

УДК 532.5

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА ВОДЫ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С ПЛАВАЮЩИМ ДИСКОМ

А. Е. Коренченко, В. П. Бескачко

Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск

E-mail: korenchenko@physics.susu.ac.ru

С использованием численных методов решена задача о затухании вращения диска, плавающего на поверхности вязкоупругой жидкости в цилиндрическом сосуде. Установлено, что движение имеет характер затухающих осцилляций, наблюдавшихся для воды. Построенная математическая модель вязкоупругой жидкости помимо коэффициента вязкости содержит два независимых параметра: модуль сдвига и время релаксации упругих напряжений. Из сопоставления с экспериментальными данными определены упругие параметры воды.

**Ключевые слова:** неньютоновские жидкости, реология, вязкоупругие жидкости, вискозиметрические измерения.

**Введение.** В настоящей работе численно исследуется вращательное движение поплавок в виде диска, плавающего на поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде (рис. 1). Диск мгновенно приводится во вращение вокруг собственной оси, совпадающей с осью сосуда. После достижения диском состояния стационарного вращения действие внешнего момента прекращается, и вследствие вязкого трения о жидкость движение диска становится затухающим. В экспериментах [1] обнаружено, что затухание имеет осциллирующий характер (рис. 2). Это позволяет предположить наличие вязкоупругих свойств у воды, считающейся ньютоновской жидкостью. В работе [2] рассматриваемая задача чис-

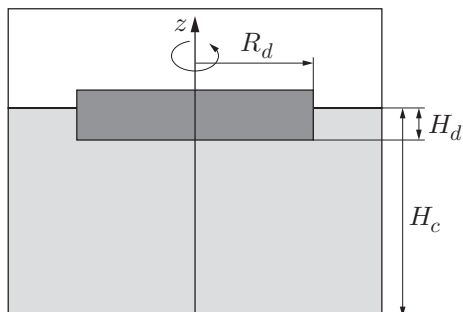


Рис. 1

Рис. 1. Схема эксперимента

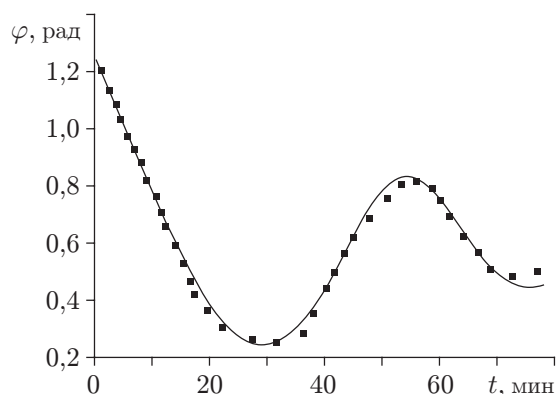


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость угла поворота диска от времени, прошедшего с момента выключения внешнего вращающего момента, при затухающем движении: линия — расчет, точки — эксперимент [1]

ленно решена в приближении ньютоновской жидкости; установлено, что изменение начальных условий и физических параметров диска и сосуда не приводит к возвратным движениям диска. В настоящей работе для интерпретации данных [1] использовано несколько линейных моделей вязкоупругой жидкости, наиболее подходящей из которых оказалась модель вязкоупругости [3] с экспоненциальной функцией затухания упругих напряжений. По сравнению с моделью ньютоновской жидкости эта модель содержит два дополнительных независимых параметра: модуль сдвига  $G$  и время релаксации упругих напряжений  $T$ . Рассмотренная жидкость определяется как вещество, для которого напряжение зависит от деформации и скорости деформации. В свою очередь деформация определяется различием конфигурации материала в последовательные моменты времени.

**Математическая модель.** Представим тензор напряжений исследуемой жидкости в виде  $\sigma = \sigma_{vis} + \sigma_{el}$ . Упругую часть тензора напряжений изотропной жидкости с конвективной упругостью:

$$\sigma_{el}(t'') = \int_{-\infty}^{t''} \exp\left(-\frac{t'' - t'}{T}\right) G d\varepsilon(t')$$

используем в дискретной форме

$$\sigma_{el}(t'') = G\varepsilon + \sigma_{el}(t') \exp(-(t'' - t')/T)$$

( $\varepsilon$  — тензор малых деформаций на отрезке времени  $t'' - t'$ ). При этом учитывается, что на каждом интервале времени упругие напряжения не аддитивны и имеет место релаксация [4]. Вязкая часть тензора напряжений удовлетворяет уравнению Ньютона  $\sigma_{vis} = -\eta\dot{\varepsilon}$ , где  $\dot{\varepsilon}$  — тензор скоростей деформации.

В безразмерных переменных, когда линейные размеры отнесены к внутреннему радиусу  $R_c$  цилиндрического сосуда, скорость — к  $\nu/R_c$ , возмущение давления относительно величины  $\rho g z$  — к  $\rho\nu^2/R_c^2$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\rho$  — плотность жидкости), время — к  $R_c^2/\nu$ , угловая скорость диска — к  $\nu/R_c^2$ , движение диска и окружающей его жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p - \mathbf{f}_{el}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d\omega_d}{dt} = M_{vis} + M_{el}^t. \quad (3)$$

Здесь  $t$  — время;  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  — скорость в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ ;  $p$  — возмущение давления относительно гидростатического давления;  $\omega_d$  — угловая скорость движения диска;  $\mathbf{f}_{el}$  — плотность упругой силы в среде. Уравнение (1) представляет собой закон изменения импульса для частиц жидкости, (2) — условие ее несжимаемости, уравнение (3) описывает затухающее движение диска. Безразмерная объемная плотность упругой силы на каждом временном шаге определяется явно по формуле

$$\mathbf{f}_{el}^{t+\delta t} = E\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_{el}^t \exp(-\delta t/\tau) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f}_{el}^t \exp(-\delta t/\tau) \delta t, \quad (4)$$

где  $E = GR_c^2 \delta t / (\rho\nu^2)$ . В (4) первое слагаемое — приращение упругих напряжений в результате перемещений, произошедших за время  $\delta t$ , равное временному шагу разностной схемы, второе слагаемое соответствует экспоненциальной релаксации упругих напряжений в элементе жидкости к моменту времени  $t$ , третье слагаемое — конвективному переносу плотности упругой силы за время  $\delta t$ .

Выражения для моментов, действующих на диск со стороны вязкоупругой жидкости, содержат два слагаемых: момент, действующий на нижнюю поверхность диска, и момент, действующий на притопленную часть его боковой поверхности. В цилиндрических координатах выражения для этих моментов имеют вид

$$M_{vis} = \frac{2\pi\rho R_c^5}{I_d} \left( - \int_0^{R_d/R_c} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=(H_c-H_d)/R_c} r^2 dr + \int_{(H_c-H_d)/R_c}^{H_c/R_c} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_d} dz \right),$$

$$M_{el}^{t+\delta t} = \frac{2\pi R_c^7 G \delta t}{I_d \nu^2} \left( - \int_0^{R_d/R_c} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=(H_c-H_d)/R_c} r^2 dr + \int_{(H_c-H_d)/R_c}^{H_c/R_c} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_d} dz \right) + M_{el}^t \exp \left( - \frac{\delta t}{\tau} \right),$$

где  $R_d$  — радиус диска;  $I_d$  — его момент инерции;  $H_c, H_d$  — высота жидкости в цилиндрическом сосуде и высота диска соответственно.

Граничные условия на твердых стенках соответствуют условиям прилипания жидкости:

$$\begin{aligned} z = 0, \quad 0 < r < R_c: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \\ z = H_c, \quad 0 < r < R_d: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \omega_d r, \\ 0 < z < H_c, \quad r = R_c: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \\ H_c - H_d < z < H_c, \quad r = R_d: \quad u_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \omega_d R_d. \end{aligned} \quad (5)$$

В предположении, что свободная граница жидкости является горизонтальной, записываются условия отсутствия на ней тангенциальных напряжений:

$$z = H_c, \quad R_d < r < R_c: \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

В центре сосуда в осесимметричном приближении выполняются условия

$$u_r = u_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

В начальный момент жидкость покоится, а диск мгновенно приводится в состояние стационарного вращения с угловой скоростью  $\omega_d$ . На первом этапе проводится расчет уравнений (1), (2) с граничными условиями (5)–(7). По достижении стационарного гидродинамического режима движения диска действие внешнего момента прекращается. На этом этапе проводится расчет уравнений (1)–(7) с использованием стационарного распределения скоростей и давлений, полученного на первом этапе. Угол поворота поплавка определяется по формуле  $\varphi(t + \delta t) = \varphi(t) + \omega_d \delta t$ .

**Метод решения.** Численное решение находится методом конечных разностей. Используются равномерные пространственные сетки с размерностью  $32 \times 32$  в осевом и радиальном направлениях. Дискретизация производных в гидродинамических уравнениях производится по схеме центральных разностей с точностью до  $(\delta z)^2$  по пространственным переменным и односторонних по времени — с точностью до  $\delta t$ . Линеаризация полученных нелинейных алгебраических разностных уравнений проводится по схеме Ньютона, а решение линеаризованных систем уравнений на каждом временном шаге — методом исключения Гаусса [5].

**Результаты и обсуждение.** Расчеты выполнены для цилиндрического контейнера со следующими размерами [1]: радиус сосуда  $R_c = 40$  см, его высота  $H_c = 10$  см, радиус цилиндрического поплавка (диска)  $R_d = 20$  см, момент инерции  $I_d = 4,5 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>. Поплавок помещался в центр сосуда и притапливался на глубину  $H_d = 2$  см. Плотность и вязкость жидкости соответствуют воде. Начальная угловая скорость вращения диска  $\omega_d^0 = 7,81 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup> определяется путем численного дифференцирования экспериментальной зависимости угла поворота диска от времени (см. рис. 2).

Цель работы состояла в подборе упругих параметров воды  $G$  и  $T$ , с помощью которых наилучшим образом удастся согласовать экспериментальную и расчетную зависимости угла поворота диска от времени. На рис. 2 показана расчетная кривая, полученная при  $G = 1,3 \cdot 10^{-5}$  Па и  $T = 29,33$  мин. Видно, что результаты численного расчета хорошо согласуются с данными [1], по крайней мере для первой волны колебаний.

Приведем экспериментально полученные значения модуля сдвига для различных жидких сред: для желатинового студня  $G = 10^4$  Па [6], для 5 %-й суспензии крахмала в минеральном масле  $G = 2 \div 3$  Па [7], для крови  $G = 10^{-1} \div 10^{-3}$  Па [8], для воды  $G = 1,3 \cdot 10^{-5}$  (данные настоящей работы). Таким образом, модуль сдвига воды, по крайней мере, на два порядка меньше модуля сдвига крови, являющейся наименее “упругой” среди вязкоупругих жидкостей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Апакашев Р. А., Павлов В. В.** Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
2. **Бескачко В. П., Коренченко А. Е.** Гидродинамические явления при вращении диска в вязкой ньютоновской жидкости // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика, физика, химия. 2002. № 3. С. 34–38.
3. **Астарита Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Маруччи. М.: Мир, 1978.
4. **Бартенев Г. М.** Релаксационные процессы в стеклообразных системах / Г. М. Бартенев, Д. С. Сандитов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
5. **Ши Д.** Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988.
6. **Папков С. П.** Студнеобразное состояние полимеров. М.: Химия, 1974.
7. **Thurston G. B., Gaertner E. B.** Viscoelasticity of electrorheological fluids during oscillatory flow in a rectangular channel // J. Rheol. 1991. V. 35. P. 1327–1343.
8. **Thurston G. B.** Viscoelastic properties of blood and blood analogs // Adv. Hemodynamics Hemorheol. 1996. N 1. P. 1–30.

*Поступила в редакцию 2/X 2006 г.,  
в окончательном варианте — 22/III 2007 г.*