

ты s_{ij} не имеют, однако они являются мерами интенсивности напряженно-деформированного состояния, сумма квадратов которых пропорциональна накопленной энергии в единице объема. Благодаря однородности выражения энергии в терминах s_{ij} его удобно применять при алгоритмизации операций, связанных с варьированием энергии в прямых вариационных методах [7—9]. Например, канонические формы потенциальной энергии в теории оболочек, аналогичные вышеприведенным, применялись для получения матрицы жесткости изгибных конечных элементов и расчетов геометрически нелинейных деформированных состояний упругих тонких тел в [10]. В таких случаях рассматривается зависимость s_{ij} от дискретных параметров q_k ($k = 1, \dots, n$), которые выступают в качестве неизвестных в задаче упругого равновесия, т. е. $s_{ij} = s_{ij}(q_1, \dots, q_n)$. При линейной зависимости s_{ij} от q_k потенциальная энергия в единице объема записывается в виде

$$П_* = \frac{1}{2} k_{rp} q_r q_p, \quad k_{rp} = \frac{\partial s_{ij} \partial s_{ij}}{\partial q_r \partial q_p}.$$

Здесь k_{rp} — коэффициенты симметричной матрицы жесткости [8].

Автор выражает признательность А. Л. Гольденвейзеру за обсуждение родственных вопросов в теории упругих оболочек и В. В. Кабанову за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
3. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.
6. Новожилов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.
7. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. — М.; Л.: Гостехиздат, 1943.
8. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976.
9. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983.
10. Кузнецов В. В. Элементарный анализ геометрии поверхностей и метод конечных элементов в механике упругих оболочек при произвольных перемещениях. — М., 1984. — Деп. ВИМИ 1.11.84, № Д06203.

Поступила 26/VI 1986 г.

УДК 539.376 + 539.538

О ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. М. Александров, А. В. Манжиров

(Москва)

Исследуются двумерные интегральные уравнения, возникающие в контактных задачах для тел со сложными свойствами, задачах износа упругих и вязкоупругих тел. Предлагаются методы решения, основанные на изучении неклассических спектральных свойств интегральных операторов. Обсуждаются области их эффективного применения. Теоретические результаты иллюстрируются прикладным примером.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$(1.1) \quad c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)q(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)Aq(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x),$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{L}_i) f(t) = f(t) - \int_1^t f(\tau) K_i(t, \tau) d\tau \quad (i = 1, 2),$$

$$Af_1(x) = \int_{-1}^1 f_1(\xi) k(\xi, x) d\xi, \quad k(\xi, x) = k(-\xi, -x)$$

при дополнительных условиях

$$(1.2) \quad P(t) = \int_{-1}^1 q(x, t) dx, \quad M(t) = \int_{-1}^1 q(x, t) x dx.$$

Здесь $c(t) > 0$, $\delta(t)$, $\alpha(t)$, $P(t)$, $M(t) \in C[1, T]$; $K_i(t, \tau)$ — вольтерровские ядра [1]; $q(x, t)$ — непрерывная в $L_2[-1, 1]$ по t функция; \mathbf{A} — оператор, вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2[-1, 1]$ в $L_2[-1, 1]$, причем $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k^2(\xi, x) d\xi dx < \infty$.

Разобьем решение на сумму четной и нечетной по x частей, сопровождая их индексами 1 и 2 соответственно, тогда (1.1) и (1.2) примут вид

$$(1.3) \quad c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)q_i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)A_i q_i(x, t) = \delta_i(x, t),$$

$$A_i f_1(x) = \int_{-1}^1 f_1(\xi) k_i(\xi, x) d\xi \quad (i = 1, 2),$$

$$\delta_i(x, t) = \begin{cases} \delta(t) - g_1(x), & i = 1, \\ \alpha(t)x - g_2(x), & i = 2; \end{cases}$$

$$(1.4) \quad P(t) = \int_{-1}^1 q_1(x, t) dx, \quad M(t) = \int_{-1}^1 q_2(x, t) x dx.$$

Допустим, что в (1.3), (1.4) известны все функции, кроме $q_i(x, t)$, $\delta(t)$, $\alpha(t)$. Найдем их. Исследуем четный вариант задачи, положив в (1.3), (1.4) $i = 1$. Заметим, что

$$(1.5) \quad k_1(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{2m2n} P_{2m}^*(x) P_{2n}^*(\xi),$$

где $\{P_{2i}^*(x)\}$ — полная ортонормированная в $L_2[-1, 1]$ система полиномов Лежандра [2].

Введем полное гильбертово пространство четных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$, таких, что интеграл от них по этому отрезку равен нулю. Обозначим его $L_2^0[-1, 1]$.

Теорема 1. Ядро $k_1(\xi, x)$ представимо в виде (см. (1.5))

$$k_1(\xi, x) = k_1^c(\xi, x) + 2^{-1/2} k_2^0(\xi) + 2^{-1/2} k_2^0(x) + D/2,$$

$$\int_{-1}^1 k_1^0(\xi, x) d\xi = 0, \quad k_2^0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{02n} P_{2n}^*(\xi) \in L_2^0[-1, 1],$$

$$k_1^0(\xi, x) = k_1^0(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_{2m2n} P_{2m}^*(x) P_{2n}^*(\xi), \quad D = r_{00},$$

причем оператор $\mathbf{B}_1 \left(\mathbf{B}_1 \varphi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k_1^0(\xi, x) d\xi \right)$ вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2^1[-1, 1]$ в $L_2^0[-1, 1]$,

а последовательность его собственных функций ψ_{2i} , соответствующих собственным числам β_{2i} ($i = 1, 2, \dots$), составляет базис в $L_2^0[-1, 1]$.

Можно показать, что последовательность $\{\psi_{2i}\}$ ($i = 0, 1, \dots$; $\psi_0 = 2^{-1/2}$) — полная ортонормированная система четных функций в $L_2[-1, 1]$. Представим решение в виде

$$(1.6) \quad q_1(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_{2i}(t) \psi_{2i}(x),$$

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i} \psi_{2i}(x), \quad k_2^0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{2i} \psi_{2i}(x).$$

Подставляя (1.6) в (1.3), (1.4), с учетом теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} z_{2i}(t) &= f_{2i}(t) + \int_1^t f_{2i}(\tau) R_{2i}^0(t, \tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots), \\ f_{2i}(t) &= -(c(t) + \beta_{2i})^{-1} [k_{2i}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_0(t) + g_{2i}], \\ \delta(t) &= 2^{-1/2} [c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) z_0(t) + D(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_0(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} k_{2i}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_{2i}(t) + g_0], \quad z_0(t) = 2^{-1/2} P(t), \end{aligned}$$

где $R_i^0(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_i^0(t, \tau) = [c(t) K_1(t, \tau) + \beta_i K_2(t, \tau)] / [c(t) + \beta_i]$.

2. Рассмотрим нечетный вариант задачи (в (1.3), (1.4) $i = 2$). Введем полное гильбертово пространство нечетных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$, таких, что интеграл от произведения функции и x по этому отрезку равен нулю. Обозначим его $L_2^1[-1, 1]$.

Теорема 2. Ядро $k_2(\xi, x)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} k_2(\xi, x) &= k_1^1(\xi, x) + (3/2)^{1/2} \xi k_2^1(x) + (3/2)^{1/2} x k_2^1(\xi) + (3/2) C x \xi, \\ \int_{-1}^1 \xi k_1^1(\xi, x) d\xi &= 0, \quad k_2^1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{12n+1} P_{2n+1}^*(\xi) \in L_2^1[-1, 1], \\ k_1^1(\xi, x) &= k_1^1(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_{2m+1, 2n+1} P_{2m+1}^*(x) P_{2n+1}^*(\xi), \quad C = r_{11} \end{aligned}$$

причем оператор $\mathbf{B}_2 \left(\mathbf{B}_2 \varphi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k_1^1(\xi, x) d\xi \right)$ вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2^1[-1, 1]$ в $L_2^1[-1, 1]$, а последовательность его собственных функций ψ_{2i+1} , соответствующих собственным числам β_{2i+1} ($i = 1, 2, \dots$), составляет базис в $L_2^1[-1, 1]$.

Можно показать, что последовательность $\{\psi_{2i+1}\}$ ($i = 0, 1, \dots$; $\psi_1 = (3/2)^{1/2} x$) — полная ортонормированная система нечетных функций в $L_2[-1, 1]$. Представим решение в форме

$$\begin{aligned} (2.1) \quad q_2(x, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} z_{2i+1}(t) \psi_{2i+1}(x), \\ g_2(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i+1} \psi_{2i+1}(x), \quad k_2^1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{2i+1} \psi_{2i+1}(x). \end{aligned}$$

Подставляя (2.1) в (1.3), (1.4), с учетом теоремы 2 найдем

$$\begin{aligned} z_{2i+1}(t) &= f_{2i+1}(t) + \int_1^t f_{2i+1}(\tau) R_{2i+1}^0(t, \tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots), \\ f_{2i+1}(t) &= -(c(t) + \beta_{2i+1})^{-1} [k_{2i+1}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_1(t) + g_{2i+1}], \\ \alpha(t) &= (3/2)^{1/2} [c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) z_1(t) + C(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_1(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} k_{2i+1}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_{2i+1}(t) + g_1], \quad z_1(t) = (3/2)^{1/2} M(t). \end{aligned}$$

3. Рассмотрим случай, когда в (1.3), (1.4) неизвестны $q(x, t)$, $P(t)$ и $M(t)$. Поскольку для получения решения будет использована классическая процедура спектральной теории операторов [1, 3], приведем лишь основные формулы. Возьмем решение в виде

$$(3.1) \quad q_1(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_{2i}(t) \varphi_{2i}(x), \quad g_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i}^* \varphi_{2i}(x),$$

$$g_2(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_{2i+1}(t) \varphi_{2i+1}(x), \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i+1}^* \varphi_{2i+1}(x),$$

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i} \varphi_{2i}(x), \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} X_{2i+1} \varphi_{2i+1}(x),$$

$$A\varphi_i = \alpha_i \varphi_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь α_i — собственные числа оператора \mathbf{A} , а φ_i — его ортонормированные собственные функции. Подставим (3.1) в (1.3), (1.4), тогда

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &= \Delta_i(t) + \int_1^t \Delta_i(\tau) R_i^*(t, \tau) d\tau, \\ \Delta_i(t) &= \begin{cases} [\delta_i \delta(t) - g_i] d_i^{-1}(t), & i = 0, 2, \dots, \\ [\alpha(t) X_i - g_i] d_i^{-1}(t), & i = 1, 3, \dots, \end{cases} \\ P(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i} \omega_{2i}(t), \quad M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_{2i+1} \omega_{2i+1}(t), \end{aligned}$$

где $R_i^*(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_i^*(t, \tau) = [c(t) K_1(t, \tau) + \alpha_i K_2(t, \tau)] \times \times d_i^{-1}(t)$, $d_i(t) = c(t) + \alpha_i$.

Можно показать, что в выбранном классе функций решение уравнения (1.3) при условиях (1.4) существует, единственно и строится изложенными методами со сколь угодно большой степенью точности.

Отметим некоторые области применения предложенных методов: 1) контактные задачи теории упругости [4] и вязкоупругости для тел с шероховатостями и покрытиями при наличии износа; 2) контактные задачи для неоднородных вязкоупругих стареющих слоистых оснований [5, 6]; 3) контактные задачи износа вязкоупругих оснований со сложной реологией. Сходные уравнения возникли в [7, 8].

В качестве примера рассмотрим плоскую контактную задачу о вдавливании без трения силой $Q(t^0)$ жесткого штампа в поверхность двухслойного основания: неоднородно стареющий тонкий слой [8, 9], однородно стареющий произвольной толщины H . Тонкий слой толщины h лежит без трения на однородно стареющем, сцепленном с недеформируемым основанием. Штамп имеет плоское основание, длина линии контакта $2a$, эксцентриситет приложения силы равен нулю. На основании [9—11] придем к четному варианту уравнения (1.1) при заданном дополнительном условии (см. также [5, 6]), где

$$\begin{aligned} t &= t^0 \tau_1^{-1}, \quad \tau = \tau^0 \tau_1^{-1}, \quad x = x^0 a^{-1}, \quad \delta(t) = \delta^0(t^0) a^{-1}, \\ \alpha(t) &= 0, \quad g(x) = 0, \quad M(t) = 0, \quad H a^{-1} = \lambda, \\ k(\xi, x) &= \pi^{-1} k^0 [(\xi^0 - x^0)/H], \quad \xi = \xi^0 a^{-1}, \\ \kappa(y) &= \kappa^0(y) \tau_1^{-1}, \quad q(x, t) = q^0(x^0, t^0) \theta_2^{-1}(t^0 - \tau_2), \\ K_2(t, \tau) &= K_2^0(t^0 - \tau_2, \tau^0 - \tau_2) \tau_1, \quad K_1(t, \tau) = \theta_2(\tau^0 - \tau_2) \theta_1(t^0) \theta_2^{-1} \times \\ &\quad \times (t^0 - \tau_2) \theta_1^{-1}(\tau^0) \tau_1 K_1^*(t^0, \tau^0), \\ P(t) &= Q(t^0) a^{-1} \theta_2^{-1}(t^0 - \tau_2), \quad c(t) = 0, 5 h a^{-1} \theta_2(t^0 - \tau_2) \theta_1^{-1}(t^0), \\ K_1^*(t^0, \tau^0) &= \frac{1}{h} \int_0^h K_1^v(t^0 + \kappa^0(y), \tau^0 + \kappa^0(y)) dy, \\ K_i^0(t^0, \tau^0) &= E_i(\tau^0) \frac{\partial}{\partial \tau^0} \left[\frac{1}{E_i(\tau^0)} + C_i(t^0, \tau^0) \right] \quad (i = 1, 2), \\ [E_1^*(t^0)]^{-1} &= \frac{1}{h} \int_0^h E_1^{-1}(t^0 + \kappa^0(y)) dy, \end{aligned}$$

$$\theta_1(t^0) = \frac{E_1^*(t^0)}{2(1-\nu_1^2)}, \quad \hat{\theta}_2(t^0) = \frac{E_2(t^0)}{2(1-\nu_2^2)}.$$

Здесь t^0 — текущий момент времени; τ^0 — переменная интегрирования в реальном масштабе времени; x^0 — горизонтальная координата; $\delta^0(t^0)$ — осадка под штампом; $k^0[(\xi^0 - x^0)/H]$ — ядро плоской контактной задачи; ξ^0 — переменная интегрирования в реальном масштабе длин; $\kappa^0(y)$ — функция неоднородного старения по глубине тонкого слоя; $q^0(x^0, t^0)$ — функция контактных давлений под штампом; τ_1 — возраст элементов нижней грани тонкого слоя в момент приложения нагрузки; $K_i^0(t^0, \tau^0)$, $C_i(t^0, \tau^0)$, $E_i(t^0)$, ν_i — ядра и меры ползучести, модули упругомгновенной деформации и коэффициенты Пуассона верхнего ($i = 1$) и нижнего ($i = 2$) слоев; τ_2 — момент изготовления нижнего слоя.

Меры ползучести представим в виде [11]

$$C_i(t^0, \tau^0) = \varphi_i(\tau^0) f_i(t^0 - \tau^0), \quad \varphi_i(t^0) = C_i^0 + A_i^0 e^{-\beta_i^0 t^0},$$

$$f_i(t^0 - \tau^0) = \left(1 - e^{-\gamma_i^0(t^0 - \tau^0)}\right), \quad \beta_i = \hat{\beta}_i \tau_1, \quad \gamma_i = \gamma_i^0 \tau_1.$$

Выберем материалом слоев бетон, тогда, считая упругие характеристики неизменными, возьмем следующие значения параметров [11, 12] (поскольку материал слоев одинаков, индексы при параметрах опустим): $c(t) = 0,2$, $\lambda = 2$, $C^0 E = 0,5522$, $A^0 E = 4$, $\tau_2 = 0$, $\nu = 0,3$, $\beta^0 = 0,031 \text{ сут}^{-1}$, $\gamma^0 = 0,06 \text{ сут}^{-1}$. Исследуем случаи естественного и искусственного неоднородного старения пакета слоев, следуя [6, 12]. Полной характеристикой неоднородного старения является параметр неоднород-

ного старения $\mu = \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\beta \kappa(y)} dy$.

1. Естественное неоднородное старение

$$1 \leq \mu < e^\beta, \tau_1 = 75 \text{ сут}, P(t) = 0,5(1 - \cos 4\pi t).$$

2. Искусственное неоднородное старение

$$0 < \mu \leq 1, \tau_1 = 10 \text{ сут}, P(t) = 0,5[1 - \cos 0,4\pi(t - 1)].$$

Возраст τ_1 для двух случаев старения выбран неодинаковым, поэтому на графиках даны две шкалы безразмерного времени t , причем функции $P(t)$ подобраны так, чтобы в этих шкалах нагрузки задавались одной и той же кривой. Отдельно изучается процесс, когда в случаях 1 и 2 $\mu = 1$, что соответствует однородному старению оснований. Заметим, что в силу [8, 9]

$$k^0(z) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos uz du,$$

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu.$$

Характеристики при однородном ($\mu = 1$), естественном неоднородном ($\mu = 10$) и искусственном неоднородном ($\mu = 0,05$) процессах старения основания обозначим сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно. Штриховые линии всегда относятся к нижней шкале времени, а штрихпунктирные — к верхней.

На рис. 1 представлены зависимости $q(x, t)$ от x : однородное старение при любом t , для которого $P(t) = 1$; естественное неоднородное старение — $t = 1,25$; искусственное неоднородное старение — $t = 3,5$. Видно, что при естественном неоднородном старении распределение контактных давлений становится более равномерным по сравнению со случаем однородного старения пакета слоев, для искусственного неоднородного старения характерна обратная картина.

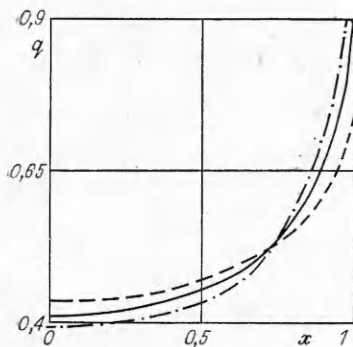


Рис. 1

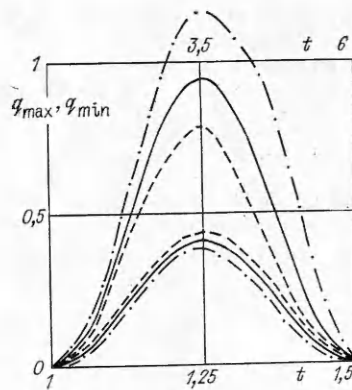


Рис. 2

На рис. 2 показаны изменения максимальных и минимальных контактных напряжений по времени в зависимости от типа старения. Сплошные кривые справедливы в обеих шкалах времени. Это отражает тот факт, что при однородном старении контактные давления зависят только от величины нагрузки, действующей на штамп с плоским основанием, т. е. ползучесть не оказывает влияния на их распределение и применимо упругое решение. Естественно, что при симметричных относительно некоторого момента времени нагрузках сплошные кривые симметричны. При неоднородном старении для тех же нагрузок симметрия аналогичных кривых нарушается.

Тенденцию изменения q_{\max} и q_{\min} легко определить по рисунку. Однако в случае естественного неоднородного старения в каждый момент времени t при $P(t) \neq 0$ максимальные контактные давления всегда меньше, а минимальные всегда больше аналогичных давлений в случае однородного старения. Для искусственного неоднородного старения справедливы обратные выводы.

На рис. 3 приведены зависимости осадки под штампом от времени $\delta(t)$. Две сплошные кривые показывают, что $\delta(t)$ при $\mu = 1$ зависит от реологических свойств основания, в частности от выбора τ_1 . При $t > 1$ величина осадки при естественном неоднородном старении всегда больше, а при искусственном — всегда меньше ее величины для однородного варианта.

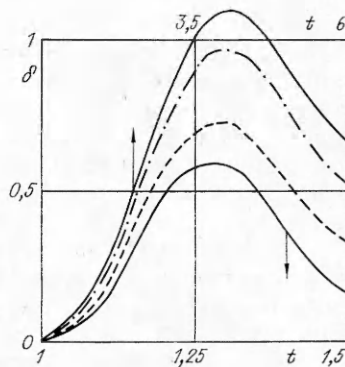


Рис. 3

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
4. Коваленко Е. В. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1981.— Т. 34, № 5.
5. Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 4.
6. Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В. Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно стареющих сред // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1984.— Т. 37, № 2.
7. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.— М.: Наука, 1983.

8. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
9. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ.— 1983.— № 5.
10. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.
11. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
12. Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ.— 1983.— Т. 47, вып. 4.

Поступила 3/VII 1986 г.

УДК 539.374

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Э. И. Блинов, К. Н. Русинко

(Львов)

Решается задача аналитического описания связей между деформациями, напряжениями и температурой «в точке» твердого тела при его термомеханическом нагружении. Напряжения разделяются на равновесные и неравновесные. Равновесные напряжения не зависят от временных эффектов деформирования, и через них методами классической теории пластичности определяется необратимая деформация. Учитывается возврат механических свойств при повышенных температурах. Кроме неперманентной пластической деформации описываются неустановившаяся и высокотемпературная установившаяся ползучесть и температурное последствие.

1. Основные положения. Рассматривается состояние вещества постоянной плотности достаточно малой окрестности точки деформируемого твердого тела как элемента сплошной среды, характеризующего состояние в его точке. Вследствие специфики деформации твердого тела такой феноменологический элемент среды образует закрытую термодинамическую систему, в которой действуют законы классической термодинамики [1].

Эксперименты показывают [2, 3], что если в некоторый момент термомеханического нагружения реального твердого тела зафиксировать деформацию и температуру, то после этого происходит уменьшение напряжений, так что полное (термодинамическое) равновесие в системе наступает только после такой релаксации.

Напряжения, которые остаются после перехода системы из фактического в термодинамически равновесное состояние, назовем равновесными, а релаксирующая часть напряжений, компоненты тензора которых получаются путем вычитания компонент $\langle \sigma_{ij} \rangle$ тензора равновесных напряжений из соответствующих компонент σ_{ij} тензора напряжений, имевших место в момент фиксирования деформации и температуры, назовем неравновесными напряжениями и обозначим ψ_{ij} . Таким образом, в каждый момент деформирования имеет место тождество

$$(1.1) \quad \psi_{ij} = \sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

По определению неравновесные напряжения непосредственно выражают термодинамическую неравновесность, т. е. кинетику деформирования реального твердого тела во времени, отражая нулевое начало термодинамики для рассматриваемого случая.

В термомеханике тип среды в смысле «реологического закона» исследуемого материала [1] полностью зависит от специфики ее диссипации. При известной диссипативной функции соотношения, определяющие связи между напряжениями и деформациями в точке среды, т. е. тип среды, могут быть легко найдены.

Полная плотность производства энтропии в точке среды, т. е. диссипативная функция феноменологического элемента в рамках неравновес-