

УДК 004.922

А. М. Ковалев

(Новосибирск)

## О НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ВИЗУАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

Предложена нелинейная модель пространства, возникающего в сознании человека при зрительном восприятии предметов в окружающем его евклидовом пространстве. Обнаружено совпадение нелинейной модели визуального пространства с моделью пространства Лобачевского по Клейну. Показано, что оба пространства – Евклида и Лобачевского – взаимно однозначно связаны.

Введение. В работах [1, 2] предложена и исследована линейная модель визуально воспринимаемого (перцептивного) пространства. Дана оценка искажений предметов при отображении визуального пространства на картинную плоскость. Показано, что наибольшими погрешностями обладает классическая, или ренессансная, перспектива, в основе которой лежит геометрическая оптика. Найден вариант перцептивной перспективы, достоверно передающий глубину пространства и обладающий наименьшими искажениями при расположении картинной плоскости в средней по удаленности от наблюдателя зоне. Достоинство линейной модели – простота реализации в компьютерной графике [3]. Однако построенная модель является лишь первым приближением к натуральному визуальному пространству. Она адекватна большим расстояниям до предметов и малым полям зрения. В данной работе рассматривается построение более общей нелинейной модели, работающей при больших полях зрения.

Экспериментальное определение линий, кажущихся параллельными. Прообразом параллельного пучка визуальных прямых (рис. 1, *a*) является расходящийся пучок лучей в пространстве предметов (рис. 1, *b*). Нами была поставлена задача – определить, является ли последний пучок гомоцентрическим. На горизонтальной дороге (см. рис. 1, *b*) на одной из боковых сторон, имеющей строго прямолинейную и четко видимую границу *OZ*, в точке *O* стоит наблюдатель. На некотором среднем расстоянии от наблюдателя (~ 6 м) перпендикулярно границе *OZ* проведена линия *ии*. Прямая *OZ* «лежит» в медиальной плоскости головы и является фиксированной. Другая прямая *BC* – подвижна, она появляется на земле путем проекции из центра *A* линейки, которую держит в руке наблюдатель.

На первом этапе эксперимента определялись параллельные, проходящие через удаленные точки *B* за линией *ии*. При помощи верхнего конца линейки наблюдатель визирует переносный четко видимый «точечный» знак *B* и,

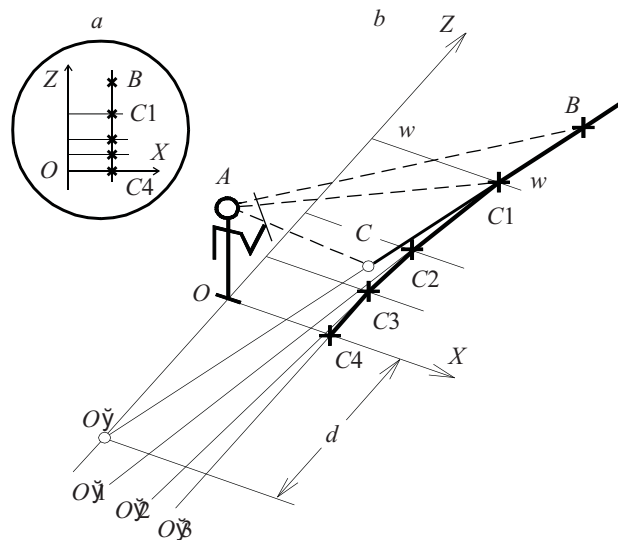


Рис. 1. Опытное определение линий, видимых параллельными: визуальное пространство (а), пространство предметов (b)

отклоняя нижний конец линейки, устанавливает прямую  $BC$  параллельно  $OZ$  в визуальном пространстве (см. рис. 1, а). Затем он указывает помощнику, где зафиксировать точку  $C1$  прямой  $BC$  на перпендикуляре  $ww$  в пространстве предметов с помощью второго переносного точечного знака. В завершение опыта через точки  $B$  и  $C1$  проводится прямая до пересечения с продолжением линии  $OZ$  в точке  $O$ , которая оказывается за спиной наблюдателя.

В эксперименте приняло участие пять человек. Каждому из них было предложено ограниченное множество произвольно расположенных точек  $B$  на различных удалениях (10–100 м) за линией  $ww$  в пределах небольшого поля зрения (10–15°). Эксперимент проводился для разных уровней глаз относительно земли. В результате были выявлены следующие закономерности зрительного восприятия:

- 1) прямые, кажущиеся параллельными линии  $OZ$  и проходящие через произвольно расположенные точки  $B$  на земле, пересекаются в одной и той же (с небольшими отклонениями в несколько сантиметров) точке  $O$ , расположенной за наблюдателем на расстоянии  $OO' = d$ ;
- 2) положение точки пересечения не зависит от уровня глаз относительно земли;
- 3) расстояние  $d$  является личной константой наблюдателя (в эксперименте эта константа варьировала от 3 до 6 м).

На втором этапе эксперимента, после того как была определена прямая  $OB$  и сделана засечка  $C1$  на перпендикуляре  $ww$ , расстояние до перпендикуляра уменьшили примерно вдвое и сделали «параллельную» проекцию точки  $C1$ . Теперь прямая  $OC1$ , параллельная  $OZ$ , пересекла новый перпендикуляр в точке  $C2$ . Установлен факт, что по мере уменьшения расстояния  $z$  точка  $O$  перемещается в направлении к... Построенная линия  $BC4$  имеет с прямой  $OZ$  общий перпендикуляр  $OC4$ , всюду кажется параллельной  $OZ$

(см. рис. 1, *a*), но в действительности с ней расходится. Такое возможно только при неевклидовой геометрии визуального пространства.

Отметим, что в нашем эксперименте фиксация точки и прослеживание следа линейки на земле были монокулярными. Эти операции, подобно прицеливанию, невозможно выполнить бинокулярно, поскольку возникает двоение изображений. Далее при прослеживании линии от точки В до С 4, т. е. при больших угловых перемещениях (до 90° в сторону С 4), возникает вращение глаз, сопровождаемое неоднократным поворотом головы. С нашей точки зрения, именно таким движениям глаз следует придать значение при формировании пространства изображений.

Линейная модель визуального пространства. На основе результатов первого этапа эксперимента в [2] построена и исследована линейная модель, для которой характерно проективное преобразование вида

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{P} \frac{z_0 - d}{z - d} = \mathbf{P} f_p(z), \quad (1)$$

где  $\mathbf{P}_p = [x_p, y_p, z_p]$  – радиус-вектор точки пространства изображения;  $\mathbf{P} = [x, y, z]$  – радиус-вектор точки пространства предметов;  $z_0$  – расстояние до виртуальной картинной плоскости;  $f_p(z)$  – функция проективного преобразования.

В работе [2] показано, что положение картинной плоскости  $z_0$  задает масштаб объемного изображения. Функцию проективного преобразования из (1) можно переписать следующим образом:

$$f_p(z) = \frac{d}{z - d} \left( 1 - \frac{z_0}{d} + \frac{d}{z - d} m \right), \quad (2)$$

где  $m = 1 - z_0/d$  – масштабный коэффициент. Расстояние до точки  $\mathbf{P}_p$  в визуальном пространстве из (1) с учетом (2)  $z_p(z) = z d m / (z - d)$  или

$$\frac{m}{z_p(z)} = \frac{1}{f} = \frac{1}{z} - \frac{1}{d}, \quad (3)$$

где  $f$  – фокусное расстояние в классической «формуле тонкой линзы», а  $d$  играет роль расстояния до изображения. Формула описывает редуцированную модель аккомодирующего глаза, в которой исключены постоянные преломляющие силы (40 дптр роговицы и 20 дптр хрусталика). Они не участвуют в определении дальности до предметов и необходимы только для уменьшения длины глаза. Для сравнения здесь уместно привести упрощенную формулу оптической силы глаза из работы [4]:

$$\frac{1}{z} = \frac{n}{L},$$

где  $n = 1,416$  – показатель преломления;  $L = 23,4$  мм – длина глаза. При  $z = 60,5$  дптр.

Итак, формируя визуальное пространство, зрительная сенсорная система работает с переменным фокусным расстоянием  $f = z_p(z)/m$  из (3). При

восприятию предметов на бесконечности  $f \rightarrow d$ , а  $z_p(\infty) \rightarrow dm$ . Таким образом, во-первых, личностная константа наблюдателя  $d$ , определенная в эксперименте, приобретает смысл гиперфокального расстояния или начала бесконечности [5]. При диаметре зрачка  $D = 3$  мм и угловой разрешающей способности глаза  $\alpha = 2-4$  гиперфокальное расстояние  $d = D/\alpha = 2,6-5,2$  м, что согласуется с результатами эксперимента. Во-вторых, визуальное пространство на модели оказывается ограниченным по дальности величиной  $z_p(\infty) = dm - z_0 - d$ . Величина  $z_0$  является психометрической константой и играет роль масштабирования пространства для естественности восприятия.

Нелинейная модель визуального пространства. Основой для построения модели являются:

- а) опытные данные второго этапа эксперимента;
- б) аккомодационные свойства глаза, представленные редуцированной моделью согласно (3);
- в) вращательные движения глаза, которые подробно рассмотрены в [6].

Пусть пространство предметов задано в декартовой прямоугольной системе координат, начало которой совпадает с центром вращения глаза. Главной осью считается ось  $OZ$ , которая перпендикулярна линии неподвижных плеч наблюдателя, параллельных оси  $OX$  (см. рис. 1). Через радиус-вектор любой точки пространства  $\mathbf{P} = [x, y, z]$  проходит луч, принадлежащий гомоцентрическому пучку проекции с центром в начале координат. При фиксации точки  $P$  зрительная ось глаза проходит через эту точку, а вдоль оси происходит «наводка на резкость» в соответствии с (3). Тогда проективное преобразование пространства предметов будет подобно (1):

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{P} \frac{c}{r - d} = \mathbf{P} f_S(r), \quad (4)$$

где  $\mathbf{P}_S = [x_S, y_S, z_S]$  – радиус-вектор точки пространства изображений;  $c = r_0 - d$  – радиус сферы, которая ограничивает пространство изображений;  $r_0$  – психометрическая константа, подобная  $z_0$  из (1);  $r = |\mathbf{P}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – полярный радиус точки пространства предметов;  $f_S(r)$  – функция проективного преобразования. Пусть  $r_S = |\mathbf{P}_S|$  – полярный радиус точки пространства изображений, тогда для полярных радиусов из (4) следует

$$r_S = \frac{rc}{r - d}. \quad (5)$$

При малых полях зрения, когда  $r \rightarrow z$ , линейное преобразование (1) мало отличается от нелинейного (4) или (5). Поэтому свойства линейной перцептивной перспективы справедливы для рабочего поля глаза вокруг зрительной оси. Отличие состоит в том, что вращение зрительной оси перемещает малое рабочее поле зрения, формируя пространство изображений внутри шара с радиусом  $r_S(\infty) = c$ .

Проведем теоретический «эксперимент» с линиями, кажущимися параллельными на малых расстояниях, как на рис. 1. Пусть, как и в натурном эксперименте, главная ось параллельна оси  $OZ$ , а линия плеч наблюдателя параллельна оси  $OX$ . Пусть уровень глаз относительно земли  $y = h$ . Задача:

определить линию на земле, которая воспринимается параллельной оси  $OZ$ ; видимая ширина линии  $w$   $c$ .

Воспользуемся преобразованием (4) для определения абсциссы  $x_s$  прямой в пространстве изображений:

$$x_s = w \frac{xc}{\sqrt{x^2 + h^2 + z^2 + d}}. \quad (6)$$

Раскрывая (6), получим уравнение для линии второго порядка:

$$[c^2 - w^2]x^2 - w^2z^2 - 2cdwx - (d^2 - h^2)w^2 = 0. \quad (7)$$

Это есть гипербола с центром на оси  $OX$  и асимптотой

$$z = x \frac{c}{w} \cos \frac{d}{\cos}, \quad (8)$$

где  $\alpha$  – угол наклона асимптоты к оси  $OZ$ . На рис. 2 показаны гиперболы 1, асимптота 2 и параллельные прямые 3. Расчет выполнен по формулам (7) и (8) для следующих параметров:  $c = 8$  м,  $d = 6$  м,  $h = 1,6$  м,  $w = 2$  м.

Полученные результаты приводят к ряду замечаний и выводов. Заметим, что преобразование (4) объясняет аллеинный эксперимент Гиллебранда [7], в котором линии, составленные из точечных источников света, казались параллельными «аллеями», хотя в натуре были сравнимы с гиперболами.

При малых углах асимптоты гипербол (8) пересекают ось  $OZ$  практически в одной точке  $O$  на расстоянии  $OO' = d$  (см. рис. 2). При полях зрения

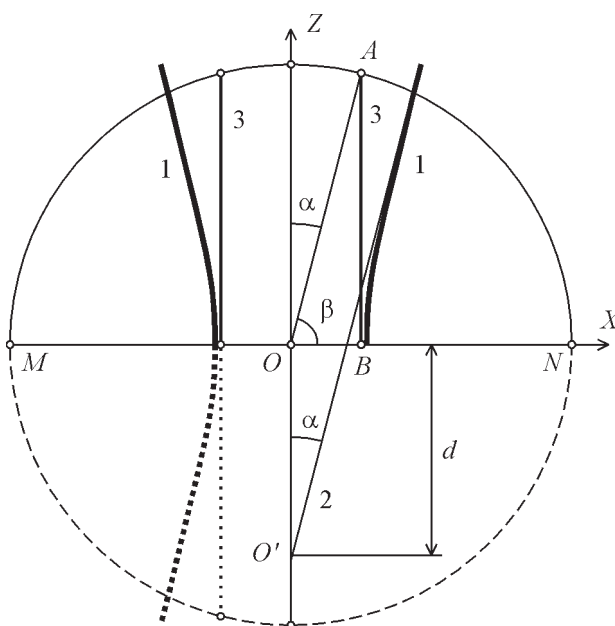


Рис. 2. Параллельные «аллеи» Гиллебранда

2 10 15 погрешность в определении  $d$  не превышает 0,4–1,0%. Заметим, что положение точки  $O$  не зависит от  $h$ . Далее параллельные прямые  $3$  лежат внутри круга радиуса  $c$ , причем точки на границе круга не принадлежат прямым. Это следует из того, например, что луч проекции  $OA$  оказывается параллельным асимптоте гиперболы.

Таким образом, на первом этапе эксперимента по кажущейся параллельной проекции удаленных точек (см. рис. 1) мы определяли точку пересечения  $O$  асимптот гипербол (8), а на втором этапе – строили саму гиперболу путем кусочно-линейной аппроксимации. Значит, линейная модель визуального пространства является частным или «асимптотическим» случаем более общей нелинейной модели. И, наконец, сама нелинейная модель – это модель пространства Лобачевского в интерпретации Клейна [8].

Модель Клейна и визуальное пространство. В евклидовом пространстве нельзя найти поверхности, внутренняя геометрия которой совпадала бы с геометрией всей плоскости Лобачевского. Но построить модели плоскости и пространства Лобачевского можно. В 1871 году Ф. Клейн показал одну из них, и с нею мы хотим сопоставить нелинейную модель визуального пространства.

Геометрия Лобачевского на плоскости тождественна с геометрией на евклидовой сфере с мнимым радиусом  $ic$ :  $x^2 + y^2 - z^2 = c^2$ . Отобразим мнимую сферу на действительную область. Для этой цели произведем преобразование координат  $y \rightarrow iy$ . Сфере теперь будет соответствовать двухпо-

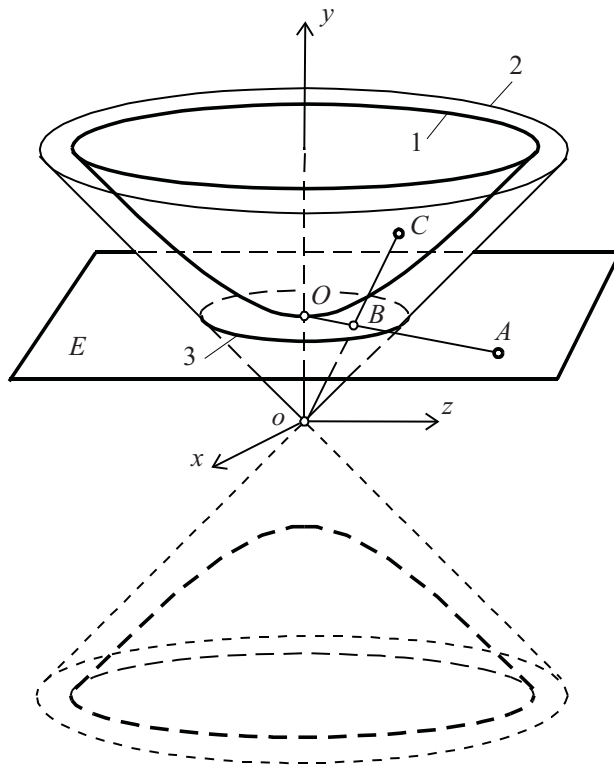


Рис. 3. Изображение плоскостей Евклида и Лобачевского на фундаментальном круге: 1 – двухполостный гиперболоид, 2 – асимптотический конус, 3 – круг, E – евклидова

лостный гиперboloид 1:  $x^2 + y^2 - z^2 = c^2$ , с асимптотическим конусом 2:  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  (рис. 3). Построим плоскость  $E: y = c$ , которая касается верхней полости гиперboloида. Путем пересечения асимптотического конуса с плоскостью  $E$  получим фундаментальное коническое сечение (круг) 3:  $x^2 + z^2 = c^2$ . Спроецируем из вершины конуса все  $c^2$  точек гиперboloида на круг и получим модель мнимой сферы Клейна.

Таким образом, в модели Клейна главной плоскостью Лобачевского является внутренность круга на евклидовой плоскости. Прямыми считаются хорды с исключенными концами. Движение – любое взаимно однозначное преобразование круга в круг и хорд в хорды. Оказывается, что точно такие же определения можно сделать и для любой плоскости визуирования, содержащей зрительную ось. Для поля зрения по горизонтали 180° это – внутренность полукруга (см. рис. 2). Прямые – это хорды или части хорд с исключенными концами, причем прямые появляются как результат проективного преобразования евклидовых гипербол. Модели пространства получаются аналогично, если взять внутренность шара. В этом случае к прямым добавляются плоскости в виде плоских кругов, не проходящих через оптический центр глаза (центр шара). Плоскости есть результат проективного преобразования евклидовых гиперboloидов вращения.

При таких определениях все аксиомы Евклида на любой плоскости выполняются, кроме аксиомы о параллельных. Через любую точку вне хорды можно провести бесконечное множество лучей, не пересекающих заданную. Два предельных луча считаются параллельными хорде. На рис. 2 показан один из них – луч  $OA$ , параллельный прямой  $AB$ . Если  $\alpha$  – угол параллельности, а  $b$  – длина перпендикуляра  $OB$  к прямой  $AB$ , то имеет место формула Лобачевского  $\text{tg}(\alpha/2) = \exp(-b/c)$ , где  $c$  – «мнимый» радиус. В модели Клейна эту формулу легко получить, если вычислять длину перпендикуляра  $OB$  как натуральный логарифм двойного отношения четырех точек: две точки  $O$  и  $B$  – это концы перпендикуляра, а две остальные точки  $M$  и  $N$  – исключенные концы хорды, содержащей перпендикуляр. При этом

$$b = \frac{c}{2} \ln \frac{MB : NB}{MO : NO}. \quad (9)$$

Учтем, что  $MB = MO - OB, NB = NO - OB, OB = AO \cos \alpha$  и  $MO = NO = AO$ . Из (9)

$$b = \frac{c}{2} \ln \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{c}{2} \ln((\text{ctg}(\alpha/2))^2) = c \ln(\text{tg}(\alpha/2)), \quad (10)$$

$$\text{или } \text{tg}(\alpha/2) = \exp(-b/c).$$

В центре круга на евклидовой плоскости  $E$  мыслится расположенным глаз наблюдателя (см. рис. 3). Вдоль зрительной оси евклидова точка  $A$  проецируется в точку  $B$ , которая оказывается в фундаментальном круге 3. Точка  $B$  путем проекции из вершины конуса 2 однозначно переводится в гиперболическую точку  $C$ . Существует и обратное однозначное преобразование. Поэтому оба пространства – Евклида и Лобачевского – оказываются взаимно однозначно связанными.

Можно найти функцию удаленности предметов в визуальном пространстве от удаленности в обычном пространстве. Обозначим через  $c$  гиперболическое расстояние до точки  $C$ , определяющее зрительное ощущение удаленности точки  $A$ , а через  $r$  – евклидово расстояние до точки  $A$  (см. рис. 3). Согласно (5) евклидово расстояние до точки  $B$  в круге  $\Omega$  равно  $OB = r_S \cdot rc/(r-d)$ . Используя (9) и (10), получим

$$\frac{c}{2} \ln \frac{1+r/(r-d)}{1-r/(r-d)} = \frac{c}{2} \ln \left( 1 + \frac{2r}{d} \right).$$

При  $r \rightarrow \infty$  ощущаемая удаленность также стремится к бесконечности и лишь на модели обретает конечную величину. Нелинейная модель – это одно и то же изображение двух пространств: пространства предметов Евклида и визуального пространства с геометрией Лобачевского.

Мы не будем далее рассматривать свойства фигур и предметов в нелинейной модели визуального пространства – это предмет отдельной работы. Отметим только, что на модели также легко объясняется и эксперимент с параллельными и эквидистантными «аллеями» Блюменфельда [7].

Заключение. На основе экспериментальных данных предложена нелинейная модель визуального пространства, возникающего в сознании человека при зрительном восприятии окружающего мира. Модель представляет пространство изображений, которое получают при помощи проективного преобразования физического пространства. Обнаружено совпадение нелинейной модели с моделью пространства Лобачевского по Клейну в определении плоскости, прямой и движений. Тождественность моделей дает основание считать, что визуальное пространство имеет неевклидову метрику. Через изображение на модели оба пространства – Евклида и Лобачевского – оказываются взаимно однозначно связанными.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев А. М. О визуально воспринимаемом пространстве предметов // Автометрия. 2003. 39, № 6. С. 3.
2. Ковалев А. М. Оценка искажений предметов при отображении перцептивного пространства на картинную плоскость // Автометрия. 2004. 40, № 6. С. 87.
3. Пат. 2241258 РФ. Способ изображения предметов (варианты) /А. М. Ковалев. Опубл. 27.11.2004, Бюл. № 33.
4. Кравков С. В. Глаз и его работа. М.–Л.: АН СССР, 1950.
5. Чуриловский В. Н. Теория оптических приборов. М.–Л.: Машиностроение, 1960.
6. Ковалев А. М. Виртуальное пространство в сферической перспективе // Оптический журнал. 1999. 66, № 6. С. 131.
7. Kienle G. Experiments concerning the non-euclidean structure of the visual space // Bioastronautics. N.Y.–L., 1964.
8. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.–Л.: ОНТИ, 1936.