описанная задача является вспомогательной. Вычисления по предложенной схеме следует прекратить при зарождении области пластического течения, которое, как отмечено выше, начинается с момента времени $t = t_0$, когда нагружающее давление достигает порогового значения $p = p_0$. В этот момент на границе дефекта сплошности $r = s_0$ выполняется условие (1.5), которое в принятых обозначениях для рассматриваемого случая записывается в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n!s_0^{2n}} = 2K. \tag{2.11}$$

Согласно (2.11) вычисляется радиус s_0 , при котором начинается пластическое течение. Вычисленные таким способом распределения параметров напряженно-деформированного состояния являются начальными условиями для вычисления параметров дальнейшего деформирования.

3. Пластическое течение. Пусть нагружающее усилие $p(t)$ продолжает расти, так что

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -p_0 - g(t), \quad g(t_0) = 0, \quad g(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > t_0. \quad (3.1)$$

При $t > t_0$ материал в области $s(t) \leq r \leq m(t)$ находится в пластическом состоянии. Незвестная функция $m(t)$ задает движение границы зоны пластического течения. Уравнение движения среды следует проинтегрировать отдельно в области пластического течения и в области вязкоупругого деформирования. Принимая для напряжений представление (2.7), после интегрирования найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2K \ln(sr^{-1}) + M(\varphi, s, r), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - 2K \end{aligned} \quad (3.2)$$

в зоне пластического течения,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= H(a_n, b_n, r, R) + M(\varphi, R, r) - p_0 - g(t), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n!r^{2n}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

в области вязкоупругого деформирования.

Зависимости (3.2), (3.3) определяют напряженное состояние в материале с точностью до неизвестных функций времени $\varphi(t)$, $a_n(t)$ и $b_n(t)$. Для вычисления последних и определения функции $m(t)$, задающей движение упругопластической границы, следует использовать условия равенства напряжений (3.2) и (3.3) на этой границе (при $r = m(t)$). В результате получаем уравнения для $\varphi(t)$ и $m(t)$

$$\begin{aligned} H(a_n, b_n, m, R) + M(\varphi, R, s) - p_0 - g(t) - 2K \ln(sm^{-1}) &= 0, \\ \dot{m} = m \left(-\frac{2K}{\alpha} + \frac{\dot{a}_1 - \dot{b}_1}{m^2} + \frac{a_1 - b_1}{\alpha m^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(a_{n-1} - b_{n-1})}{(n-2)!m^{2n}} + \frac{\mu}{3\alpha} L(m, \varphi) \right) \times \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(a_n - b_n)}{n!m^{2n}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

К (3.4) следует добавить систему уравнений (2.10). Если ограничиться конечным числом a_n и b_n , то задача Коши для такой системы обыкновенных дифференциальных уравнений может быть исследована численно. Следует учитывать, что в данном случае начальными условиями являются значения функций, полученные из решения задачи в п. 2 для момента времени $t = t_0$ (при $p = p_0$). Найденные из решения указанной системы уравнений коэффициенты a_n и b_n рядов (2.7) и функции φ и m позволяют построить поля деформаций и напряжений в любой момент времени. Полные деформации определяются по известным перемещениям (2.5):

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{r^2 + \varphi}, \quad d_{\theta\theta} = -\frac{\varphi}{2r^2}. \quad (3.5)$$

Компоненты деформаций в области вязкоупругого деформирования вычисляются согласно (1.2) в виде

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}}, \quad e_{\theta\theta} = e_{rr}/(e_{rr} - 1). \quad (3.6)$$

Для вычисления компонент вязкоупругих деформаций в пластической области используем вторую формулу в (1.3), из которой в рассматриваемом случае следует

$$2\mu(e_{rr} - e_{\theta\theta}) - \mu(e_{rr}^2 - e_{\theta\theta}^2) + 2\beta\dot{\varphi}/r^2 = 2K. \quad (3.7)$$

С учетом (3.6) для компонент вязкоупругих деформаций получим зависимости

$$\begin{aligned} e_{rr} &= 1 - q^{1/2}, & e_{\theta\theta} &= 1 - q^{-1/2}, \\ q &= q_1 + \sqrt{q_1^2 + 1}, & q_1 &= -K/\mu + (\beta/\mu)\dot{\varphi}/r^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пластические деформации вычислим по найденным полным (см. (3.5)) и вязкоупругим (см. (3.8)) деформациям:

$$p_{rr} = (2d_{rr} + q - 1)/(2q), \quad p_{\theta\theta} = q(2d_{\theta\theta} + q^{-1} - 1)/2. \quad (3.9)$$

Зависимости (3.8) и (3.9) определяют распределение составляющих полных деформаций в любой момент времени по найденной предварительно функции $\varphi(t)$. Сведения об их распределении необходимы для расчетов процесса разгрузки.

4. Состояние разгрузки. При разгрузке материала будем ставить следующие краевые условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -p_1 + h(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь постоянная p_1 — значение нагружающего давления, достигнутое в процессе нагрузки: $p_1 = -p_0 - g(t_1)$. Момент времени $t = t_1$ является моментом окончания процесса нагрузки и начала процесса разгрузки. Монотонная функция $h(t)$, определенная при $t \geq t_1$, такова, что $h(t_1) = 0$ и $h(t) > 0$. В случае, когда p_1 достаточно велико, процесс разгрузки может вызвать новое пластическое течение [4], обусловленное выходом напряженного состояния на границе дефекта на поверхность нагружения (1.5) теперь уже при растягивающих внутренних усилиях ($\sigma_{\theta\theta} = 2K$ при $r = s(t)$). Остановимся на этом более общем случае. Считаем, что повторное пластическое течение при разгрузке начинается в момент времени $t = t_2$, когда $R(t_2) = R_2$, $s(t_2) = s_2$.

Для моментов времени $t_1 \leq t \leq t_2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} u &= r - (r^2 + \gamma)^{1/2}, & \gamma &= \varphi(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t), \\ m^2(t) &= m_1^2 - \gamma + \gamma_1, & m_1 &= m(t_1), & \gamma_1 &= \varphi(t_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В области $m(t) \leq r \leq R(t)$, где отсутствуют пластические деформации, напряжения вычисляются по формулам (3.3). Несмотря на то что при разгрузке в рассматриваемом интервале времени пластическая область не развивается, пространственная координата границы области $m(t)$ вследствие изменения деформированного состояния изменяется ($m(t) \neq m_1$), в отличие от материальной координаты. В области $s \leq r \leq m$ накопленные пластические деформации неизменны в каждой точке среды (при каждом значении материальной координаты), но при одном и том же значении пространственной координаты они различны. Пространственная эйлерова координата r связана с материальной лагранжевой координатой r_1 точки среды, фиксированной в момент начала процесса разгрузки, зависимостью $r^2 = r_1^2 - \gamma + \gamma_1$. Таким образом, пластические деформации в области $s \leq r \leq m$ следует вычислять по зависимостям (3.9) с учетом данного обстоятельства. Наконец, упругие деформации определяются по известным полным и пластическим деформациям:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= 1 - \sqrt{c^{-1}}, & e_{\theta\theta} &= 1 - \sqrt{c}, \\ c &= \frac{1}{q} \left(1 + \frac{\gamma - \gamma_1}{r^2} \right), & q &= -\frac{K}{\mu} + \sqrt{1 + \left(\frac{K}{\mu} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Так же как и в вязкоупругой области, компоненты девиатора напряжений в пластической области представим в виде

$$\tau_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n(t)}{n!r^{2n}}, \quad \tau_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n(t)}{n!r^{2n}}. \quad (4.4)$$

Данное представление позволяет проинтегрировать уравнение движения в области $s \leq r \leq m$ и получить для компонент напряжений зависимости

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= H(z_n, w_n, r, s) + (z_0 - w_0) \ln(sr^{-1}) + M(\gamma, s, r), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{n!r^{2n}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Если в (4.3) c^{-1} разложить в ряд по четным отрицательным степеням r , то с учетом (4.2) из второго соотношения (1.3) в рамках рассматриваемого интервала времени можно получить

$$\begin{aligned}z_0 + \alpha z_0 + T(z_n) &= \frac{2\mu}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2q} + \frac{\gamma - \gamma_1}{2qr^2} - q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1 - \gamma)^n}{r^{2n}} \right) + \beta \frac{\dot{\gamma}}{r^2}, \\ w_0 + \alpha w_0 + T(w_n) &= \frac{2\mu}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{\gamma - \gamma_1}{qr^2} + \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1 - \gamma)^n}{r^{2n}} \right) - \beta \frac{\dot{\gamma}}{r^2}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях r позволяет выписать обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= \alpha^{-1}(-z_0 + (2\mu/3)((1 + 1/q)/2 - q)), \\ \dot{w}_0 &= \alpha^{-1}(-w_0 + (2\mu/3)((1 + q)/2 - 1/q)), \\ \dot{z}_1 &= \alpha^{-1}(-z_1 + (2\mu/3)(\gamma - \gamma_1)(1/(2q) + q) + \beta\dot{\gamma}), \\ \dot{w}_1 &= \alpha^{-1}(-w_1 + (2\mu/3)(\gamma - \gamma_1)(1/q + q/2) - \beta\dot{\gamma}), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_n &= \alpha^{-1}(-z_n - \alpha n(n-1)\dot{\gamma}z_{n-1} - (2\mu/3)qn!(\gamma_1 - \gamma)^n), \\ \dot{w}_n &= \alpha^{-1}(-w_n - \alpha n(n-1)\dot{\gamma}w_{n-1} + (\mu/3)qn!(\gamma_1 - \gamma)^n).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Систему уравнений (2.10) и (4.7) следует дополнить обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из условия равенства напряжения σ_{rr} на упругопластической границе $r = m$. С учетом (4.5) такое уравнение может быть записано в виде

$$(z_0 - w_0) \ln(sm^{-1}) + H(z_n, w_n, m, s) - H(a_n, b_n, m, R) + M(\gamma, R, s) - p_1 + h(t) = 0. \quad (4.8)$$

Замкнутая система уравнений (2.10), (4.7), (4.8) при ограничениях, обусловленных конечностью числа слагаемых в рядах (2.7) и (4.4), и начальных условиях при $t = t_1$ ($\gamma = \gamma_1$, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t_1)$, $a_n = a_n(t_1)$, $b_n = b_n(t_1)$, $z_n = z_n(t_1) = 0$, $w_n = w_n(t_1) = 0$) решается до момента времени t_2 , когда с границы дефекта s_2 начинает распространяться область повторного пластического течения. Условие ее возникновения (условие пластичности Треска) при продолжающейся разгрузке в принятых обозначениях записывается в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{n!s_2^{2n}} = -2K. \quad (4.9)$$

Значения функций $\gamma_2 = \gamma(t_2)$, $\dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}(t_2)$, $a_n(t_2)$, $b_n(t_2)$, $z_n(t_2)$, $w_n(t_2)$ становятся начальными условиями для последующего процесса деформирования (в условиях (4.1)) при развивающейся области повторного пластического течения при разгрузке. Будем считать, что область пластического течения ограничена цилиндрическими поверхностями: $s(t) \leq r \leq f(t)$ ($f(t)$ — граница зоны повторного пластического течения). Уравнение движения среды следует проинтегрировать в трех областях: $s \leq r \leq f$, $f \leq r \leq m$, $m \leq r \leq R$.

Заметим, что $m \neq m_2 = m(t_2)$, несмотря на то что пластические деформации в области $f \leq r \leq m$ неизменны.

В области $m \leq r \leq R$ пластические деформации отсутствуют, а напряжения определяются зависимостями (3.3), в которых нагружающее усилие $p_0 + g(t)$ следует заменить на его значение при разгрузке $p_1 - h(t)$. В области $f \leq r \leq m$, где пластические деформации не изменяются, напряжения можно вычислить с помощью зависимостей (4.5):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (z_0 - w_0) \ln(mr^{-1}) + H(a_n, b_n, m, R) + H(z_n, w_n, r, m) + M(\gamma, R, m) - p_1 + h(t), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{n!r^{2n}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В области повторного пластического течения $s \leq r \leq f$ интегрированием уравнения движения найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2K \ln(sr^{-1}) + M(\gamma, s, r), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + 2K. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из условия равенства радиальных напряжений σ_{rr} (4.10) и (4.11) на границе области повторного пластического течения $r = f(t)$ следует уравнение

$$\begin{aligned} (z_0 - w_0) \ln(mf^{-1}) + H(a_n, b_n, m, R) + H(z_n, w_n, f, m) + \\ + M(\gamma, R, s) - p_1 + h(t) + 2K \ln(sf^{-1}) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Движение границы $r = f(t)$ области повторного пластического течения задается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{f} = f \left(\frac{2K}{\alpha} + \frac{\dot{z}_1 - \dot{w}_1}{f^2} + \frac{z_0 - w_0}{\alpha} + \frac{z_1 - w_1}{\alpha f^2} + \frac{2\eta\dot{\gamma}}{f^2} - \right. \\ \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\dot{\gamma}(z_{n-1} - w_{n-1})}{(n-2)!f^{2n}} + \frac{q\mu}{\alpha f^{2n}} (\gamma_1 - \gamma)^n \right) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(z_n - w_n)}{n!f^{2n}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (4.12) и (4.13) замыкают бесконечную систему дифференциальных уравнений (2.10), (4.7) относительно функций $\gamma, f, a_n, b_n,$

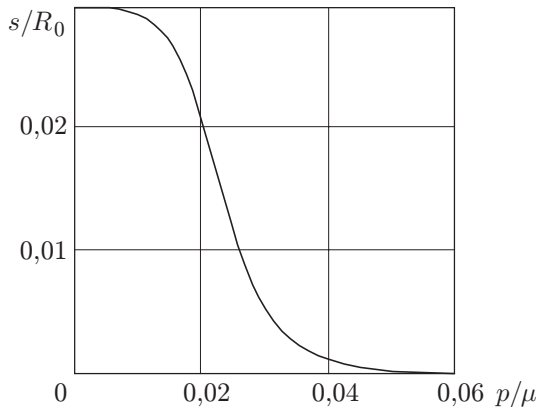


Рис. 1

Рис. 1. Изменение границы дефекта при нагрузке

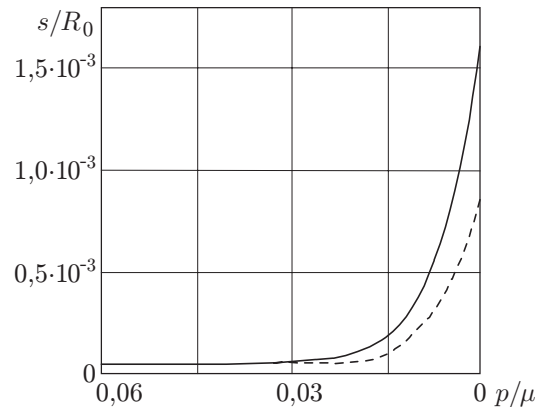


Рис. 2

Рис. 2. Изменение границы дефекта при разгрузке

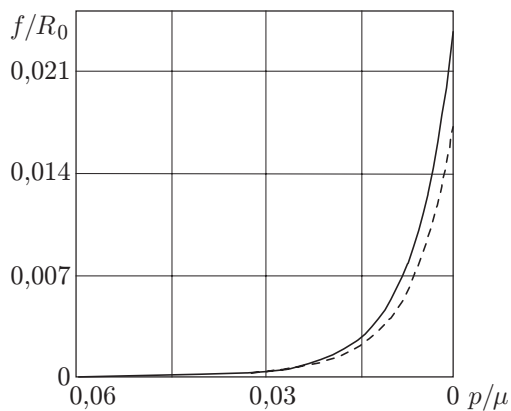


Рис. 3. Изменение границ области повторного пластического течения

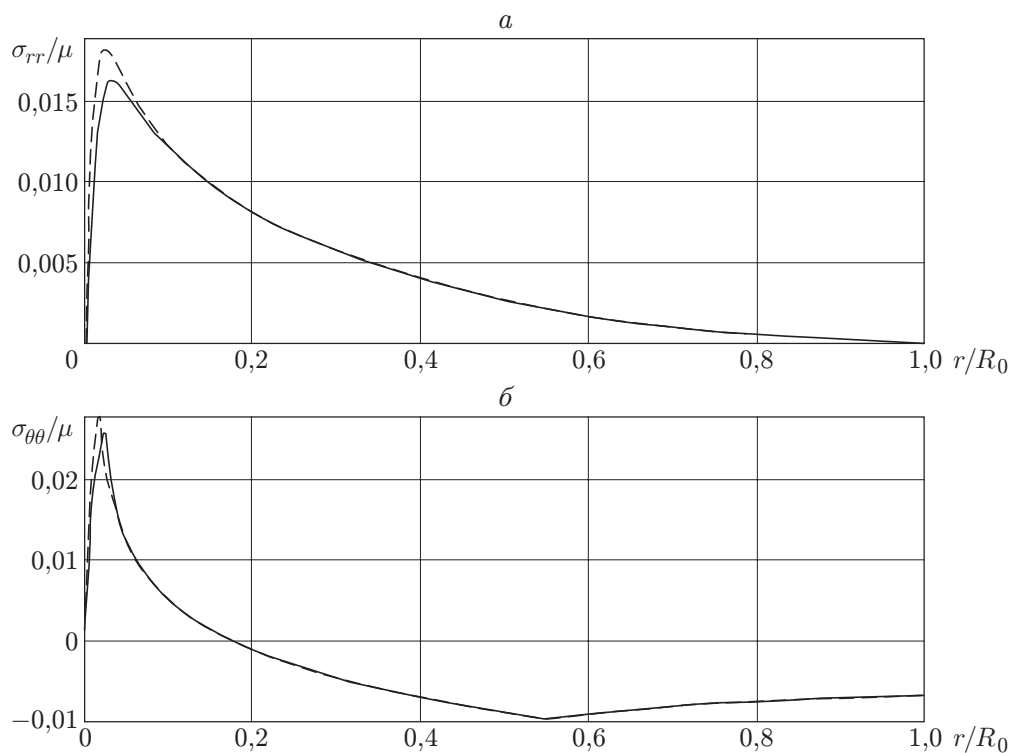


Рис. 4. Распределение остаточных радиальных (а) и тангенциальных (б) напряжений

z_n, w_n . Если в рядах (2.7) и (4.4) ограничиться конечным числом слагаемых, а в качестве начальных условий принять значения этих функций в момент времени t_2 , то решение такой задачи может быть найдено численно.

Остановимся на некоторых выводах из проведенных вычислений, полученных при следующих постоянных задачи: $K/\mu = 0,003$, $r_0/R_0 = 0,03$, $\eta/(\mu\alpha) = 3$ (модуль сдвига $\mu = 8,05 \cdot 10^{10}$). На рис. 1 представлено изменение границы дефекта при нагрузке. На рис. 2 показано различие размеров дефекта при разгрузке в случае идеальной упругопластической среды [1] (сплошная линия на рис. 2–4) и при учете вязкости на стадии упругого деформирования и при разгрузке (штриховая линия на рис. 2–4). Учет ползучести материала приводит к уменьшению радиуса дефекта и размера области повторного пластического течения при разгрузке (рис. 3). В то же время предполагаемого эффекта значимого уменьшения уровня остаточных напряжений за счет их релаксации в процессе разгрузки численно не обнаружено (рис. 4). Несмотря на то что в основе численных расчетов, проведенных в настоящем исследовании и в работе [1], лежат разные модели, количественно их результаты различаются незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.** Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316–325.
2. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
3. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
4. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.** Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.

Поступила в редакцию 30/V 2005 г.