

УДК 519.2

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ю. Е. Воскобойников

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
E-mail: voscob@mail.ru*

Рассматривается оптимизация алгоритмов вейвлет-фильтрации с двух- и трёхпараметрическими пороговыми функциями. Оптимизация выполняется в двух направлениях: за счёт выбора наилучшей пороговой функции и оценивания её оптимальных параметров. На основе анализа результатов численных исследований даны рекомендации по применению определённых пороговых функций на практике.

Ключевые слова: вейвлет-фильтрация, многопараметрические пороговые функции, оценивание оптимальных пороговых величин.

Введение. Вейвлет-фильтрация сигналов и изображений, как правило, включает три этапа:

- нахождение коэффициентов разложения по зашумлённым значениям дискретного сигнала (т. е. определение прямого дискретного вейвлет-преобразования);
- обработка вычисленных коэффициентов разложения;
- нахождение «сглаженных» значений дискретной функции (т. е. вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования).

Качество вейвлет-фильтрации определяется алгоритмами обработки второго этапа. Большинство применяемых на практике алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент подвергается преобразованию, задаваемому видом пороговой функции. В литературе предложены двух- и трёхпараметрические пороговые функции, имеющие определённые преимущества перед часто используемыми «жёсткой» и «мягкой» пороговыми функциями, в которые входит только один параметр. Наличие в пороговой функции нескольких параметров требует вычисления их оптимальных значений, минимизирующих ошибку фильтрации. Однако отсутствие аргументированных и приемлемых (по точности фильтрации) алгоритмов выбора этих параметров объясняет их слабое применение на практике.

Данная работа посвящена оптимизации алгоритмов вейвлет-фильтрации с многопараметрическими пороговыми функциями в двух аспектах: за счёт выбора наилучшей пороговой функции и оценивания её оптимальных параметров.

Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации. Приведём основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов работы.

Многомасштабное представление $f(t)$ в базисе вейвлет-функций имеет вид [1, 2]

$$\hat{f}(t) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1)$$

при этом базисные функции $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ называют масштабирующими (или отцовскими), а функции $\{\psi_{j,k}(t)\}$ — вейвлет-функциями (или материнскими). Переменная j задаёт уровень разложения, и её часто называют коэффициентом масштаба, а переменная k — временной сдвиг той или иной базисной функции. Чем меньше номер j , тем более «мелкие»

структуры исходной функции $f(t)$ могут быть представлены в базисах $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ и тем ближе реконструированный сигнал $\hat{f}(t)$ к исходному. Величина J задаёт глубину разложения, а j_0 — начальный уровень разложения. Коэффициенты разложения $a_{j,k}$ называют аппроксимирующими, $d_{j,k}$ — детализирующими и определяются выражениями

$$a_{j,k} = \int_R f(t)\varphi_{j,k}(t)dt; \quad d_{j,k} = \int_R f(t)\psi_{j,k}(t)dt, \quad (2)$$

где R — интервал нахождения функции $f(t)$.

Алгоритм вейвлет-разложения двумерной функции аналогичен одномерному случаю. Любое изображение можно интерпретировать как функцию двух переменных $f(x, y)$. Генераторное произведение функций $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ порождает следующие базисные функции:

$$\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y) = \varphi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}; \quad \{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y) = \varphi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\};$$

$$\{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}; \quad \{\psi\psi_{j,n,m}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\}.$$

Соответствующие коэффициенты разложения изображения принято называть:

— аппроксимирующими ($A_j = \{aa_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y)\}$;

— горизонтальными детализирующими ($H_j = \{ad_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$;

— вертикальными детализирующими ($V_j = \{da_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y)\}$;

— диагональными детализирующими ($D_j = \{dd_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$.

Заметим, что для успешной фильтрации шума необходимо на втором этапе вейвлет-фильтрации обратить в нуль «шумовые» коэффициенты (в основном обусловленные шумом), сохранив при этом «информативные» коэффициенты разложения (определяемые значениями точного сигнала). Эта идея реализуется пороговыми алгоритмами обработки коэффициентов разложения, которые задаются соответствующими пороговыми функциями. На практике в большинстве случаев используются однопараметрические жёсткая и мягкая пороговые функции:

$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda, \end{cases} \quad (3)$$

$$T_S(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d})[|\tilde{d}| - \lambda]_+, \quad (4)$$

где $[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0, \\ 0, & \text{если } z < 0; \end{cases}$ λ — величина порога; \tilde{d} — обрабатываемый коэффициент разложения. Графики функций показаны на рис. 1 (кривая 1 — функция (3), 2 — функция (4)).

Отметим характерные недостатки этих пороговых функций:

1) из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину λ в функции $T_S(\tilde{d}, \lambda)$ возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала, особенно при больших значениях λ , что приводит к увеличению систематической ошибки фильтрации;

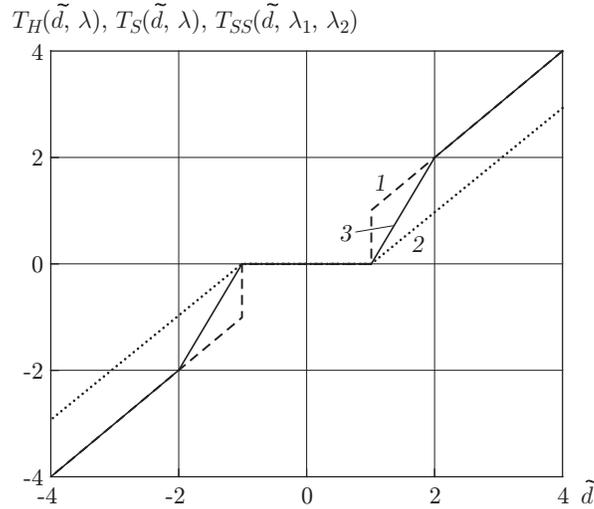


Рис. 1

2) наличие в функции $T_H(\tilde{d}, \lambda)$ разрыва в окрестности λ может вызвать появление осцилляций (эффект Гиббса) в особых точках обрабатываемого сигнала.

Для преодоления этих недостатков функций (3), (4) в литературе (например, [3]) были предложены двухпараметрические функции, среди которых наиболее часто упоминается пороговая функция вида

$$T_{SS}(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1, \\ \text{sign}(\tilde{d}) \frac{\lambda_2(|\tilde{d}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2, \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (5)$$

которая включает уже две пороговые величины λ_1, λ_2 . График этой функции приведён на рис. 1 (кривая 3). В работе [3] исследованы статистические характеристики ошибок фильтрации для пороговых функций (3)–(5). Показано (аналитически и в вычислительном эксперименте), что функция (3) имеет наименьшую систематическую ошибку фильтрации, (4) — наименьшую дисперсию случайной составляющей ошибки фильтрации, (5) — наименьшую СКО фильтрации. Поэтому использование функции (5) более предпочтительно по сравнению с однопараметрическими функциями (3), (4).

В работе [4] построена трёхпараметрическая пороговая функция, имеющая вид

$$T_C(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1, \\ \alpha \lambda_2 \left[\frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]^2 \left\{ (\alpha - 3) \left(\frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + 4 - \alpha \right\}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2, \\ \tilde{d} - \text{sign}(\tilde{d})(1 - \alpha)\lambda_2, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (6)$$

где $\lambda_1 < \lambda_2, 0 \leq \alpha \leq 1$. На рис. 2 показаны графики функции (6) при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ и разных значениях параметра α : кривая 1 — $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 0,2$; 3 — $\alpha = 0,5$; 4 — $\alpha = 0,7$; 5 — $\alpha = 1,0$. Видно, что при $\alpha = 0$ и $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ функция (6) совпадает с функцией (4).

Очевидно, что параметры функций (3)–(6) играют роль управляющих параметров, существенно влияющих на ошибку фильтрации. Поэтому вычисление значений этих параметров исходя из условия минимума СКО фильтрации является актуальной задачей.

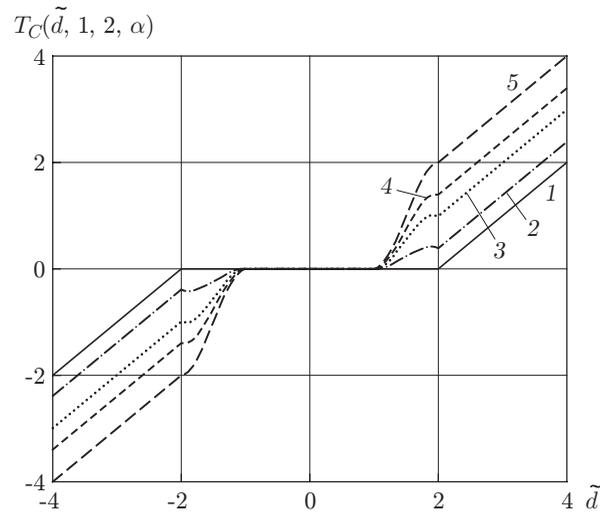


Рис. 2

Заметим, что для однопараметрических пороговых функций (3), (4) предложено несколько алгоритмов выбора пороговой величины λ . В работе [5] выполнено сравнение некоторых из этих алгоритмов. Показано, что алгоритм, построенный на основе критерия оптимальности (используемого для выбора параметра регуляризации [6–8]), позволяет достаточно точно оценить оптимальное значение порога λ_{opt} , при котором СКО фильтрации минимальна. В [9] на базе критерия оптимальности построен алгоритм оценивания оптимальных значений λ_1, λ_2 функции (5). Однако для пороговых функций, включающих большее число параметров, вопрос об оценивании оптимальных значений остаётся открытым.

Оценивание оптимальных пороговых величин на основе критерия оптимальности. Предположим, что:

1. Вместо точных значений f_i дискретного сигнала даны (известны) его зашумлённые значения $\tilde{f}_i = f_i + \eta_i, i = 1, 2, \dots, N$, где шум измерения η_i имеет нулевое среднее $M[\eta_i] = 0$, дисперсию σ^2 и значения η_i, η_j не коррелированы при $i \neq j$. Аналогичное предположение делается относительно шума $\eta_{i,j}$ регистрации изображения.

2. Базисные функции $\{\varphi_{j,k}(t)\}, \{\psi_{j,k}(t)\}$ являются ортонормированными, что соответствует ортогональным вейвлетам (Добеши, Симлета, Кайфлета). Этим же свойством обладают базисные функции разложения изображения [10].

3. Вычисление коэффициентов разложения по зашумлённым значениям \tilde{f}_i осуществляется алгоритмом Малла [1, 2], и результатом является набор коэффициентов $\{\tilde{d}_{j_0+1,k}\}, \{\tilde{d}_{j_0+2,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j_0+J,k}\}, \{\tilde{a}_{j_0+J,k}\}$. При применении алгоритма Малла к разложению изображения вычисляются наборы коэффициентов A_j, H_j, V_j, D_j .

В [10] показано, что относительный уровень ошибки вычисления аппроксимирующих коэффициентов $\{\tilde{a}_{j_0+J,k}\}$ существенно (на порядок и более) меньше уровней ошибок детализирующих коэффициентов, и поэтому пороговой обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты уровней $j_0+1, j_0+2, \dots, j_0+J_{\text{fl}}$, где J_{fl} — глубина фильтрации, удовлетворяющая условию $J_{\text{fl}} \leq J$. При фильтрации изображения обрабатываются наборы коэффициентов H_j, V_j, D_j .

Обозначим через θ вектор, составленный из параметров пороговой функции. Тогда для одномерного дискретного сигнала СКО фильтрации определим функционалом

$$\Delta(\theta) = M[\|\hat{f}_\theta - f\|^2], \quad (7)$$

где $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания по плотности распределения шума; f , \hat{f}_θ — векторы, проекции которых равны значениям «точного» и «сглаженного» (с использованием пороговой функции) сигналов соответственно. Набор θ_{opt} , минимизирующий СКО (7), назовём вектором оптимальных параметров и для оценки этого вектора обратимся к критерию оптимальности.

Критерий оптимальности предложен в работе [6] и используется для оценки оптимального параметра регуляризации в линейных регуляризирующих алгоритмах решения некорректных задач (например, [7, 8]). Определим вектор невязки $e_\theta = \tilde{f} - \hat{f}_\theta$ с проекциями $e_{\theta_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\theta_i}$, $i = 1, \dots, N$, где N — число значений обрабатываемой функции. Введём статистику:

$$\rho_W(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \langle e_\theta, \tilde{f} \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{\theta_i} \tilde{f}_i. \quad (8)$$

Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации являются нелинейными алгоритмами, но, как и в линейных алгоритмах фурье-фильтрации [10], в качестве оценки для θ_{opt} примем вектор θ_W , для которого статистика $\rho_W(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$\vartheta_{m, \gamma/2} \leq \rho_W(\theta) \leq \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (9)$$

где $\vartheta_{m, \gamma/2}$, $\vartheta_{m, 1-\gamma/2}$ — квантили χ_m^2 -распределения с m степенями свободы уровней $\gamma/2$ и $1 - \gamma/2$ соответственно; γ — вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно $\gamma = 0,05$); $m = N$ — число значений фильтруемого сигнала (проекция вектора \tilde{f}). Если число степеней свободы $m > 30$ (в задачах фильтрации это всегда наблюдается), то χ_m^2 -распределение хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием m и дисперсией $2m$. Тогда, приняв вероятность ошибки первого рода $\gamma = 0,05$, получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (9):

$$\vartheta_{m, 0,025} = m - 1,96\sqrt{2m}; \quad \vartheta_{m, 0,975} = m + 1,96\sqrt{2m}. \quad (10)$$

Для нахождения вектора θ_W рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\theta) = |\rho_W(\theta) - m|^2 \quad (11)$$

при заданных ограничениях на проекции вектора θ . Для решения этой задачи можно использовать известные процедуры минимизации. В качестве θ_W принимается элемент $\{\theta^{(n)}\}$ минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (9).

Можно показать, что с учётом ортогональных вейвлетов статистика $\rho_W(\theta)$ вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_W(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - T(\tilde{d}_{j,k}, \theta)). \quad (12)$$

В алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений обработке подвергаются следующие детализирующие коэффициенты: горизонтальные $ad_{j,n,m}$, вертикальные $da_{j,n,m}$, диагональные $dd_{j,n,m}$. Тогда

$$\rho_W(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \left[\sum_{n,m} a\tilde{d}_{j,n,m} (a\tilde{d}_{j,n,m} - T(a\tilde{d}_{j,n,m}, \theta)) + \right.$$

$$+ \sum_{n,m} \tilde{d}a_{j,n,m} (\tilde{d}a_{j,n,m} - T(\tilde{d}a_{j,n,m}, \theta)) \Big] + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \left[\sum_{n,m} d\tilde{d}_{j,k} (d\tilde{d}_{j,n,m} - T(d\tilde{d}_{j,n,m}, \theta)) \right]. \quad (13)$$

Предложенные формулы позволяют вычислять значения $\rho_W(\theta)$ (необходимые в процедурах минимизации функционала (11)) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденном векторе θ_W и вычисленных коэффициентах разложения) только 1 раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения сигнала или изображения. Это существенно сокращает число вычислительных операций для нахождения вектора θ_W , особенно при фильтрации изображений.

Рассмотрим формирование вектора θ для конкретных пороговых функций. Для функции (5) вектор $\theta = \begin{pmatrix} \beta \\ C \end{pmatrix}$ и пороговые величины λ_1, λ_2 определим в виде

$$\lambda_1(\beta) = \beta \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (14)$$

$$\lambda_2(\beta, C) = \beta C \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (15)$$

где N_j — количество обрабатываемых коэффициентов j -уровня; множитель $C > 1$ следует из неравенства $\lambda_2 > \lambda_1$ для функции (5). Заметим, что множитель $\sqrt{2 \ln(N_j)}$ делает пороги уровневзависимыми и обеспечивает асимптотическую оптимальность пороговых величин по порядку при $N_j \rightarrow \infty$. Для функции (6) вектор $\theta = \begin{pmatrix} \beta \\ C \\ \alpha \end{pmatrix}$ и пороговые величины λ_1, λ_2 определим в виде (14), (15), а α принимает значения из интервала $[0, 1]$.

Вычисление оценок β_W, C_W, α_W для оптимальных значений $\beta_{\text{opt}}, C_{\text{opt}}, \alpha_{\text{opt}}$ осуществляется на основе минимизации функционала (11) при ограничениях

$$0 \leq \beta < \infty; \quad C > 1; \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (16)$$

Отметим некоторые свойства $\rho_W(\theta)$ для сформированных векторов θ (одномерный сигнал):

- все слагаемые, входящие в (12), не отрицательны (могут изменяться от 0 до $\tilde{d}_{j,k}^2$), поэтому $\rho_W(\theta) \geq 0$;
- при $\beta \rightarrow 0, C < \infty$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ справедлив предел $\rho_W(\theta) \rightarrow 0$;
- при $\beta \rightarrow \infty, C < \infty$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ справедлив предел

$$\rho_W \left(\begin{pmatrix} \beta \\ C \\ \alpha \end{pmatrix} \right) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2. \quad (17)$$

Выражение (17) имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее

Утверждение. Если выполняется неравенство

$$\rho_W \left(\begin{pmatrix} \infty \\ C \\ \alpha \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}^2 > \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (18)$$

то существуют конечные значения θ_W , для которых справедливо (9).

Невыполнение этого неравенства означает, что значения сигнала или изображения определяются только шумом измерения. В этом случае $\beta_W = \infty$ и сглаженные значения сигнала или изображения равны 0.

Аналогичные свойства и соответствующее утверждение можно сформулировать и для вейвлет-фильтрации изображений, где $\rho_W(\theta)$ задаётся выражением (13). При этом число степеней свободы m (10) определяется как $m = N_x \times N_y$, где N_x, N_y — размеры фильтруемого изображения.

Существенной чертой приведённого алгоритма вычисления θ_W является использование дисперсии шума σ^2 . Как правило, σ^2 неизвестна, и в этом случае можно применять оценку среднеквадратического отклонения

$$\hat{\sigma} = \text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)/0,6745, \quad (19)$$

где оператор $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$ вычисляет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов уровня разложения $j_0 + 1$. В работе [9] была показана приемлемая точность оценки (19). Так, для заданной дисперсии $\sigma^2 = 0,91 \cdot 10^{-1}$ значения оценки (19), вычисленные по 30 реализациям $\tilde{d}_{1,k}$ длиной 1024, находились в интервале $[0,88 \cdot 10^{-1}, 0,97 \cdot 10^{-1}]$.

Численные исследования многопараметрических пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации. Приведём некоторые результаты вычислительного эксперимента по исследованию эффективности предлагаемого подхода оптимизации многопараметрических пороговых функций.

В качестве тестовых были взяты изображения LENA (пример гладкого изображения) и TARGET (пример контрастного изображения) размером 256×256 пикселей (рис. 3, *a, b*). Изображение TARGET в спектре содержит высокочастотные составляющие, что существенно затрудняет фильтрацию шума. Моделируемый двумерный аддитивный шум измерения η_{i_1, i_2} подчиняется нормальному распределению, имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 для всех η_{i_1, i_2} и соседние отсчёты шума, не коррелированные друг с другом, т. е. шум измерения является белым. Дисперсия шума σ^2 задавалась по относительному уровню шума $\delta_\eta = \|\tilde{F} - F\|/\|F\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы, т. е. $\|F\| = \left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} F_{i_1, i_2}^2\right)^{1/2}$. Матрицы F, \tilde{F} размером 256×256 пикселей составлены из значений точного и зашумлённого изображений соответственно. В эксперименте задавались три уровня шума: 0,02, 0,05, 0,10. При выборе пороговых величин дисперсия σ^2 считалась

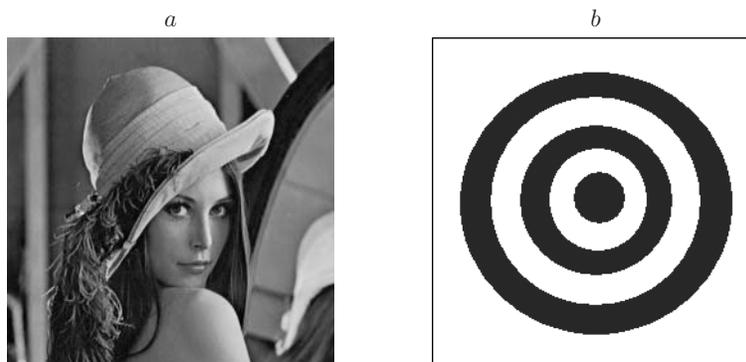


Рис. 3

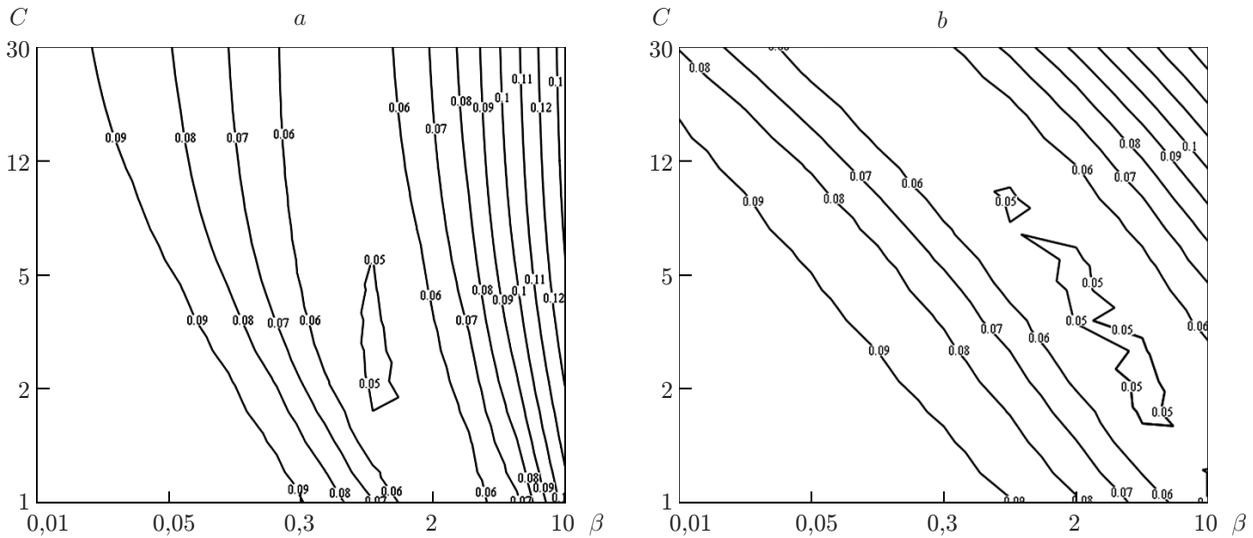


Рис. 4

неизвестной (эта ситуация часто имеет место на практике) и оценивалась с использованием выражения (19). В качестве критерия точности фильтрации изображения была принята относительная ошибка, определяемая выражением $\delta_F(\theta) = \|\hat{F}_\theta - F\|/\|F\|$, где \hat{F}_θ — результат фильтрации зашумлённого изображения.

Первоначально рассмотрим зависимость $\delta_F(\theta)$ от различных параметров пороговых функций (5), (6). На рис. 4, *a, b* показаны изолинии функционала $\delta_F(\beta, C)$, значения которого вычислены при уровне шума $\delta_\eta = 0,10$ для функций (5), (6) (параметр $\alpha = 0,10$). Видно, что у пороговой функции (5) ошибка фильтрации сильно зависит от β и значительно слабее от параметра C . Для пороговой функции (6) наблюдается зависимость ошибки фильтрации как от β , так и от C , что предъявляет более строгие требования к точности оценивания C_{opt} , и поэтому данная пороговая функция является менее предпочтительной по сравнению с функцией (5).

Кратко остановимся на результатах исследований минимально возможных относительных ошибок для функций (5), (6). Генерировалась матрица шума $\eta^{(l)}$ (l — номер шумовой реализации, или выборки) и для каждого зашумлённого изображения $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$, $l = 1, \dots, 50$, находились оптимальные параметры пороговых функций (5), (6) и соответствующие наименьшие (оптимальные) значения относительных ошибок фильтрации:

$$\delta_{\text{opt}}^{(l)} = \|\hat{F}_{\theta_{\text{opt}}}^{(l)} - F\|/\|F\|. \quad (20)$$

Нахождение таких величин возможно, поскольку в вычислительном эксперименте известно точное (незашумлённое) изображение F . Затем определялось отношение $O^{(l)} = \delta_{\text{opt}_{SS}}^{(l)}/\delta_{\text{opt}_C}^{(l)}$, где в числителе стоит величина наименьшей ошибки для функции (5), в знаменателе — для функции (6). Если это отношение меньше 1, то предпочтение отдаётся пороговой функции (5), в противном случае — функции (6). По выборочным величинам $O^{(l)}$ (объём выборки равен 50) находились наименьшее O_{min} , среднее \bar{O} и максимальное O_{max} значения. Эти числовые характеристики приведены в табл. 1 для трёх уровней шума и трёх значений α (функция (6)). Анализ таблицы показывает, что только для значений $\alpha \geq 0,9$ минимальные относительные ошибки фильтрации при использовании функций (5), (6) сопоставимы. Для всех других α более предпочтительной является функция (5). Учитывая, что данная функция требует для своего вычисления ещё и меньше операций (что

Таблица 1

δ_η	α	Изображение LENA			Изображение TARGET		
		O_{\min}	\bar{O}	O_{\max}	O_{\min}	\bar{O}	O_{\max}
0,02	0,2	0,743	0,811	0,911	0,758	0,805	0,857
	0,5	0,801	0,862	0,971	0,799	0,843	0,891
	0,9	0,971	0,986	0,992	0,970	0,989	0,994
0,05	0,2	0,813	0,866	0,923	0,793	0,831	0,871
	0,5	0,863	0,909	0,982	0,816	0,865	0,908
	0,9	0,978	0,995	1,005	0,972	0,992	0,999
0,10	0,2	0,888	0,945	0,982	0,848	0,893	0,941
	0,5	0,921	0,935	0,996	0,869	0,914	0,958
	0,9	0,981	1,002	1,011	0,979	0,999	1,006

особенно важно при фильтрации изображений), окончательный выбор следует сделать в пользу пороговой функции (5), которая зависит только от двух параметров.

Перейдём к исследованию эффективности оценивания оптимальных параметров пороговых функций предложенным алгоритмом на основе минимизации функционала (11). Заметим, что величина относительной ошибки фильтрации $\delta_F(\theta) = \|\hat{F}_\theta - F\|/\|F\|$ является случайной (в силу статистической природы шума измерения). Поэтому для определения неслучайных характеристик точности был проведён следующий вычислительный эксперимент.

Коэффициент эффективности оценки θ_W для θ_{opt} определим выражением

$$E = \delta_{\min}/\delta_F(\theta_W). \quad (21)$$

Очевидно, что чем больше E отклоняется от 1 к 0, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметрами θ_W по сравнению с минимально возможной (для данного зашумлённого изображения \tilde{F}) ошибкой δ_{\min} (алгоритм фильтрации с параметрами θ_{opt}).

Для вычисления оценок числовых характеристик и построения гистограммы случайной величины E генерировались (как описано выше) зашумлённые изображения $\tilde{F}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 50$. Для каждого изображения $\tilde{F}^{(l)}$ определялись: $\delta_{\min}^{(l)}$, $\delta_F^{(l)}(\theta_{W_{SS}})$ (пороговая функция (5)), $\delta_F^{(l)}(\theta_{W_C})$ (пороговая функция (6) при $\alpha = 0,9$) и коэффициенты эффективности $E_{SS}^{(l)} = \delta_{\min}^{(l)}/\delta_F^{(l)}(\theta_{W_{SS}})$, $E_C^{(l)} = \delta_{\min}^{(l)}/\delta_F^{(l)}(\theta_{W_C})$. Для каждой выборочной совокупности $\{E_{SS}^{(l)}\}$,

Таблица 2

δ_η	Изображение LENA			Изображение TARGET		
	E_{\min}	\bar{E}	E_{\max}	E_{\min}	\bar{E}	E_{\max}
0,02	0,785	0,945	1	0,831	0,948	1
	0,746	0,879	1	0,812	0,925	0,976
0,05	0,813	0,961	1	0,873	0,965	1
	0,797	0,929	1	0,857	0,932	0,989
0,10	0,831	0,976	1	0,946	0,991	1
	0,781	0,942	1	0,928	0,969	1

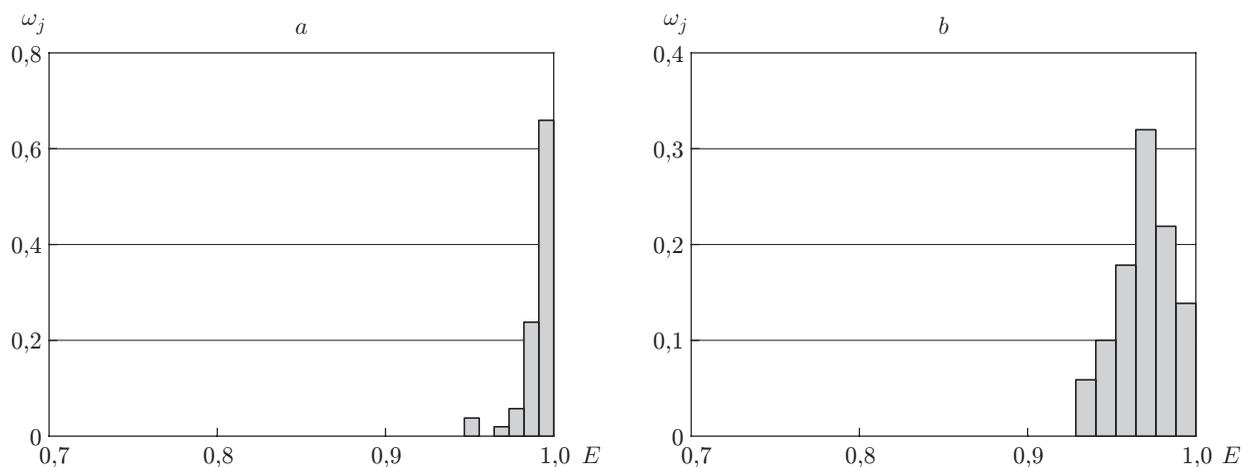


Рис. 5

$\{E_C^{(l)}\}$ определялись соответствующие числовые характеристики: среднее \bar{E} , минимальное E_{\min} , максимальное E_{\max} значения — и строилась гистограмма относительных частот (т. е. вычислялись отношения $\omega_j = n_j/50$, где n_j — количество значений коэффициента эффективности, попавших в j -й интервал гистограммы). В табл. 2 приведены числовые характеристики коэффициента эффективности для разных уровней шума и разных изображений. Выделенные значения соответствуют относительной ошибке фильтрации с использованием пороговой функции (6), остальные — пороговой функции (5).

Анализ средних значений \bar{E} показывает, что предложенный подход к выбору параметров пороговых функций позволяет достаточно точно оценить оптимальные значения для функций (5) и (6). Так, отклонение среднего значения коэффициента эффективности от 1 для функции (5) не превосходит 6%. Для функции (6) такое отклонение выше (на уровне 9–12%). Дополнительно заметим, что для некоторых уровней шума максимальное значение E_{\max} функции (6) не равняется 1. Всё это подтверждает ранее высказанный тезис о предпочтительности пороговой функции (5), на что также указывают гистограммы, приведённые на рис. 5, *a* (случайная величина E_{SS}) и рис. 5, *b* (случайная величина E_C), построенные для изображения TARGET при уровне шума 0,1. Видно, что для пороговой функции (6) значения коэффициента эффективности в большей степени отклоняются от 1, что свидетельствует о меньшей точности оценивания оптимальных параметров этой функции.

Заключение. Результаты численных исследований показали, что предложенный в данной работе подход к выбору пороговых величин позволяет с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги как для пороговой функции (5), так и для функции (6). Однако использование двухпараметрической функции (5) в пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации является более предпочтительным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.
2. Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989. **11**, N 9. P. 674–693.
3. Gao H.-Y., Bruce A. G. Waveshrink with firm shrinkage // Statist. Sinica. 1997. **7**, N 4. P. 855–874.

4. **Yoon B. J., Vaidyanathan P. P.** Wavelet-based denoising by customized thresholding // Proc. of the IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Montreal, Canada, 17–21 May, 2004. P. 925–928.
5. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Оценивание оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 2. С. 3–14.
6. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68–77.
7. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 186 с.
8. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2007. 184 с.
9. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Построение алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями // Автометрия. 2012. **48**, № 1. С. 12–22.
10. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В., Колкер А. Б.** Фильтрации сигналов и изображений: фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 188 с.

Поступила в редакцию 13 января 2014 г.
