

К ТЕОРИИ ЛАМИНАРНЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ

М. А. Гольдштик, Б. А. Силантьев

(Новосибирск)

Теории ламинарных затопленных струй посвящено значительное количество работ, например [1-5]. В данной статье выявлены некоторые новые факты.

§ 1. Постановка задачи и основное уравнение. В теории затопленных струй рассматриваются автомодельные движения вязкой несжимаемой жидкости, вызванные некоторой особенностью, которая интерпретируется как точечный импульсивный источник. Эти движения удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса

$$(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) автомодельные решения системы (1.1) должны иметь вид

$$v_r = \frac{\nu}{r} U(\eta), \quad v_z = \frac{\nu}{r} W(\eta), \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2} \Pi(\eta), \quad \eta = \frac{z}{r} \quad (1.2)$$

Функции v_r, v_z, p должны удовлетворять условиям

$$v_r = v_z = p = 0 \quad \text{при } r = \infty \text{ или } |z| = \infty \quad (1.3)$$

$$v_r = 0, \quad v_z \text{ — ограничена, } \partial v_z / \partial r = 0 \text{ при } r = 0$$

Кроме того, задается кинематический импульс струи

$$I = 2\pi \int_0^\infty r v_z^2 dr = 2\pi \nu^2 \int_0^\infty \frac{W^2}{\eta} d\eta \quad (1.4)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) дает систему уравнений

$$U'(W - \eta U) - U^2 = \eta \Pi' + 2\Pi + (1 + \eta^2) U'' + 3\eta U' \quad (1.5)$$

$$W'(W - \eta U) - UW = -\Pi' + (1 + \eta^2) W'' + 3\eta W' + W \quad (1.6)$$

$$W' = \eta U' \quad (1.7)$$

Условия (1.3) дают

$$U = W = \Pi = 0 \quad \text{при } \eta = \pm \infty \quad (1.8)$$

Интегрируя (1.6) по η , получим

$$\Pi = (1 + \eta^2) W' + \eta W - W(W - \eta U) - 1/2 C_1 \quad (1.9)$$

Введем новые переменную x и функцию y соответственно

$$x = \eta (1 + \eta^2)^{-1/2}, \quad y = (W - \eta U) (1 + \eta^2)^{-1/2} \quad (1.10)$$

Тогда, подставляя (1.9) в (1.5), получим

$$-(1 - x^2)^2 y''' = C_1 - 1/2 (1 - x^2) (y^2)'' - x (y^2)' + y^2 \quad (1.11)$$

При этом функции W и U выражаются через y при помощи (1.7)

$$U = -(1 - x^2) y' - xy, \quad W = (1 - x^2)^{1/2} (y - xy') \quad (1.12)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по x .

Продифференцируем (1.11) и разделим на $1 - x^2$, получим

$$-(1 - x^2) y^{IV} + 4xy''' = -1/2 (y^2)''' \quad (1.13)$$

Проинтегрируем (1.13) один раз

$$-(1 - x^2) y''' + 2xy'' - 2y' = -1/2 (y^2)'' - C_2 \quad (1.14)$$

Интегрируя (1.14) еще дважды, получим

$$2(1 - x^2) y' + 4xy - y^2 = C_3 x^2 + C_4 x + C_5 = F(x) \quad (1.15)$$

Уравнение Риккати (1.15) впервые было получено Н. А. Слезкиным [4]. Используя (1.8), можно показать, что $C_1 = 0$ (аналогичное доказательство имеется в [6]). Для определения константы C_2 сопоставим уравнения (1.11), (1.14) и (1.15) при $x = 0$. Тогда получим

$$C_2 = C_4 \quad (1.16)$$

Следует отметить, что эта связь между константами не была обнаружена Н. А. Слезкиным, и все коэффициенты в правой части (1.15) трактовались как независимые.

§ 2. **Некоторые свойства решения Ландау.** Для решения Л. Д. Ландау [1], интерпретированного им как истечение струи из бесконечно тонкой трубки, должны удовлетворяться граничные условия

$$y(\pm 1) = 0 \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что при этом должно быть

$$F(\pm 1) = 0 \quad (2.2)$$

Соотношения (2.2) с учетом (1.16) приводят к равенствам $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, и решение (1.15) находим в виде

$$y = 2 \frac{1-x^2}{\gamma-x} \quad (2.3)$$

которое было получено Ландау.

Если не учитывать соотношения (1.16), то условий (2.2) будет недостаточно для определения констант C_2, C_3, C_4 , и решение окажется зависящим не только от γ , но еще от одного произвольного параметра. Такое решение, дающее целый класс струйных течений, было получено В. И. Яцеевым [5]. Однако наличие связи (1.16) показывает, что решение Ландау единственно (В. И. Яцеев указывает, что из всего найденного им класса лишь решение Ландау имеет физический смысл).

Константа γ однозначно связана с импульсом струи ($\gamma \rightarrow 1$ при $I \rightarrow \infty$).

Как показал Л. Д. Ландау, в случае «сильной» струи ($\gamma = 1 + 1/2\alpha^2$, $\alpha \ll 1$) его решение совпадает с решением Г. Шлихтинга [2], полученным методами теории пограничного слоя

$$v_z = \frac{8\nu}{z} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \xi^2)^2}, \quad \alpha^2 = \frac{64\pi\nu^2}{3I}$$

$$\xi = \frac{r}{z} \quad (2.4)$$

Проведем некоторый анализ решения Ландау. Подставляя (2.3) во второе из равенств (1.12), получим (2.5)

$$v_z = \frac{2\nu}{\gamma z} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \left[1 + \frac{\gamma^2 - 1}{(\gamma \sqrt{1+\xi^2} - 1)^2} \right]$$

Зафиксируем в (2.5) значение z и определим те значения r , при которых

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.6)$$

Введем новую переменную $t = \sqrt{1+\xi^2}$ и обозначим $m = \gamma t$ и $n = \gamma^{-2}$. Тогда (2.6) запишется в виде уравнения

$$2m^5(m-4)n^2 + m^2(9m^2+4m-1)n - 3(5m^2-4m+1) = 0 \quad (2.7)$$

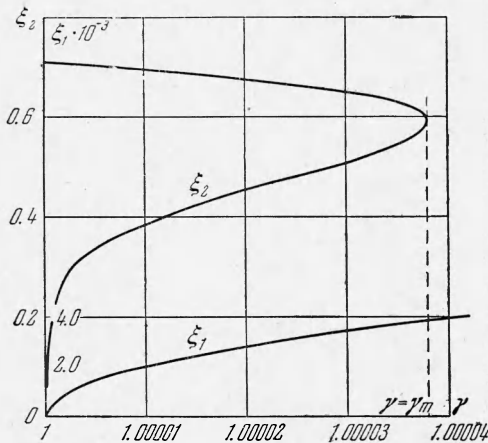
Уравнение (2.7) определяет функцию $n(m)$, которая имеет две ветви, соответствующие двум корням уравнения. Поскольку $\gamma > 1$ и $t > 1$, то представляет интерес следующая область изменения величин m и n : $1 \leq m \leq \infty$; $0 \leq n \leq 1$. Первая ветвь $n(m)$ — монотонная функция, убывающая от 1 до 0 при изменении m от 1 до ∞ . Вторая ветвь не превосходит значения $n = 1$ только в промежутке $1 \leq m \leq \sqrt{3/2}$. Так как при этом значения n оказываются очень близкими к единице, то целесообразнее ввести $s = 1 - n$. Тогда уравнение (2.7) примет вид

$$2m^5(m-4)s^2 - m^2(m-1)(4m^3 - 12m^2 - 3m + 1)s + (m-1)^4(2m-3) = 0$$

В промежутке $1 \leq m \leq \sqrt{3/2}$ корни этого уравнения с большой степенью точности могут быть представлены в виде

$$s_1 = \frac{(m-1)(4m^3 - 12m^2 - 3m + 1)}{3m^3(m-4)}, \quad s_2 = \frac{(m-1)^3(2m-3)}{m^2(4m^3 - 12m^2 - 3m + 1)}$$

Зная функции n_1 и n_2 , можно построить зависимости $\xi_1(\gamma)$ и $\xi_2(\gamma)$, которые изображены на фиг. 1. Из фиг. 1 следует, что при $\gamma < \gamma_m$ каждому γ соответствуют три значения ξ , а при $\gamma > \gamma_m$ — лишь одно. Значение γ_m можно вычислить, найдя максимум $s_2(m)$. Таким путем найдено $\gamma_m = 1.000038$. Таким образом, при $\gamma > \gamma_m$ про-



Фиг. 1

филь скорости v_z имеет одну точку перегиба (наличие которой обусловлено граничными условиями), а при $\gamma < \gamma_m$ появляются еще две точки перегиба, что, согласно известной теореме Рейля, является необходимым условием абсолютной неустойчивости течения, так что при $\gamma < \gamma_m$ следует ожидать турбулизации струи. Введем число R для круглой струи радиуса a , имеющей одинаковый с точечным источником импульс

$$I = 2\pi \int_0^a V_0^2 r dr = \pi V_0^2 a^2, \quad \text{Re} = \frac{2}{\nu} \left(\frac{I}{\pi} \right)^{1/2} = 8 \left[\frac{2}{2(\gamma - 1)} \right]^{1/2}$$

Для значения $\gamma = \gamma_m$ имеем $\text{Re} = 1060$.

§ 3. Об эжекционной способности струи. Эжекционная способность струи может быть охарактеризована расходом

$$G = 2\pi \int_0^\infty r v_z dr \tag{3.1}$$

Если в (3.1) подставить (2.4), то получится известная формула Шлихтинга

$$G = 8\pi\nu z \tag{3.2}$$

Вычислим величину G в общем виде. Имеем для функции тока

$$\psi = 2\pi \int_0^r r v_z dr = 2\pi\nu \int_0^r W dr = 2\pi\nu \sqrt{r^2 + z^2} y = 2\pi\nu z \left(\frac{W}{\eta} - U \right)$$

Следовательно,

$$G = 2\pi\nu z \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{W}{\eta} - U \right) \tag{3.3}$$

Отсюда видно, что если $W(0) \neq 0$, то $G = \infty$. В частности, для струи Ландау $G = \infty$, что проверяется и непосредственно.

Таким образом, несмотря на то, что решение Шлихтинга (2.4) совпадает с точным решением Ландау для «сильной» струи в окрестности ее оси, они дают совершенно различные значения G . Поэтому формула (3.2), полученная путем неправомерного применения соотношения (2.4) ко всей бесконечной области течения, сомнительна.

Подставим задачу об отыскании струйного течения с конечным расходом G . Имеем необходимое условие

$$W(0) = 0 \tag{3.4}$$

Полагая в (1.10) величину $\eta = 0$, находим $y(0) = 0$. Симметрия условий относительно плоскости $z = 0$ позволяет рассматривать задачу лишь для области $z \geq 0$; поэтому из условий (2.1) используем лишь одно: $y(1) = 0$. Из (1.12) находим

$$y'(0) = -U(0) = -U_0$$

Полагая в (1.15) $x = 0$, с учетом (1.16) получим

$$C_2 = C_4 = 2y'(0) = -2U_0$$

Используя условие $F(1) = 0$, получим $C_3 = 4U_0$, и

$$F(x) = -2U_0(1 - x^2) \tag{3.5}$$

Решение уравнения (1.15) в этом случае имеет вид

$$y = 2U_0(1 - x) \frac{\text{th} [\chi \ln(1 + x)]}{\text{th}_2 [\chi \ln(1 + x)] - 2\chi} \quad \text{при } U_0 < -\frac{1}{2} \quad (\chi = [1/2(U_0 + 1/2)]^{1/2}) \tag{3.6.1}$$

$$y = -2U_0(1 - x) \frac{(1 + x)^{2\chi} - 1}{(2\chi - 1)(1 + x)^{2\chi} + (2\chi + 1)} \quad \text{при } U_0 > -\frac{1}{2} \tag{3.6.2}$$

$$y = (1 - x) \frac{\ln(1 + x)}{2 - \ln(1 + x)} \quad \text{при } U_0 = -\frac{1}{2} \tag{3.6.3}$$

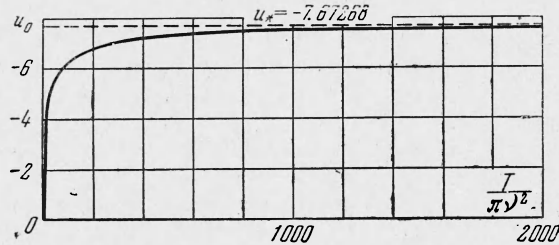
Из (3.6) видно, что если рассматривать данное течение как струю, бьющую из отверстия в плоской стенке, и поставить условие прилипания $U(0) = 0$, то задача не будет иметь решения, отличного от тривиального $U = W = 0$. Однако можно указать три возможности физической интерпретации решения.

(а) Можно трактовать полученное решение как струю, вытекающую из малого отверстия в стенке, хотя и непроницаемой, но «абсолютно гладкой», так что условие

$U(0) = 0$ не имеет места. Отметим, что решение Шлихтинга, примененное ко всему полупространству $z \geq 0$, отвечает именно этому случаю ($W(0) = 0$, $U(0) \neq 0$).

(б) Можно представить, что данное течение вызвано своеобразным струйным диполем, помещенным в начало координат, из которого бьют две одинаковые струи в противоположных направлениях.

(в) Данное движение может быть интерпретировано (при $U(0) > 0$) как радиальное истечение из тонкой трубки, совпадающей с осью z . Как следует из (3.6.1), истечение типа (а) и (б) возможно лишь при $U_0 > U_*$, так как при $U_0 < U_* = -7.67268$ функция y имеет полюса.



Фиг. 2.

они совпадает с решением Шлихтинга. Уравнение (3.6.1) перепишем в виде

$$y = (1 + b^2)(1 - x) \frac{\operatorname{tg} [1/2 b \ln(1 + x)]}{b - \operatorname{tg} [1/2 b \ln(1 + x)]} \quad (b = \sqrt{-2U_0 - 1}, \quad b_0 = \sqrt{-2U_* - 1})$$

Далее, разложим функцию y в ряд по $1 - x$ и $b_0 - b$ и возьмем линейные члены разложения. Получим

$$y = (1 + b_0^2) \frac{b_0(1 - x)}{1/4 a_0 b_0(1 - x) + k_0(b_0 - b)}, \quad a_0 = 1 + b_0^2, \quad k_0 = \frac{a_0 \ln 2}{2} - 1$$

Функция v_z , согласно (1.2) и (1.12), для «сильной» струи в окрестности оси будет иметь вид

$$v_z \approx \frac{v}{z} b_0 k_0 a_0 (b_0 - b) \frac{x^2}{[1/4 a_0 b_0(1 - x) + k_0(b_0 - b)]^2} \approx \frac{v}{z} \frac{a_0 b_0}{k_0(b_0 - b)} \left[1 + \frac{a_0 b_0}{2k_0(b_0 - b)} \frac{\xi^2}{4} \right]^{-2} \quad (3.7)$$

Нетрудно видеть, что профиль скорости (3.7) совпадает с решением Шлихтинга (2.4). Подставляя (3.7) в формулу для импульса, получаем искомую приближенную связь между I и U_0

$$I = \frac{16\pi v^2}{3} U_* \frac{\sqrt{-2U_* - 1}}{(-U_* \ln 2 - 1)(\sqrt{-2U_* - 1} - \sqrt{-2U_0 - 1})} \quad (3.8)$$

Равенства (3.8) и (3.3) определяют связь между расходом в сильной струе и ее импульсом. При $I \rightarrow \infty$ расход в струе имеет конечную величину. Подставляя в (3.3) $U_0 = U_* = 7.67268$ и имея в виду, что при $\eta \rightarrow 0$ из (1.7) следует $\lim W/\eta = W'(0) = 0$, находим $G = 15.345336 \text{ лвз}$. Таким образом, величина расхода в «сильной» струе оказывается почти в два раза больше вычисленной Шлихтингом.

В заключение отметим, что хотя стенка в действительности не является «гладкой», все же можно не учитывать влияние пограничного слоя на достаточно больших расстояниях от стенки и пользоваться полученным решением.

Поступила 12 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954, стр. 108—110.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956, стр. 171.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1957, стр. 559.
4. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955, стр. 150—154.
5. Яценев В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. Ж. эксперим. и теор. физ., 1950, т. 20, № 11.
6. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнения Навье — Стокса. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, стр. 610—621.