УДК 532.135

ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ПУАЗЕЙЛЯ НА ОСНОВЕ РЕОЛОГИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

И. Э. Головичева, Г. В. Пышнограй, В. И. Попов*

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, 656099 Барнаул
* Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Методом возмущений по малому параметру, определяющему анизотропию свойств линейных полимеров, получены профиль скорости и расход для стационарного течения в круглой трубе. Показано, что для рассматриваемой четырехпараметрической реологической модели напряженное состояние течения Пуазейля наряду с касательным напряжением сдвига характеризуется первой и второй разностью нормальных напряжений.

В настоящее время полимеры находят все более широкое применение в добывающих и перерабатывающих отраслях промышленности. При этом технологии получения изделий из полимерных материалов непрерывно меняются. Поэтому изучение технологических процессов переработки полимеров — важная практическая задача. Для ее решения необходима математическая формулировка законов поведения полимерных жидкостей в различных узлах технологического оборудования. Полимерные жидкости (растворы, расплавы полимеров) наделены сложной внутренней структурой, вследствие этого в зависимости от условий деформирования они способны проявлять нелинейно-вязкие свойства, частично запасать подводимую извне энергию и релаксировать напряжения.

В случае течения растворов и расплавов линейных полимеров закон их поведения формулируется в виде реологического определяющего соотношения, описывающего нелинейно-вязкоупругие свойства полимерных жидкостей. Однако единого реологического определяющего соотношения для описания различных режимов течения полимерных сред до сих пор не получено. Поэтому важно на основе расчета тестовых примеров различной сложности проверить соответствие существующих реологических моделей реальным течениям полимерных жидкостей. Наиболее простыми являются вискозиметрические течения: чистый сдвиг и одноосное растяжение. В работах [1–3] предложена и изучена реологическая модель, полученная как нулевое приближение по малым молекулярным параметрам теории микровязкоупругости линейных полимеров. Уравнения этой модели имеют вид

$$\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\nu_{ik}\Big)=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+F_k,\qquad \frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0,$$

$$\frac{d\xi_{ij}}{dt}-\nu_{ik}\xi_{kj}-\nu_{jk}\xi_{ki}=-\frac{1}{\tau}\Big(\xi_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\Big)-\frac{3\beta}{\tau_0}\Big(\xi_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\Big)\Big(\xi_{kj}-\frac{1}{3}\delta_{kj}\Big), \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+3\frac{\eta_0}{\tau_0}\Big(\xi_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\Big);$$

$$\tau=\frac{\tau_0}{1+(\varkappa-\beta)D},\qquad D=\frac{\tau_0}{\eta_0}(\sigma_{ii}+3p). \tag{2}$$

Здесь p — давление; t — время; σ_{ij} и $\nu_{ik}=\partial v_i/\partial x_k$ — тензоры напряжений и градиентов скорости; ξ_{ik} — тензорный внутренний термодинамический параметр; ρ — плотность среды; η_0 и τ_0 — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации; $æ$ и β — параметры анизотропии подвижности, учитывающие [1–3] влияние объема и формы макромолекулярных клубков на динамику макромолекулы; D — первый инвариант тензора дополнительных напряжений.

В работах [1–3] продемонстрировано хорошее соответствие теоретических зависимостей стационарных вискозиметрических функций при простом сдвиге и экспериментальных данных для ряда растворов и расплавов линейных полимеров. Поэтому в [1–3] реологическая модель (1) рекомендована в качестве базовой при проведении инженерных расчетов, однако это требует рассмотрения более сложных, чем осуществляемые в вискозиметрах, течений, например стационарного течения в гладкой круглой трубе под действием постоянного перепада давления. В этом случае систему уравнений (1) удобно записать в цилиндрической системе координат. С помощью формул ковариантного дифференцирования компонент тензоров [4] в стационарном случае получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{3\eta_0}{\tau_0}\left(\frac{\partial \xi_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\xi_{rr}-\xi_{\varphi\varphi}}{r}+\frac{\partial \xi_{rz}}{\partial z}\right),\quad \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\frac{3\eta_0}{\tau_0}\left(\frac{\partial \xi_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{2}{r}\xi_{r\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \xi_{\varphi z}}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{3\eta_0}{\tau_0}\left(\frac{\partial \xi_{rz}}{\partial r}+\frac{\xi_{rz}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \xi_{rz}}{\partial z}\right),\qquad \frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,\\
-2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\xi_{rr}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\xi_{r\varphi}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\xi_{rz}\right)=-\frac{1}{\tau}\left(\xi_{rr}-\frac{1}{3}\right)-\frac{3\beta}{\tau_0}\left[\left(\xi_{rr}-\frac{1}{3}\right)^2+\xi_{r\varphi}^2+\xi_{rz}^2\right],\\
\left(\frac{v_\varphi}{r}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)\xi_{rr}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\xi_{r\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\xi_{rz}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\xi_{\varphi\varphi}-\frac{\partial v_r}{\partial z}\xi_{\varphi z}=\\
=-\frac{1}{\tau}\xi_{r\varphi}-\frac{3\beta}{\tau_0}\left[\left(\xi_{rr}-\frac{1}{3}\right)\xi_{r\varphi}+\xi_{r\varphi}\left(\xi_{\varphi\varphi}-\frac{1}{3}\right)+\xi_{rz}\xi_{\varphi z}\right],\\
-\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\xi_{rz}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\xi_{rr}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\xi_{r\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\xi_{\varphi z}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\xi_{zz}\right]= \qquad (3)\\
=-\frac{1}{\tau}\xi_{rz}-\frac{3\beta}{\tau_0}\left[\left(\xi_{rr}-\frac{1}{3}\right)\xi_{rz}+\xi_{r\varphi}\xi_{\varphi z}+\xi_{rz}\left(\xi_{zz}-\frac{1}{3}\right)\right],\\
2\left[\left(\frac{v_\varphi}{r}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)\xi_{r\varphi}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_r\right)\xi_{\varphi\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\xi_{z\varphi}\right]=-\frac{1}{\tau}\left(\xi_{\varphi\varphi}-\frac{1}{3}\right)-\frac{3\beta}{\tau_0}\left[\xi_{r\varphi}^2+\left(\xi_{\varphi\varphi}-\frac{1}{3}\right)^2+\xi_{\varphi z}^2\right],\\
-2\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\xi_{rz}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\xi_{\varphi z}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\xi_{zz}\right)=-\frac{1}{\tau}\left(\xi_{zz}-\frac{1}{3}\right)-\frac{3\beta}{\tau_0}\left[\xi_{rz}^2+\xi_{\varphi z}^2+\left(\xi_{zz}-\frac{1}{3}\right)^2\right],\\
\left(\frac{v_\varphi}{r}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)\xi_{rz}+\frac{\partial v}{\partial r}\xi_{\varphi z}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\xi_{zz}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\xi_{r\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\xi_{\varphi\varphi}=\\
=-\frac{1}{\tau}\xi_{\varphi z}-\frac{3\beta}{\tau_0}\left[\xi_{r\varphi}\xi_{rz}+\left(\xi_{\varphi\varphi}-\frac{1}{3}\right)\xi_{\varphi z}+\xi_{\varphi z}\left(\xi_{zz}-\frac{1}{3}\right)\right].
\end{gathered}
$$

Здесь первый инвариант тензора дополнительных напряжений теперь рассчитывается по формуле

$$
D=3(\xi_{rr}+\xi_{\varphi\varphi}+\xi_{zz}-1). \qquad (4)
$$

Заметим, что нестационарные уравнения, которые также представляют практический интерес, могут быть получены из (3) дописыванием соответствующих членов из [5]. Далее полагаем, что вектор массовых сил $\boldsymbol{F}$ равен нулю.

В случае $\beta = 0$ решение (3), (4) сведется к результатам, полученным ранее в [5] на основе структурно-феноменологической модели Покровского. Будем искать осесимметричное, не зависящее от координаты z решение системы уравнений (2)–(4). Так как, согласно приведенным в [2, 3] оценкам, можно считать, что $\beta \ll 1$, то ищем это решение с точностью до членов первого порядка по β:

$$v_r = v_r^0+\beta v_r', \qquad v_\varphi = v_\varphi^0+\beta v_\varphi', \qquad v_z = v_z^0+\beta v_z', \qquad \xi_{rr} = \xi_{rr}^0+\beta\xi_{rr}', \qquad \xi_{r\varphi} = \xi_{r\varphi}^0+\beta\xi_{r\varphi}',$$

$$\xi_{rz} = \xi_{rz}^0 + \beta\xi_{rz}', \qquad \xi_{\varphi\varphi} = \xi_{\varphi\varphi}^0 + \beta\xi_{\varphi\varphi}', \qquad \xi_{\varphi z} = \xi_{\varphi z}^0 + \beta\xi_{\varphi z}', \qquad \xi_{zz} = \xi_{zz}^0 + \beta\xi_{zz}'.$$

Здесь индекс 0 соответствует нулевому приближению по β, а штрих — первому. Заметим, что решение нулевого приближения получено в [5] и имеет вид

$$v_z = u(r) = \frac{A}{4\eta_0}(R^2 - r^2)\Big[1 + \frac{æA^2\tau_0^2}{4\eta_0^2}(R^2 + r^2)\Big], \qquad \xi_{rz}^0 = \xi_1(r) = -\frac{\tau_0}{3\eta_0}\,\frac{A}{2}\,r,$$

$$v_r^0 = v_\varphi^0 = \xi_{r\varphi}^0 = \xi_{z\varphi}^0 = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -A = \mathrm{const}\,, \qquad \xi_{rr}^0 = \xi_{\varphi\varphi}^0 = \frac{1}{3}, \qquad \xi_{zz}^0 = \frac{1}{3}(1 + D),$$

следовательно,

$$v_r = \beta v_r', \quad v_\varphi = \beta v_\varphi', \quad v_z = u(r) + \beta v_z', \quad D = D(r), \quad \xi_{rr} = \frac{1}{3} + \beta\xi_{rr}', \quad \xi_{r\varphi} = \beta\xi_{r\varphi}',$$
$$\xi_{rz} = \xi_1(r) + \beta\xi_{rz}', \qquad \xi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3} + \beta\xi_{\varphi\varphi}', \qquad \xi_{\varphi z} = \beta\xi_{\varphi z}', \qquad \xi_{zz} = \frac{1}{3}(1 + D) - \beta(\xi_{rr}' + \xi_{\varphi\varphi}'), \tag{5}$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -A = \mathrm{const}\,.$$

С учетом (5) запишем систему уравнений (3), (4) с точностью до членов первого порядка по коэффициенту анизотропии β:

$$\frac{3\eta_0}{\tau_0}\Big(\frac{d\xi_{rr}'}{dr} + \frac{\xi_{rr}' - \xi_{\varphi\varphi}'}{r}\Big) = \frac{\partial p}{\partial r}; \tag{6}$$

$$\frac{d\xi_{r\varphi}'}{dr} + \frac{2}{r}\,\xi_{r\varphi}' = 0; \tag{7}$$

$$\frac{3\eta_0}{\tau_0}\Big(\frac{d\xi_{rz}}{dr} + \frac{\xi_{rz}}{r}\Big) = -A; \tag{8}$$

$$\frac{dv_r'}{dr} + \frac{v_r'}{r} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{1}{\tau}\,\xi_{rr}' + \frac{3}{\tau_0}\,\xi_1^2(r) = 0; \tag{10}$$

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{v_\varphi'}{r} - \frac{dv_\varphi'}{dr}\Big) = -\frac{1}{\tau}\,\xi_{r\varphi}'; \tag{11}$$

$$-\beta\,\frac{dv_r'}{dr}\,\xi_1(r) - \frac{dv_z}{dr}\,\xi_{rr} = -\frac{1}{\tau}\,\xi_{rz} - \frac{3\beta}{\tau_0}\,\xi_1(r)\Big(\xi_{zz} - \frac{1}{3}\Big); \tag{12}$$

$$\frac{2}{3r}\,v_r' = \frac{1}{\tau}\,\xi_{\varphi\varphi}'; \tag{13}$$

$$-2\frac{dv_z}{dr}\xi_{rz} = \frac{1}{\tau}\Big(\xi_{zz} - \frac{1}{3}\Big) - \frac{3\beta}{\tau_0}\Big[\xi_1^2(r) + \Big(\xi_{zz} - \frac{1}{3}\Big)^2\Big], \quad \Big(\frac{v_\varphi'}{r} - \frac{dv_\varphi'}{dr}\Big)\xi_1(r) - \frac{dv_z}{dr}\xi_{r\varphi}' = -\frac{1}{\tau}\xi_{\varphi z}'. \tag{14}$$

Так как из уравнения (7) следует, что $\xi'_{r\varphi} = C/r^2$, то v'_φ может быть получено из (11): $v'_\varphi = Kr - 3C/(2\tau r)$.

Уравнение неразрывности (9) дает $v'_r = M/r$. Тогда формула (13) запишется в виде $\xi'_{\varphi\varphi} = 2\tau M/(3r^2)$.

Постоянные C, K и M определяются из граничных условий. Получаем $\xi'_{r\varphi} = \xi'_{\varphi\varphi} = \xi'_{\varphi z} = v'_r = v'_\varphi = 0$.

Из уравнения движения (8) находим выражение для ξ_{rz}:

$$\xi_{rz} = \frac{\tau_0}{3\eta_0}\Big(- \frac{A}{2} r + \frac{B}{r}\Big),$$

т. е. $\xi_{rz} = \xi_1(r)$, $\xi'_{rz} = 0$. Из условия ограниченности сдвигового напряжения на оси симметрии трубы имеем $B = 0$.

Таким образом,

$$\xi_1(r) = -\frac{A\tau_0}{6\eta_0} r. \tag{15}$$

Из (10) может быть получена формула

$$\xi'_{rr} = -\frac{3\tau}{\tau_0}\xi_1^2, \qquad \xi_{rr} = \frac{1}{3} - \beta \frac{3\tau}{\tau_0}\xi_1^2. \tag{16}$$

Следствием релаксационных уравнений (12) и (14) являются соотношения

$$-\frac{dv_z}{dr}\xi_{rr} = -\frac{1}{\tau}\xi_1(r) - \frac{3\beta}{\tau_0}\xi_1(r)\Big(\xi_{zz} - \frac{1}{3}\Big), \quad -2\frac{dv_z}{dr}\xi_1(r) = -\frac{1}{\tau}\Big(\xi_{zz} - \frac{1}{3}\Big) - \frac{3\beta}{\tau_0}\Big[\xi_1^2(r) + \Big(\xi_{zz} - \frac{1}{3}\Big)^2\Big],$$

которые с учетом $\tau = \tau_0$ с точностью до членов нулевого порядка по $æ$ и β могут быть записаны как

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\tau_0}\frac{\xi_1(r)}{\xi_{rr}}(1 + \beta D), \qquad \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{2\tau_0}\frac{1}{\xi_1(r)}\Big(\frac{D}{3} - \beta\xi'_{rr} + 3\beta\xi_1^2(r) + \frac{\beta D^2}{3}\Big).$$

Таким образом, получаем формулу для v_z

$$-v_z = \frac{1}{\tau_0}\int_r^R \frac{\xi_1(r)}{\xi_{rr}}\Big[1 + \beta D(r)\Big] dr \tag{17}$$

и квадратное уравнение для D

$$\beta D^2 + (1 + 3\beta\xi'_{rr} - 18\xi_1^2)D + 9\beta\xi_1^2 - 3\beta\xi'_{rr} - 18\xi_1^2 = 0,$$

решение которого при малых β имеет вид

$$D = 18\xi_1^2. \tag{18}$$

Подставляя (15), (16) и (18) в формулу (17), получим

$$v_z = \frac{A}{4\eta_0}(R^2 - r^2)\Big[1 + \frac{æA^2\tau_0^2}{4\eta_0^2}(R^2 + r^2) + \beta\frac{A^2\tau_0^2}{24\eta_0^2}(R^2 + r^2)\Big]. \tag{19}$$

Отсюда следует, что наблюдаемое в экспериментах [6] отклонение профиля скорости от параболического связано с параметрами реологической модели $æ$ и β. Произведенные по формуле (19) расчеты показали, что при варьировании β и $æ$ от 0 до 1 отклонение профиля скорости от параболического достигает 5–10 %. Таким образом, выполненное с достаточной точностью измерение профиля скорости может служить основой для определения параметров модели $æ$ и β.

Из уравнения (6) установим наличие ненулевого перепада давления в радиальном направлении:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3A^2\tau_0\beta}{4\eta_0}\, r. \qquad (20)$$

Однако перепад давления не приводит к возникновению течения в этом направлении. Возможно, с ростом градиента давления в аксиальном направлении стационарное решение уравнений станет неустойчивым, что приведет к появлению вторичных течений. Такой расчет даже для сред, описываемых уравнениями Навье — Стокса, представляет значительные трудности.

Давление $p(r,z) = p(z) + \beta p(r)$ находим интегрированием (6) и (20):

$$p = -Az - \beta\,\frac{3A^2\tau_0}{8\eta_0}\, r^2 + p_0. \qquad (21)$$

Выражение для объемного расхода $Q = 2\pi\rho \int\limits_0^R r v_z\, dr$ принимает вид

$$Q = \frac{\pi\rho A}{8\eta_0}\, R^4\Big(1 + \frac{A^2\tau_0^2 æ}{3\eta_0^2}\, R^2 + \beta\,\frac{A^2\tau_0^2}{18\eta_0^2}\, R^2\Big). \qquad (22)$$

Первая и вторая разности нормальных напряжений для рассматриваемого класса течений равны

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{A^2\tau_0}{2\eta_0}\, r^2 + \beta\,\frac{A^2\tau_0}{2\eta_0}\, r^2; \qquad (23)$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\beta\,\frac{A^2\tau_0}{4\eta_0}\, r^2. \qquad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что $\sigma_2/\sigma_1 = -\beta/2$ с точностью до членов первого порядка по β, т. е. оказывается таким же, как и в случае стационарного течения Куэтта [1–3].

Слагаемые без β и $æ$ в (19) и (22) известны для вязкой жидкости, а с β и $æ$ дают поправку на неньютоновское вязкоупругое поведение. При этом для $\beta = 0$ из (19) и (22) следуют формулы, указанные ранее в [5]. Полученные соотношения можно использовать для определения материальных постоянных η_0, τ_0 и β, $æ$ по экспериментальной зависимости расхода от приложенного градиента давления.

Уравнения (5), (15), (16), (18)–(21), (23), (24) могут быть использованы и при расчетах более сложных течений, чем течение Пуазейля, например вынужденного течения между двумя коаксиальными цилиндрами, когда один из цилиндров (например, внешний) неподвижен, а внутренний перемещается вдоль своей оси с постоянной скоростью, или течения, возникающего в кольцевом канале, образованном двумя неподвижными концентрическими цилиндрами, под действием заданного перепада давления. При этом, если по-прежнему предполагать, что движение установившееся прямолинейное и осесимметричное, то все постоянные можно найти из граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пышнограй Г. В., Покровский В. Н., Яновский Ю. Г. и др.** Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих полимерных сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствие для сдвига и растяжения // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 5. С. 612–615.

2. **Пышнограй Г. В.** Начальное приближение в теории микровязкоупругости линейных полимеров и нелинейные эффекты на его основе // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 145–151.
3. **Алтухов Ю. А., Пышнограй Г. В.** Микроструктурный подход в теории течения линейных полимеров и нелинейные эффекты на его основе // Высокомолекуляр. соединения. Сер. А. 1996. Т. 38, № 7. С. 1185–1193.
4. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т. 1.
5. **Эренбург В. Б., Покровский В. Н.** Неоднородные сдвиговые течения линейных полимеров // Инж.-физ. журн. 1981. Т. 41, № 3. С. 449–456.
6. **Чанг Дей Хан.** Реология в процессах переработки полимеров. М.: Химия, 1979.

Поступила в редакцию 29/VII 1997 г.,
в окончательном варианте — 13/I 1998 г.