ПМТФ, № 4, 1971

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

В. К. Востров

(Фрунзе)

Рассматривается осесимметричная задача определения напряженно-деформированного состояния упругого полупространства для случая наличия на граничной плоскости $z = 0$ круговой линии раздела граничных условий. Предполагается, что на всей границе $z = 0$ касательное напряжение $\tau_{rz} = 0$, в то время как внутри круга $r \leqslant a$ $(z = 0)$ известно нормальное перемещение u_z, а вне его — нормальное напряжение σ_z. Кроме того, предполагается, что в полупространстве действуют объемные силы. Изучение подобного рода задач представляет интерес в связи с применением метода упругих решений А. А. Ильюшина к задаче вдавливания штампов в нелинейно-упругое, в частности в упруго-пластическое полупространство.

Пусть в полупространстве $\Omega = (0 \leqslant z < \infty;\ 0 \leqslant r < \infty)$ осевой силой P вдавливается жесткий осесимметричный штамп, имеющий в цилиндрической системе координат r, φ, z форму $z = -\chi(r)$. Система координат здесь выбрана таким образом, чтобы полупространство занимало область Ω, а ось z совпадала с линией действия силы P.

Обозначим через T_e и Γ_e, $T_e = G\,\Gamma_e$, G — упругий модуль сдвига, характерное напряжение и характерную деформацию соответственно и перейдем к величинам

$$\sigma_{ij} = 2T_e\sigma_{ij}', \quad \varepsilon_{ij} = \Gamma_e\varepsilon_{ij}', \quad u_r = a\Gamma_e u_r' \tag{1}$$
$$u_z = a\Gamma_e u_z', \quad r = ar', \quad z = az', \quad p = P / 2T_e\pi a^2$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, u_r, u_z — компоненты вектора перемещений. В силу осевой симметрии

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = u_\varphi = 0$$

а оставшиеся компоненты не зависят от координаты φ.

Всюду в дальнейшем будут использоваться безразмерные величины σ_{ij}', ε_{ij}', u_r', u_z', r', z', причем для простоты штрихи будут опускаться.

В полупространстве Ω имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = f_1(r, z) \tag{2}$$
$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = f_2(r, z)$$

соотношения закона Гука (ν — коэффициент Пуассона)

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} \tag{3}$$

и соотношения, связывающие компоненты ε_{ij}, u_r, u_z

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{4}$$

На границе $z = 0$ и на бесконечности должны быть выполнены граничные условия

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_z|_{\substack{z=0\\ r>1}} = h(r) \tag{5}$$

$$u_z|_{\substack{z=0\\ r<1}} = \frac{1}{\Gamma_e}\left[\frac{\delta}{a} - \frac{\chi(ar)}{a}\right] \equiv \theta(r) \tag{6}$$

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_r, u_z \to 0 \quad \text{при } r^2 + z^2 \to \infty \tag{7}$$

где δ — осевое перемещение штампа, $\varepsilon = a / r$. Неизвестный радиус площадки контакта a определяется из условия непрерывности нормальных напряжений σ_z в точках окружности $r = 1$ $(z = 0)$.

Относительно функций $f_1(r, z)$, $f_2(r, z)$, $h(r)$ предполагается, что для любого $z \geqslant 0$ преобразования Ханкеля

$$\varkappa_\lambda(z) = \int_0^\infty f_1(r, z) J_1(\lambda r) r dr, \qquad H(\lambda) = \int_0^\infty h(r) J_0(\lambda r) r\, dr$$

$$s_\lambda(z) = \int_0^\infty f_2(r, z) J_0(\lambda r) r\, dr \tag{8}$$

существуют и допускают соответствующие обращения. Кроме того, каждая из функций $s_\lambda(z)$, $\varkappa_\lambda(z)$ должна удовлетворять условиям исчезновения на бесконечности функций (15).

Компоненты u_r, u_z будем искать в виде интегральных разложений Ханкеля

$$u_r = \int_0^\infty A_\lambda(z) J_1(\lambda r) d\lambda, \qquad u_z = \int_0^\infty B_\lambda(z) J_0(\lambda r) d\lambda \tag{9}$$

Тогда соотношения (3), (4) определяют компоненты ε_{ij}, σ_{ij}; вставляя последние в уравнения равновесия (2), придем к тому, что функции $A_\lambda(z)$, $B_\lambda(z)$ должны удовлетворять системе двух неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{gathered}(1 - 2\nu) A_\lambda''(z) - \lambda B_\lambda'(z) - 2(1 - \nu)\lambda^2 A_\lambda(z) = 2(1 - 2\nu)\lambda\varkappa_\lambda(z)\\ 2(1 - \nu) B_\lambda''(z) + \lambda A_\lambda'(z) - (1 - 2\nu)\lambda^2 B_\lambda(z) = 2(1 - 2\nu)\lambda s_\lambda(z)\end{gathered} \tag{10}$$

Решение $A_\lambda(z)$, $B_\lambda(z)$ системы (10) зависит от четырех произвольных функций

$$A_\lambda(0),\ A_\lambda'(0),\ B_\lambda(0),\ B_\lambda'(0) \tag{11}$$

параметра λ, для определения которых имеются следующие соотношения:

$$A_\lambda'(0) = \lambda B_\lambda(0) \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\int_0^\infty B_\lambda(0) J_0(\lambda r) d\lambda = \theta(r) \qquad (0 \leqslant r < 1)\\ \int_0^\infty [\nu\lambda A_\lambda(0) + (1 - \nu) B_\lambda'(0)] J_0(\lambda r) d\lambda = (1 - 2\nu) h(r) \quad (r > 1)\end{gathered} \tag{13}$$

$$A_\lambda(z),\ B_\lambda(z) \to 0 \quad \text{при } z \to \infty \tag{14}$$

вытекающие из граничных условий (5) — (7).

Общее решение системы уравнений (10) записывается в виде

$$\begin{gathered}A_\lambda(z) = [\varphi_1(\lambda, z) + z\varphi_2(\lambda, z)] e^{\lambda z} + [\varphi_3(\lambda, z) + z\varphi_4(\lambda, z)] e^{-\lambda z}\\ B_\lambda(z) = [\psi_1(\lambda, z) - z\varphi_2(\lambda, z)] e^{\lambda z} + [\psi_3(\lambda, z) + z\varphi_4(\lambda, z)] e^{-\lambda z}\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\varphi_1(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_1(\lambda)}{1-2\nu} + \lambda\int_0^z \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi - \right.$$

$$\left. - (3-4\nu)\int_0^z e^{-\lambda\xi}\varkappa_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\varphi_2(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_2(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi\right]$$

$$\varphi_3(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_3(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z \xi e^{\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) - \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi + \right.$$

$$\left. + (3-4\nu)\int_0^z e^{\lambda\xi}\varkappa_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\varphi_4(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{h_4(\lambda)}{1-2\nu} + \lambda\int_0^z e^{\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) - \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi\right]$$

$$\psi_1(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{H_1(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi - \right.$$

$$\left. - (3-4\nu)\int_0^z e^{-\lambda\xi}s_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\psi_3(\lambda, z) = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[\frac{H_3(\lambda)}{1-2\nu} - \lambda\int_0^z \xi e^{\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) - \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi + \right.$$

$$\left. + (3-4\nu)\int_0^z e^{\lambda\xi}s_\lambda(\xi)\,d\xi\right]$$

$$h_1(\lambda) = (1-2\nu)[2(1-\nu)A_\lambda(0) + (1-2\nu)B_\lambda(0)]$$

$$h_2(\lambda) = (1-2\nu)\lambda B_\lambda(0) + (1-\nu)B_\lambda'(0) + (1-\nu)\lambda A_\lambda(0) \tag{16}$$

$$H_1(\lambda) = \frac{1-\nu}{\lambda}[2(1-2\nu)\lambda B_\lambda(0) + (3-4\nu)B_\lambda'(0) + \lambda A_\lambda(0)]$$

$$h_3(\lambda) = h_1(\lambda) - 2(1-2\nu)^2 B_\lambda(0)$$

$$h_4(\lambda) = 2(1-2\nu)\lambda B_\lambda(0) - h_2(\lambda) \tag{17}$$

$$H_3(\lambda) = 4(1-\nu)(1-2\nu)B_\lambda(0) - H_1(\lambda)$$

Из граничных условий (14) сразу же следуют асимптотические соотношения

$$\varphi_1(\lambda, z),\ \varphi_2(\lambda, z),\ \psi_1(\lambda, z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty \tag{18}$$

которые могут быть удовлетворены тогда и только тогда, когда функции $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ будут выбраны следующим образом:

$$h_1(\lambda) = (1-2\nu)(3-4\nu)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\varkappa_\lambda(\xi)\,d\xi - \lambda(1-2\nu)\int_0^\infty \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi$$

$$h_2(\lambda) = \lambda(1-2\nu)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi \tag{19}$$

$$H_1(\lambda) = (1-2\nu)(3-4\nu)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}s_\lambda(\xi)\,d\xi + \lambda(1-2\nu)\int_0^\infty \xi e^{-\lambda\xi}[s_\lambda(\xi) + \varkappa_\lambda(\xi)]\,d\xi$$

Выбор функций $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ в виде (19) необходим, но не достаточен для выполнения асимптотических соотношений (14); последние будут удовлетворены, если потребовать, например, чтобы $s_\lambda(z)$, $\varkappa_\lambda(z)$ принадлежали классу функций k такому, что для любой $U(z) \in k$ выполняются асимптотические равенства

$$\begin{gathered}\int_z^\infty (z-\xi)\, e^{\lambda(z-\xi)} U(\xi)\, d\xi = O(1) \quad \text{при } z \to \infty \\ \int_0^z (z-\xi)\, e^{-\lambda(z-\xi)} U(\xi)\, d\xi = O(1) \quad \text{при } z \to \infty\end{gathered} \tag{20}$$

В частности, равенства (20) будут выполнены, если объемные силы действуют в некоторой ограниченной области полупространства Ω.

Таким образом, для определения четырех искомых функций (11) имеется система четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений (12), (16) и парные интегральные уравнения (13). Определитель системы (16), связывающей три функции $A_\lambda(0), B_\lambda(0), B_\lambda'(0)$, равен нулю, следовательно, для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы правые части $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ удовлетворяли определенному соотношению, которое в данном случае имеет вид

$$\lambda\, [H_1(\lambda) + h_1(\lambda)] = (3-4\nu) h_2(\lambda) \tag{21}$$

Но, как нетрудно видеть, функции (19) удовлетворяют соотношению (21). Следовательно, одна из функций (11) — пусть это будет $B_\lambda(0) = B(\lambda)$ — остается произвольной; $A_\lambda'(0)$, $A_\lambda(0)$, $B_\lambda'(0)$ выражаются через $B(\lambda)$ формулами

$$\begin{gathered}A_\lambda'(0) = \lambda B(\lambda) \\ A_\lambda(0) = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[\frac{h_1(\lambda)}{1-2\nu} - (1-2\nu) B(\lambda)\right] \\ B_\lambda'(0) = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[2h_2(\lambda) - \frac{\lambda h_1(\lambda)}{1-2\nu} - (1-2\nu)\lambda B(\lambda)\right]\end{gathered} \tag{22}$$

Оставшийся произвол в выборе функции $B(\lambda)$ позволяет удовлетворить граничному условию (6) на площадке контакта. Другими словами, функция $B(\lambda)$ должна быть решением парных интегральных уравнений (13), которые с учетом равенств (22) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty E(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = M(r) \quad (0 \leqslant r < 1) \\ \int_0^\infty \lambda E(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0 \quad (r > 1)\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$2(1-\nu) E(\lambda) = B(\lambda) - \frac{1}{1-2\nu}\left[\frac{2(1-\nu)}{\lambda} h_2(\lambda) - h_1(\lambda)\right] + 2(1-\nu) H(\lambda) \tag{24}$$

$$2(1-\nu) M(r) = \theta(r) + 2(1-\nu)\int_0^\infty H(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda - \frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty \left[\frac{2(1-\nu)}{\lambda} h_2(\lambda) - h_1(\lambda)\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{25}$$

Метод решения парных интегральных уравнений типа (23) изложен, например, в монографии [1]. Согласно [1] решение $E(\lambda)$ уравнений (23) определяется через интеграл

$$E(\lambda) = \int\limits_0^1 \varphi(t) \cos \lambda t \, dt \tag{26}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\left[M(0) + t\int\limits_0^{\pi/2} M'(t \sin\psi)\, d\psi\right] \tag{27}$$

Выражение для компоненты σ_z на площадке контакта $r < 1$ $(z = 0)$ записывается следующим образом:

$$\sigma_z\big|_{\substack{z=0\\ r<1}} = -\int\limits_0^\infty \lambda E(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = \int\limits_r^1 \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dt - \frac{\varphi(1)}{\sqrt{1 - r^2}} \tag{28}$$

Следовательно, из требования непрерывности σ_z на контуре $z = 1$ $(z = 0)$ площадки контакта вытекает условие $\varphi(1) = 0$, или

$$M(0) = -\int\limits_0^{\pi/2} M'(\sin\psi)\, d\psi \tag{29}$$

Равенство (29) определяет зависимость между величиной a неизвестного радиуса площадки контакта и глубиной δ осевого погружения штампа.

Интегрируя выражение (28) по площади круга радиуса 1, нетрудно получить замыкающее соотношение

$$p = \frac{P}{2T_e\pi a^2} = -2\int\limits_0^1 r\sigma_z\big|_{z=0}\, dr = 2\int\limits_0^1 \varphi(t)\, dt \tag{30}$$

связывающее входную величину — осевую силу P — с радиусом a площадки контакта.

Если массовые силы и нормальное напряжение вне площадки контакта отсутствуют $(H(\lambda) = \varkappa_\lambda(z) = з_\lambda(z) = 0)$, то приходим к хорошо изученной, например [1–10], задаче о внедрении жесткого штампа без трения в упругое полупространство. Для случая, когда штамп имеет форму параболоида вращения $\chi(r) = r^2 / 2R$, интегралы, через которые выражено решение рассматриваемой задачи в работе [10], вычисляются в замкнутой форме; для определения компонент σ_{ij}, u_r, u_z получаются следующие формулы $(r > 0,\ z > 0)$:

$$u_r = \frac{z}{r}\left[z\left(V - \frac{1}{V}\right) + \left(V^2 + \frac{1}{2}z^2\left(1 + \frac{1}{V^2}\right)\right)\frac{\partial V}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + \frac{r^2}{2}\arcsin W + \frac{zr^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - W^2}}\frac{\partial W}{\partial z}\right] -$$
$$- \frac{1 - 2\nu}{r}\left[\frac{1}{3}(1 - V^3) - \frac{1}{2}z^2\left(V - \frac{1}{V}\right) - \frac{zr^2}{2}\arcsin W\right]$$

$$u_z = zZ + (1 - \nu)\left[\frac{\pi}{2} - z + z^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{z} - \operatorname{arctg} z\right] +$$
$$+ 2(1 - \nu)\int\limits_0^r \tau \ln\frac{r}{\tau}\left[\frac{\partial V}{\partial z} - \arcsin W - \frac{z}{\sqrt{1 - W^2}}\frac{\partial W}{\partial z}\right] d\tau$$

$$\sigma_r = -Z - z\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_\varphi = -2\nu Z + \frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_z = -Z + z\frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = \frac{z}{r}\left[z\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{r^2}{\sqrt{1-W^2}}\frac{\partial W}{\partial z}\right]$$

где

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - r^2 - z^2 + \sqrt{(1-r^2-z^2)^2 + 4z^2}}$$

$$W = \frac{2}{\sqrt{z^2+(1+r)^2} + \sqrt{z^2+(1-r)^2}}, \quad Z = V - z\arcsin W$$

Выражения для компонент σ_{ij}, u_r, u_z на границе $z = 0$, а также в малой окрестности оси $r = 0$ приведены в [10].

Автор благодарит М. Я. Леонова за ценные указания при выполнении данной работы.

Поступила 14 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
2. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Korper. J. Reine und Angew. Math., 1881, Bd 92.
3. Леонов М. Я. К теории расчета упругих оснований. ПММ, 1939, т. 3, вып 2.
4. Беляев Н. М. К вопросу о местных напряжениях в связи с сопротивлением рельс смятию. Тр. Ленингр. ин-та инж. путей сообщения, 1929, вып. 99.
5. Беляев Н. М. Местные напряжения при сжатии упругих тел. Инженерные сооружения и строительная механика. Л., «Путь», 1924.
6. Галин А. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
7. Динник А. П. Сжатие соприкасающихся тел. Избр. тр., т. 1, гл. 1, Киев, Изд-во АН УССР, 1952.
8. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
9. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
10. Востров В. К. Осесимметричная контактная упруго-пластическая задача для полупространства. Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых, 1970, № 2.