

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

Р. Ш. Гайнутдинов

Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань, sertificat@radiotelecom.ru

Дано решение задачи о тепловом взрыве реагента в форме полого цилиндра при граничных условиях третьего рода обратным методом. Предложены методы определения критических параметров в общем и частных случаях. Получены трансцендентные уравнения, через корни которых определяются критические значения параметра Франк-Каменецкого. Приведены результаты численного анализа и даны аппроксимирующие функции для определения критического параметра Франк-Каменецкого в зависимости от числа Био.

Ключевые слова: тепловой взрыв, обратный метод, масштабная температура, критерий теплового взрыва, граничные условия.

Тепловой взрыв полого цилиндра при граничных условиях первого рода рассмотрен в [1–3]. В данной работе предпринята попытка исследовать критические условия теплового взрыва полого цилиндра при граничных условиях третьего рода.

Постановка задачи сводится к следующему: в неограниченном полом цилиндре протекает химическая реакция нулевого порядка, подчиняющаяся закону Аррениуса. На внутренней и внешней поверхностях цилиндра осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой. Математическая модель исследуемой задачи имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \delta \exp \theta = 0, \quad (1)$$

$$\text{Bi}_1 \theta = \frac{d\theta}{d\xi} \quad \text{при} \quad \xi = k, \quad (2)$$

$$\text{Bi}_2 \theta = -\frac{d\theta}{d\xi} \quad \text{при} \quad \xi = 1. \quad (3)$$

В (1) применено преобразование экспоненты в законе Аррениуса, выполненное по Франк-Каменецкому [4].

В (1)–(3) использованы следующие обозначения: $\theta = E(T - T_\infty)/RT_\infty^2$ — безразмерная температура; E — энергия активации; T — температура; T_∞ — температура окружающей среды; R — универсальная газовая постоянная; $\xi = r/R_2$ — безразмерная координата;

r — координата; R_2 — внешний радиус цилиндра; $\delta = Qk_0 \exp(-E/RT_\infty)ER_2^2/\lambda RT_\infty^2$ — параметр Франк-Каменецкого; Q — тепловой эффект реакции; k_0 — предэкспонент; λ — теплопроводность; $\text{Bi}_1 = \alpha_1 R_1/\lambda$ и $\text{Bi}_2 = \alpha_2 R_2/\lambda$ — критерии Био, вычисленные по внутреннему (R_1) и внешнему (R_2) радиусу полого цилиндра; α_1 и α_2 — коэффициенты теплоотдачи; $k = R_1/R_2$; за характерный размер принят внешний радиус цилиндра, а за характерную температуру — T_∞ .

Из решения системы (1)–(3) в явной форме не удастся получить выражение для определения критического параметра Франк-Каменецкого. В последнее время для решения сложных краевых задач теплопроводности интенсивно используют обратные методы [5–7 и др.]. В отличие от прямых краевых задач теплопроводности, в которых определяется поле температур объекта, в обратных задачах по распределению температуры отыскиваются параметры или коэффициенты, входящие в граничные условия или уравнение. В теории теплового взрыва обратные методы применялись в ранних работах [8–10 и др.] при определении кинетических параметров. Задачи теплового взрыва пластины при граничных условиях третьего рода исследовались обратным методом в [11, 12].

Цель настоящей работы — исследование обратным методом критических условий теплового взрыва. Суть обратного метода в данной работе сводится к тому, что задаются значения температур на внутренней и внешней поверхностях цилиндра (T_1 и T_2) и решается уравне-

ние (1) при несимметричных граничных условиях первого рода

$$\begin{aligned} \xi = k: \quad \theta &= 0, \\ \xi = 1: \quad \theta &= \theta_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta_2 = E(T_2 - T_1)/(RT_1^2)$. Более высокая температура T_1 принимается за масштабную. Уравнение (1) при граничных условиях (4) решено в [1]. Из этого решения можно получить выражения для критического параметра ξ_* и градиентов температур на внутренней и внешней поверхностях цилиндра g_k и g_1 . Решение уравнения (1) записывается в виде [4]

$$\exp \theta = a/\xi^2 \operatorname{ch}^2(\mu \ln \xi - b),$$

где a и b — постоянные интегрирования, $\mu = (a\delta/2)^{0,5}$,

$$\delta_* = 2(\ln p_* q_*)^2 / a_* (\ln k)^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_k &= -2(1 + \operatorname{th}(\ln p_*) \mu_*) / k, \\ g_1 &= 2(1 - \operatorname{th}(\ln q_*) \mu_*). \end{aligned} \quad (6)$$

Значение a_* , соответствующее критическим условиям теплового взрыва, определяется из трансцендентного уравнения

$$x/(p-x) + z/(q-z) = \ln(pq), \quad (7)$$

где $p = x + (x^2 - 1)^{0,5}$; $x = a^{0,5}/k$; $q = z + (z^2 - 1)^{0,5}$; $z = (a \exp(-\theta_2))^{0,5}$, $\mu = \ln(pq)/\ln k$. При $k \rightarrow 0$ значение δ_* следует вычислять итерацией из (5), поскольку определение a_* из (7) вызывает вычислительные трудности.

Для того чтобы провести сравнение результатов расчетов с опубликованными данными, в (5) и (6) надо перейти от T_1 к T_∞ и от R_2 к $H = R_2 - R_1$ ($R_2 = H/(1-k)$). Тогда уравнения (5), (6) примут вид

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_* n_1^2 \exp(U(1 - 1/n_1)), \\ g_{k,H} &= g_k(1 - k), \\ g_{1,H} &= g_1(1 - k). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $n_1 > 1$ и его значение связано с температурой на горячей поверхности зависимостью $T_1 = n_1 T_\infty$; $U = E/RT_\infty$.

Определив δ_* , $g_{k,H}$ и $g_{1,H}$ из уравнений (5), (6) и (8), граничные условия (2), (3) можно представить в виде

$$\operatorname{Bi}_{k,H} U(n_1 - 1)/n_1^2 = g_{k,H}, \quad (9)$$

$$\operatorname{Bi}_{1,H} U(n_2 - 1)/n_1^2 = g_{1,H},$$

где $n_2 > 1$ и находится из зависимости $T_2 = n_2 T_\infty$; $\operatorname{Bi}_{k,H} = \alpha_1 H/\lambda$; $\operatorname{Bi}_{1,H} = \alpha_2 H/\lambda$; $H = R_2 - R_1$. Из (9) определяются числа Био, соответствующие заданным температурам. В общем случае, когда $\operatorname{Bi}_{k,H} \neq \operatorname{Bi}_{1,H}$ и $T_1 \neq T_2$, приведенная система уравнений решается методом последовательных приближений. Для частных случаев удается получить аналитические и аппроксимирующие зависимости для критического параметра δ_* . Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $k \rightarrow 1$ ($k = 0,995$), $T_1 = T_2$. Тогда решение уравнения (1) при граничных условиях $\xi = k: \theta = 0$; $\xi = 1: \theta = 0$ приводит к уравнению (5), где $x = a^{0,5}/k$ и $z = a^{0,5}$. Из (5) получаем $\delta_* = 3,512$. При $k \rightarrow 1$ полый цилиндр может рассматриваться как плоское тело. В этом случае при симметричных граничных условиях первого рода $\delta_* = 3,52$ [4], если за характерный размер принята вся толщина кольцевого слоя. Результаты по определению δ_* практически одинаковы, что свидетельствует о возможности предельного перехода от полого цилиндра к плоскому телу. Вычислениями по (6) и (8) получаем, что $g_{k,H} = g_{1,H} = 4$. Здесь при $T_1 = T_2$ имеем $n_1 = n_2 = n$ и $\operatorname{Bi}_{k,H} = \operatorname{Bi}_{1,H} = \operatorname{Bi}$. Значение n определяется из (9) по формуле (10). Для критического параметра теплового взрыва получается следующее аналитическое выражение:

$$\delta(\operatorname{Bi}) = 3,51 n^2 \exp(-U(1 - 1/n)), \quad (10)$$

$$n = 2(1 - (1 - x)^{0,5})/x, \quad x = 16/\operatorname{Bi}U.$$

Здесь и далее в расчетах используется значение $U = 50$. Изменение U в интервале $30 \div 70$ практически не влияет на величину δ .

2. Пусть значения k лежат в интервале $0,1 \div 0,9$ при $T_1 = T_2$. В этом случае $\operatorname{Bi}_1 \neq \operatorname{Bi}_2$, $n_1 = n_2 = n$. Здесь не удастся получить аналитические зависимости для критических параметров. Обобщение результатов расчетов обратным методом приводит к таким аппроксимирующим зависимостям:

$$g_{k,H} = \exp(1,7461 - 0,5939 \ln k - 0,9784/\exp k),$$

$$g_{1,H} = (9,9328 + 6,0706k + 0,9332 \ln k)^{0,5},$$

$$n = 2(1 - (1 - x)^{0,5})/x, \quad x = 4g_{k,H}/U\operatorname{Bi}_{k,H}, \quad (11)$$

$$\delta_* = 3,8050 - 0,2937k + 0,2709 \ln k,$$

$$\delta = \delta_* n^2 \exp(-U(1 - 1/n)),$$

$$Bi_{1,H} = g_{1,H} n^2 / U(n - 1).$$

Процедура расчетов сводится к следующему: по исходным данным k и $Bi_{k,H}$ вычисляют градиенты температур на поверхностях цилиндра по формулам (6), (8), n и δ_* находят из уравнений (9), (5) соответственно, а значение $Bi_{1,H}$, соответствующее заданной температуре, — из (9). Относительная ошибка аппроксимирующих формул менее 1 %.

3. Пусть внутренняя поверхность цилиндра теплоизолирована и на внешней поверхности осуществляется конвективный теплообмен. Для сравнения обратного и прямого методов решения интересен случай, когда $k \rightarrow 0$. Нужно решить (1) при граничных условиях

$$\begin{aligned} \xi = k \quad (k \rightarrow 0): \quad d\theta/d\xi = 0, \\ \xi = 1: \quad Bi_{1,H}(n - 1)/n^2 = g_{1,H}. \end{aligned} \quad (12)$$

Значения $g_{1,H}$ и δ_* , необходимые для вычисления $\delta(Bi)$, определяются из решения (1) при граничных условиях

$$\begin{aligned} \xi = k: \quad d\theta/d\xi = 0, \\ \xi = 1: \quad \theta = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (1) при граничных условиях (13) приведено в работе [2], из которого при $k = 0,001$ получено $g_{1,H} = 2,011$ и $\delta_* = 1,995$. Решение прямой задачи (1) при условиях (13) в [4] при $k = 0$ дает значения $g_{1,H} = 2$ и $\delta_* = 2$. Результаты практически идентичны. Это позволяет считать, что имеет место переход от полого цилиндра к сплошному. Решение (12) при $g_{1,H} = 2$ относительно n дает

$$n = 2(1 - (1 - x)^{0,5})/x; \quad x = 8/BiU. \quad (14)$$

При $\delta_* = 2$ из (8) получается зависимость критического параметра от числа Bi для сплошного цилиндра:

$$\delta(Bi) = 2n^2 \exp(-U(1 - 1/n)). \quad (15)$$

Задача о тепловом взрыве сплошного цилиндра при граничных условиях третьего рода прямым методом решена в [13], где в качестве

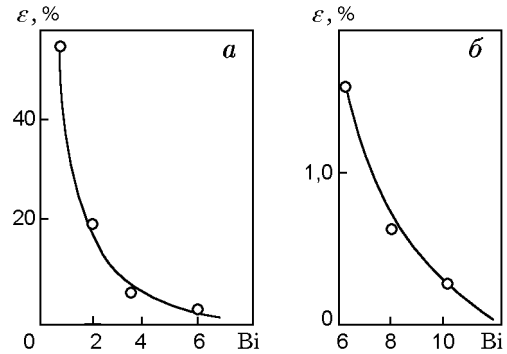


Рис. 1. Зависимость ε от числа Био: a — решение прямой задачи, b — обратной; $\varepsilon = [\delta[13] - \delta(15)] \cdot 100/\delta[13]$

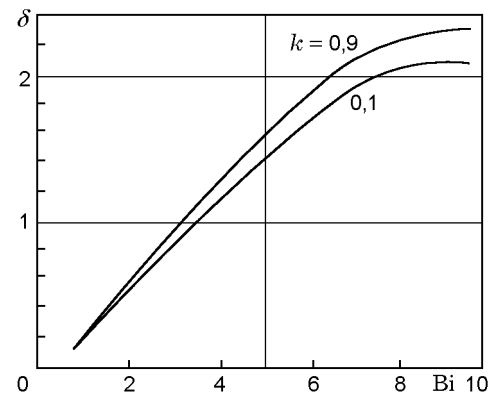


Рис. 2. Зависимость параметра δ от числа Био при $Bi_1 = Bi_2 = Bi$

масштабной температуры принята температура окружающей среды. На рис. 1 для сравнения приведены результаты расчетов зависимости $\delta(Bi)$ прямым [13] и обратным (15) методами. Видно, что при малых числах Bi результаты расходятся, а при больших разность ε асимптотически стремится к нулю. Расхождение результатов обусловлено применением различных характерных температур в двух методах. Влияние масштабной температуры на результаты расчетов при малых значениях Bi ранее было отмечено в [14]. При малых числах Bi для определения δ желательно пользоваться уравнением (15).

4. Пусть $Bi_1 = Bi_2 = Bi$, $T_1 \neq T_2$, $n_1 \neq n_2$. Уравнение (1) нужно решать при граничных условиях третьего рода.

Решение этой задачи обратным методом и обобщение расчетных результатов позволили

получить следующие аппроксимирующие зависимости:

$$\delta = \exp(1,0464 - 3,6962/\text{Bi} + 23,518 \cdot 10^{-3} \ln \text{Bi})$$

при $k = 0,1$;

$$\delta = \exp(1,2251 - 3,9229/\text{Bi} - 0,4071 \cdot 10^{-2} \ln \text{Bi}),$$

$k = 0,3$;

$$\delta = \exp(1,2526 - 3,9635/\text{Bi} - 2,5322 \cdot 10^{-6} \text{Bi}^2),$$

$k = 0,5$;

$$\delta = \exp(1,2703 - 3,9815/\text{Bi} - 0,3047 \cdot 10^{-3} \text{Bi}),$$

$k = 0,7$;

$$\delta = \exp(1,3216 - 4,0617/\text{Bi} - 0,0174 \ln \text{Bi}),$$

$k = 0,9$.

Относительная ошибка аппроксимирующих зависимостей в интервале $\text{Bi} = 2 \div 50$ не превосходит 2 %. Некоторые результаты расчетов $\delta(\text{Bi})$ приведены на рис. 2. Видно, что при $\text{Bi} = 2$ кривые практически сливаются и стремятся к нулю при $\text{Bi} \rightarrow 0$. Так, при $\text{Bi} = 0,4$ имеем $\delta = 7 \cdot 10^{-6}$. Расчеты показывают, что большим значениям k соответствует больший параметр δ . Увеличение k от 0,1 до 0,9 приводит к изменению в пределах $7 \div 14$ % при $\text{Bi} = 2 \div 50$. Объясняется это тем, что при больших значениях k возрастает площадь поверхности охлаждения. Процедура расчета применительно к обратному методу подробно излагалась выше.

Из стационарной теории теплового взрыва [4] известно, что критические параметры теплового взрыва для плоского тела и сплошного цилиндра определяются из ветви решения, соответствующей устойчивому режиму. Согласно [1, 2] критические параметры для полого цилиндра определяются по ветви решения, соответствующей устойчивому режиму. Предельные переходы от полого цилиндра к сплошному цилиндру и плоскому телу, установленные в настоящей работе, также свидетельствуют о реализации устойчивого режима в полом цилиндре.

Таким образом, в работе исследованы критические условия теплового взрыва полого цилиндра при граничных условиях третьего рода обратным методом. В общем случае критический параметр теплового взрыва Франк-Каменецкого определяется методом последовательного приближения. Для частных случаев получены аналитические и аппроксимирующие зависимости для определения указанного параметра. Установлено, что при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 1$ имеют место предельные переходы от полого цилиндра к сплошному цилиндру и плоскому телу. Показано, что при малых значениях

Bi выбор масштабной температуры значительно влияет на критический параметр теплового взрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А. М. Типы решений одной нелинейной краевой задачи и их устойчивость // Теория функций и дифференциальные уравнения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1966. С. 44–51.
2. Бостанджиян С. А. Тепловое воспламенение кольцевого слоя и его гидродинамическая аналогия // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24, № 4. С. 10–19.
3. Гайнутдинов Р. Ш., Воробьев Е. С., Асадуллина Г. Я. Тепловой взрыв полого цилиндра // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 2. С. 65–67.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
5. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
6. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. думка, 1982.
7. Beck J. V., Blackwell B., St. Clair C. R., Jr. Inverse Heat Conduction. 111-posed Problems. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1985.
8. Мержанов А. Г. Неизотермические методы в химической кинетике // Физика горения и взрыва. 1973. Т. 9, № 1. С. 4–36.
9. Гришин А. М., Кучин А. Я. О решении некоторых обратных задач аэротермохимии // Физика горения и взрыва. 1973. Т. 9, № 5. С. 658–666.
10. Земских В. И., Лейпунский О. И. Определение кинетики тепловыделения конденсированных реагирующих веществ при зажигании по зависимости температуры поверхности от времени // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 3. С. 3–8.
11. Гайнутдинов Р. Ш. Тепловой взрыв неограниченной пластины при несимметричных граничных условиях третьего рода // Физика горения и взрыва. 1998. Т. 34, № 3. С. 88–91.
12. Гайнутдинов Р. Ш. Сопряженная задача теплового взрыва // Инж.-физ. журн. 1999. Т. 72, № 2. С. 204–207.
13. Барзыкин В. В., Мержанов А. Г. Краевая задача в теории теплового взрыва // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 1271–1273.
14. Вилюнов В. Н. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984.

Вниманию читателей!

Исправления к статье Р. Ш. Гайнутдинова «Тепловой взрыв полого цилиндра при граничных условиях третьего рода» 2004, № 2.

Напечатано:

с. 30, левая колонка, 11-я строка снизу:

$$\delta = \delta_* n_1^2 \exp(U(1 - 1/n_1))$$

с. 30, правая колонка, 12-я строка сверху:

$$k = 0,995$$

Должно быть:

$$\delta = \delta_* n_1^2 \exp(-U(1 - 1/n_1))(1 - k)^2$$

$$k = 0,9995$$