УДК 632.5

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТЕПЛОПЕРЕНОС В НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПОТОКЕ ВОДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЧАСТИЦЫ МЕДИ, НА СЖИМАЮЩЕЙСЯ ПО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЕ

М. Ш. Уддин, А. Заиб*, К. Бхаттачарийа**,***

Университет г. Кхулна, Кхулна, Бангладеш
* Федеральный университет искусств, наук и технологий Урду, Карачи, Пакистан
** Инженерный институт Бенаресского индуистского университета, 221005 Варанаси, Индия
*** Университет г. Бурдван, Бурдван, Индия
E-mails: sharif_ku@yahoo.com, zaib20042002@yahoo.com, krish.math@yahoo.com

Изучается влияние теплового излучения на теплоперенос в неустановившемся течении наножидкости (вода, содержащая частицы меди) на сжимающейся по экспоненциальному закону пористой пластине. С помощью преобразования исходная задача сводится к краевой задаче для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. С использованием численного метода получены два неавтомодельных решения и выполнен их анализ при различных значениях параметров задачи. Установлено, что наличие теплового излучения приводит к существенному увеличению скорости переноса тепла, при этом толщина теплового пограничного слоя уменьшается.

Ключевые слова: тепловое излучение, неустановившееся течение, теплоперенос, неавтомодельные решения, наножидкость, сжимающаяся пластина, экспоненциальный закон.

DOI: 10.15372/PMTF20170411

Введение. Изучению свойств наножидкостей посвящено большое количество работ, поскольку такие жидкости широко применяются в различных технологических процессах и встречаются в природе. Например, наножидкости используются при охлаждении электронных устройств, транспортировке различных веществ, в химических каталитических реакторах и т. п. Течение крови в венах живых организмов также является течением наножидкости.

Модель наножидкости впервые была предложена в работе [1]. Наножидкость — это жидкость (базовая жидкость), в которой содержатся наночастицы оксидов, металлов, карбидов, нитридов или нанотрубки. В качестве базовой жидкости используются моторные масла, вода, этиленгликоль и т. д. Большинство базовых жидкостей, таких как смазочные

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального совета по высшей математике, Департамента атомной энергии и правительства Индии.

вещества, вода, нефтепродукты и др., имеют низкую теплопроводность, и скорость переноса тепла в них не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к базовым жидкостям, используемым для быстрого охлаждения в современных устройствах. Надежным способом увеличения теплопроводности базовых жидкостей является добавление в них наночастиц. Наножидкости используются при создании наноматериалов [2] и жидкостей с заданными свойствами [3], а также для очищения различных поверхностей от масел, поскольку они обладают хорошей смачиваемостью и растекаемостью [4]. Явление теплопереноса в пограничном слое жидкости на растягиваемой пленке встречается во многих технологических процессах (производство бумаги, стекловолокна, горячая прокатка).

В работе [5] решалась задача о течении в пограничном слое, которое вызвано растяжением пленки по линейному закону, теплоперенос в таком течении изучался в [6]. Течение жидкости на сжимающейся пленке исследовалось в [7]. В работе [8] получены условия существования и единственности автомодельного решения задачи о течении жидкости на сжимающейся пленке. Теплоперенос в пограничном слое жидкости на растягиваемой пленке, скорость которой изменялась по экспоненциальному закону, изучался в работе [9]. Такая же задача решалась в [10] с учетом всасывания жидкости через поверхность пленки. В [11] рассмотрена задача о течении в пограничном слое наножидкости на растягивающейся пленке, скорость которой изменялась по линейному закону. В [12] с использованием метода гомотопического анализа получено аналитическое решение задачи о течении наножидкости на растягивающейся по экспоненциальному закону пленке. В [13] исследовалось течение в пограничном слое жидкости в окрестности точки торможения при набегании потока на растягивающуюся (сжимающуюся) пленку. Автомодельное решение задачи о переносе тепла в окрестности растягивающейся пленки, помещенной в наножидкость, получено в работе [14]. В [15] изучался теплоперенос в окрестности точки торможения на сжимающейся (растягивающейся) пластине в потоке жидкости с наночастицами меди. В [16] исследована смешанная конвекция в окрестности точки торможения на сжимающейся пластине, помещенной в поток жидкости, содержащей наночастицы меди. Влияние сил плавучести на теплоперенос в окрестности точки торможения на сжимающейся (растягивающейся) пластине в потоке жидкости изучено в работе [17]. В [18] исследовался теплоперенос в наножидкости в окрестности движущейся проницаемой плоской поверхности. В [19] изучен теплоперенос в наножидкости в окрестности сжимающейся (растягивающейся) пористой пленки.

Исследование нестационарных задач позволяет выявить новые закономерности течения жидкости в окрестности сжимающейся пленки. Нестационарное течение в пограничном слое в окрестности сжимающейся пленки с учетом всасывания изучалось в работе [20]. В [21] исследовано нестационарное течение электропроводящей жидкости в окрестности сжимающейся пленки. В [22] рассмотрено двумерное течение в пограничном слое неньютоновской степенной жидкости в окрестности сжимающейся пленки. Теплоперенос в окрестности точки торможения в неустановившемся потоке, набегающем на сжимающуюся (растягивающуюся) пленку, изучался в работе [23].

В [24] решена задача о неустановившемся течении наножидкости в окрестности проницаемой сжимающейся (растягивающейся) по линейному закону пленки.

При исследовании течения жидкости, происходящего при высокой температуре, необходимо учитывать тепловое излучение. Имеется небольшое количество работ, в которых изучалось нестационарное течение жидкости, вызванное сжатием пленки, с учетом теплового излучения. В [25] исследован процесс теплопереноса в пограничном слое жидкости, обтекающей клин, с учетом теплового излучения. В [26] с учетом теплового излучения изучалось влияние сил плавучести на тепломассоперенос в жидкости в окрестности точки торможения на растягивающейся пленке. В работе [27] исследовано влияние теплового излучения на теплоперенос в жидкости в окрестности точки торможения на проницаемой растягивающейся пленке. Автомодельное решение задачи о теплопереносе с учетом теплового излучения в жидкости в окрестности движущейся пластины получено в [28]. В [29] изучалось влияние теплового излучения на течение микрополярной жидкости в окрестности пористой сжимающейся пленки. В работе [30] исследовано влияние теплового излучения на течение жидкости в окрестности пористой сжимающейся по экспоненциальному закону пленки, в [31] — на магнитогидродинамическое течение жидкости в окрестности сжимающейся пленки с учетом конвективных краевых условий.

В настоящей работе решается задача о течении наножидкости вблизи сжимающейся по экспоненциальному закону пленки с учетом теплового излучения.

1. Математическая формулировка задачи. Рассмотрим неустановившееся течение несжимаемой наножидкости на сжимающейся по экспоненциальному закону пластине с учетом теплового излучения. Базовой жидкостью является вода, наполнителем — наночастицы меди. Уравнения неразрывности, движения и теплопереноса с учетом теплового излучения имеют вид [24, 32]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{(\rho c_p)_{nf}}\,\frac{\partial q_r}{\partial y}. \tag{3}$$

Для системы (1)–(3) задаются следующие начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned} t<0:&\qquad u=0, \quad v=0, \quad T=T_\infty,\\ t\geqslant 0:&\qquad u=-U_w, \quad v=-v_w, \quad T=T_w(x,t)=T_\infty+T_0\,\mathrm{e}^{x/(2L)}\,/(1-\gamma t), \quad y=0,\\ &\qquad u\to 0, \quad T\to T_\infty, \quad y\to\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

В (1)–(4) u, v — компоненты вектора скорости в направлениях осей x и y соответственно; $U_w = a\,\mathrm{e}^{x/L}\,/(1-\gamma t)$ — переменная скорость частиц, принадлежащих поверхности пластины; $a>0$ и $\gamma>0$ — константы, имеющие размерности [м/с] и [с$^{-1}$] соответственно; L — характерная длина; $v_w = v_0\,\mathrm{e}^{x/(2L)}\,/\sqrt{1-\gamma t}$ — переменная скорость всасывания; $v_0>0$ — константа; T — температура; q_r — поток тепла; T_w — температура поверхности пластины; T_0 — отсчетная температура; T_∞ — постоянная температура потока на бесконечности; μ_{nf} — вязкость наножидкости; ρ_{nf} — плотность наножидкости; α_{nf} — коэффициент термодиффузии наножидкости; $(\rho c_p)_{nf}$ — удельная теплоемкость наножидкости [33]:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2,5}}, \qquad \rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s, \qquad \alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}},$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1-\varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_s, \qquad \frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_s + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \varphi(k_f - k_s)},$$

φ — объемная доля твердых частиц в наножидкости; k_{nf} — теплопроводность наножидкости; μ_f — вязкость базовой жидкости; k_f — теплопроводность базовой жидкости; k_s — теплопроводность твердых частиц; $(\rho c_p)_f$ — удельная теплоемкость базовой жидкости; $(\rho c_p)_s$ — удельная теплоемкость твердых частиц. Для потока тепла примем аппроксимацию Росселанда [34]:

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*}\,\frac{\partial T^4}{\partial y}$$

(σ^* — константа Стефана — Больцмана; k^* — коэффициент поглощения). Температура такова, что величину T^4 можно разложить в ряд Тейлора. Разлагая T^4 в окрестности точки T_∞ и пренебрегая членами более высокого порядка малости, получаем

$$T^4 \simeq 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4. \tag{5}$$

С учетом (5) уравнение (3) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*(\rho c_p)_{nf}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Выполним следующую замену переменных:

$$\begin{gathered} u = \frac{a}{1-\gamma t}\,\mathrm{e}^{x/L} f'(\eta), \qquad v = -\sqrt{\frac{a v_f}{2L(1-\gamma t)}}\;\mathrm{e}^{x/(2L)}[f(\eta) + \eta f'(\eta)], \\ \eta = \sqrt{\frac{a}{2Lv_f(1-\gamma t)}}\;\mathrm{e}^{x/(2L)}\,y, \qquad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}. \end{gathered} \tag{7}$$

В переменных (7) уравнения (2), (6) сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{1}{(1-\varphi)^{2,5}(1-\varphi+\varphi\,\rho_s/\rho_f)}\,f''' + ff'' - 2f'^2 - A(2f' + \eta f'') = 0, \\ \frac{k_{nf}/k_f}{\mathrm{Pr}\,[1-\varphi+\varphi(\rho c_p)_s/(\rho c_p)_f]}\,\theta'' + \frac{3N}{3N+4}\,[f\theta' - f'\theta - A(2\theta + \eta\theta')] = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

а краевые условия приводятся к виду

$$f(0) = S, \quad f'(0) = -1, \quad \theta(0) = 1, \quad f'(\infty) \to 0, \quad \theta(\infty) \to 0, \tag{9}$$

где штрих обозначает производную по переменной η; $\mathrm{Pr} = v_f/\alpha_f$ — число Прандтля; $N = k_{nf}k^*/(4\sigma^* T_\infty^3)$ — параметр теплового излучения; $S = v_0\sqrt{2L/(av_f)} > 0$ — параметр всасывания; $A = \gamma L\,\mathrm{e}^{-x/L}/a$ — параметр неустановившегося течения. При $A \neq 0$ течение является нестационарным, и решение, полученное в данной работе, не является автомодельным. При $A = 0$ течение является установившимся и полученное решение является автомодельным.

Выражения для локального коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта записываются в виде

$$C_f = \frac{\mu_{nf}}{\rho_f U_w^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}, \qquad \mathrm{Nu}_x = -\frac{xk_{nf}}{k_f(T_w - T_\infty)}\Big(\Big(1 + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k_{nf}k^*}\Big)\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0},$$

или

$$C_f\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\sqrt{\frac{2L}{x}} = \frac{1}{(1-\varphi)^{2,5}}\,f''(0), \qquad \mathrm{Nu}_x\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}\sqrt{\frac{2L}{x}} = -\frac{k_{nf}}{k_f}\,\frac{3N+4}{3N}\,\theta'(0),$$

где $\mathrm{Re}_x = xU_w/v_f$ — локальное число Рейнольдса.

2. Результаты решения задачи и их обсуждение. Численное решение системы дифференциальных уравнений (8) с краевыми условиями (9) было получено с использованием пакета Matlab при различных значениях параметра нестационарности потока A, параметра теплового излучения N, объемной доли твердых частиц φ, числа Прандтля Pr и параметра всасывания S. Теплофизические характеристики рассматриваемой жидкости (воды) и частиц меди приведены в таблице.

Термофизические характеристики воды и частиц меди

Компонент наножидкости	C_p, Дж/(кг · K)	ρ, кг/м^3	k, Вт/(м · K)	$\alpha \cdot 10^{-7}$, м^2/с
Вода	4179	997,1	0,613	1,47
Частицы меди	385	8933	400	1163,1

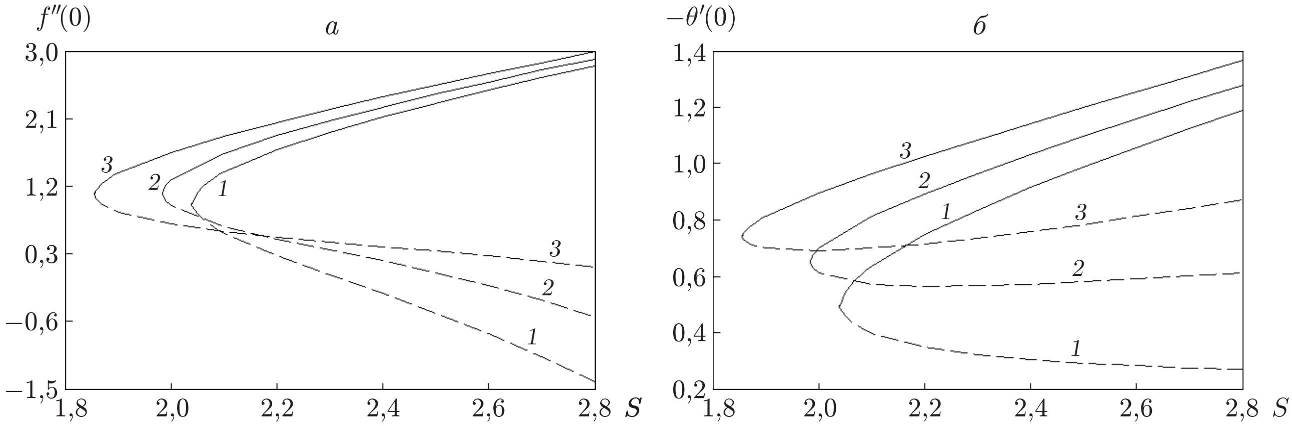

Рис. 1. Зависимости $f''(0)$ (*а*) и $-\theta'(0)$ (*б*) от параметра S при $\varphi = 0{,}05$, $\mathrm{Pr} = 1$, $N = 2$ и различных значениях A:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $A = 0$, *2* — $A = 0{,}2$, *3* — $A = 0{,}4$

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и коэффициента теплопереноса $-\theta'(0)$ от параметра S при различных значениях параметра A. Видно, что с увеличением параметра A значения $f''(0)$ и $-\theta'(0)$ увеличиваются. В случае установившегося течения ($A = 0$) при $S \geqslant 2{,}038$ имеется два автомодельных решения, при $S < 2{,}038$ решения отсутствуют. В случае неустановившегося течения при $A = 0{,}2$ и $S \geqslant 1{,}985$ имеется два неавтомодельных решения, при $S < 1{,}985$ решения отсутствуют; при $A = 0{,}4$ и $S \geqslant 1{,}856$ имеется два неавтомодельных решения, при $S < 1{,}856$ решения отсутствуют. Таким образом, с увеличением параметра нестационарности потока A уменьшается нижнее граничное значение интервала изменений параметра всасывания S, в котором существует два решения.

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и коэффициента теплопереноса $-\theta'(0)$ от параметра S при различных значениях объемной доли твердых частиц φ.

Для первого решения значения $f''(0)$ увеличиваются с увеличением φ, для второго решения значения $f''(0)$ уменьшаются с увеличением φ (см. рис. 2,*а*). Значения $-\theta'(0)$ уменьшаются с увеличением φ для обоих решений (см. рис. 2,*б*).

Интегрирование уравнений по параметру η проводилось до тех пор, пока разность на бесконечности между полученным решением и заданными значениями параметров потока не становилась меньше заданной малой величины.

Для каждого значения параметра φ существует критическое значение S_c параметра S, такое что при $S > S_c$ существует два решения. При $A = 0{,}2$ эти значения равны $S_c = 2{,}199$; 1,985; 1,874 для $\varphi = 0$; 0,05; 0,10 соответственно. При увеличении объемной доли частиц в жидкости φ критическое значение S_c уменьшается.

На рис. 3, 4 приведены зависимости $-\theta'(0)$ от параметра S при различных значениях числа Прандтля Pr и параметра теплового излучения N. Как для первого решения, так и для второго с увеличением числа Прандтля и параметра теплового излучения величи-

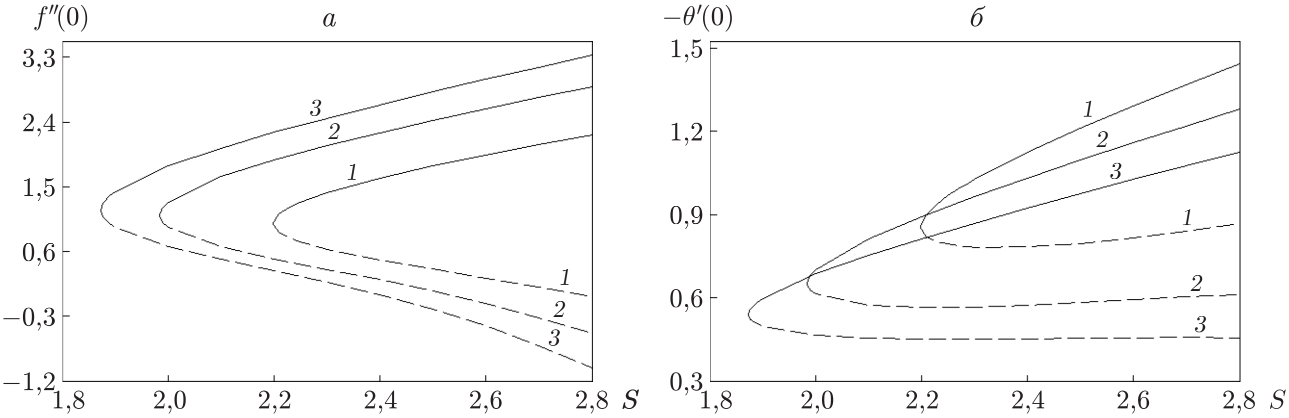

Рис. 2. Зависимости $f''(0)$ (*а*) и $-\theta'(0)$ (*б*) от параметра S при $A = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $N = 2$ и различных значениях параметра φ:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $\varphi = 0$, *2* — $\varphi = 0{,}05$, *3* — $\varphi = 0{,}10$

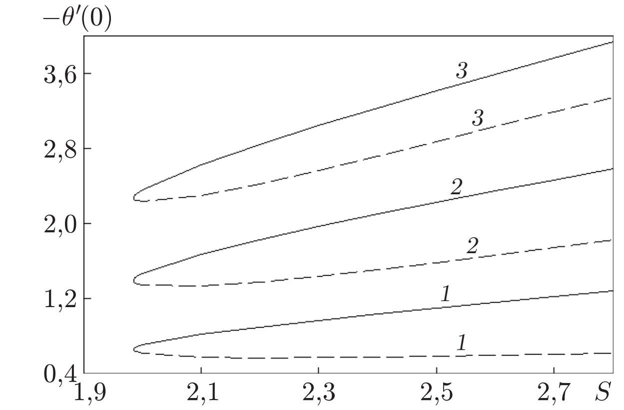

Рис. 3

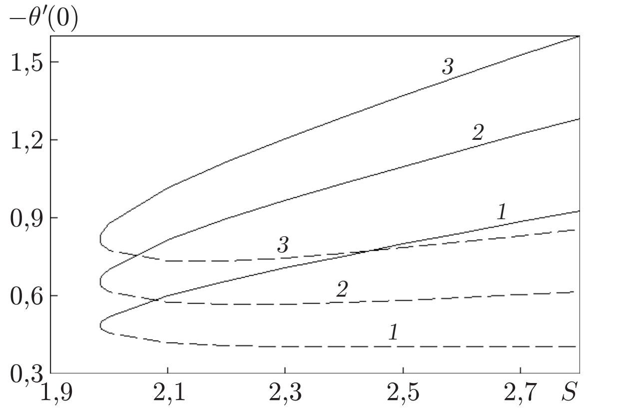

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость $-\theta'(0)$ от параметра S при $A = 0{,}2$, $\varphi = 0{,}05$, $N = 2$ и различных значениях параметра Pr:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $\mathrm{Pr} = 1$, *2* — $\mathrm{Pr} = 2$, *3* — $\mathrm{Pr} = 3$

Рис. 4. Зависимость $-\theta'(0)$ от параметра S при $A = 0{,}2$, $\varphi = 0{,}05$, $\mathrm{Pr} = 1$ и различных значениях параметра N:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $N = 1$, *2* — $N = 2$, *3* — $N = 4$

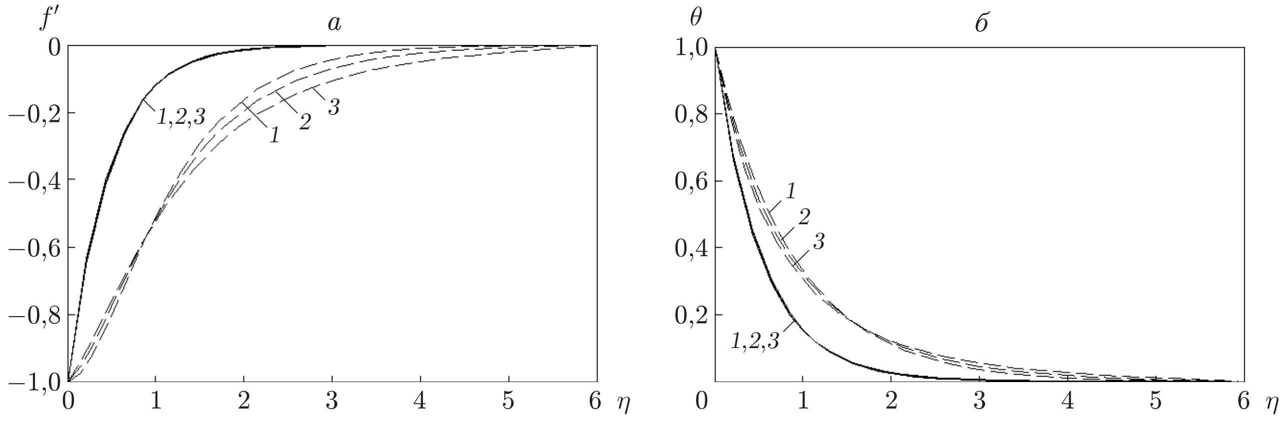

Рис. 5. Распределения скорости (a) и температуры ($б$) по толщине пограничного слоя при $\varphi = 0{,}05$, $S = 2{,}3$, $\Pr = 2$, $N = 2$ и различных значениях параметра A: сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $A = 0$, *2* — $A = 0{,}1$, *3* — $A = 0{,}2$

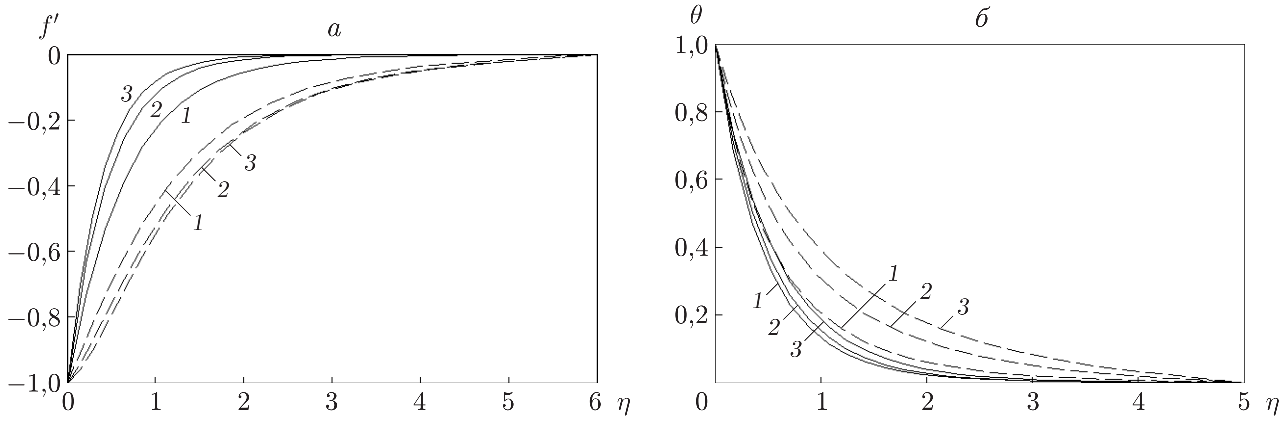

Рис. 6. Распределения скорости (a) и температуры ($б$) по толщине пограничного слоя при $A = 0{,}2$, $S = 2{,}3$, $\Pr = 2$, $N = 2$ и различных значениях параметра φ: сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $\varphi = 0$, *2* — $\varphi = 0{,}05$, *3* — $\varphi = 0{,}10$

на $-\theta'(0)$ увеличивается. Таким образом, наличие теплового излучения приводит к увеличению скорости теплопереноса в движущейся жидкости.

На рис. 5 представлены распределения скорости и температуры по толщине пограничного слоя при различных значениях параметра A. Видно, что с увеличением параметра A скорость потока вблизи пластины увеличивается, а вдали от нее уменьшается. Таким образом, толщина гидродинамического пограничного слоя увеличивается с увеличением параметра A. Толщина теплового пограничного слоя также увеличивается с увеличением параметра A. Для первого решения толщина пограничного слоя меньше, чем для второго.

На рис. 6 приведены распределения скорости и температуры по толщине пограничного слоя при различных значениях параметра φ. С увеличением параметра φ скорость жидкости увеличивается для первого решения и уменьшается для второго. При этом увеличивается температура жидкости в каждой точке и, следовательно, толщина теплового пограничного слоя. Увеличение температуры обусловлено тем, что с увеличением объемной доли частиц возрастает теплопроводность наножидкости.

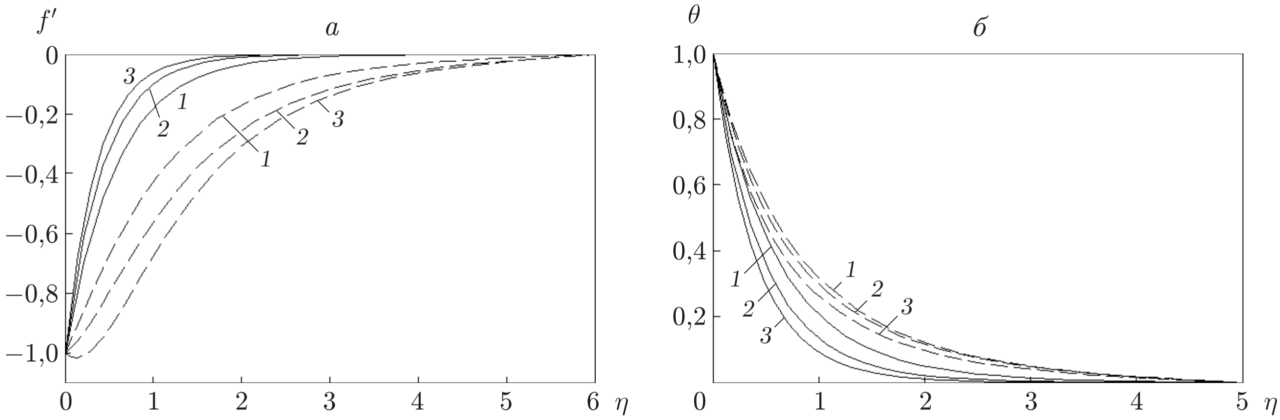

Рис. 7. Распределения скорости (a) и температуры ($б$) по толщине пограничного слоя при $A = 0{,}2$, $\varphi = 0{,}05$, $\Pr = 2$, $N = 2$ и различных значениях параметра S:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $S = 2{,}1$, *2* — $S = 2{,}4$, *3* — $S = 2{,}7$

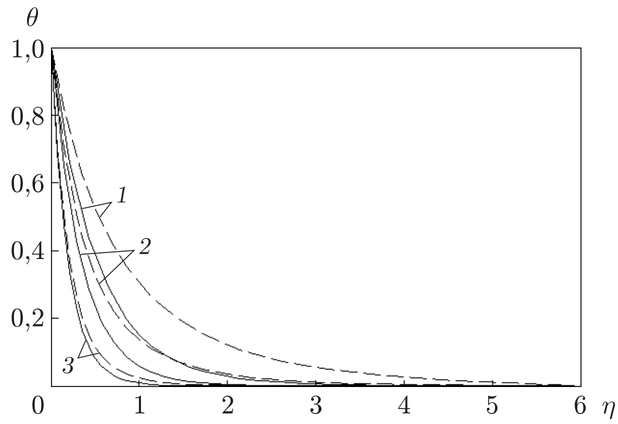

Рис. 8

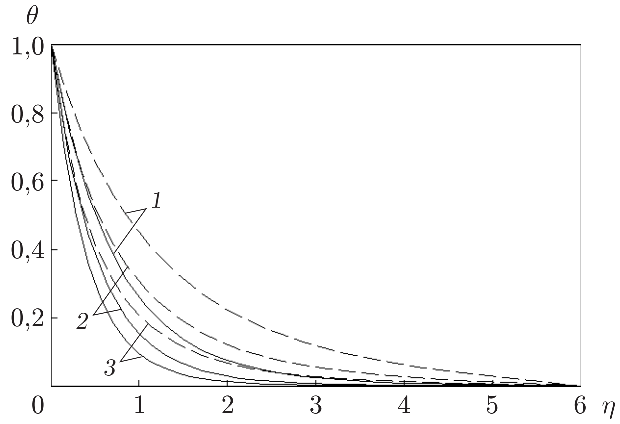

Рис. 9

Рис. 8. Распределение температуры по толщине пограничного слоя при $A = 0{,}2$, $\varphi = 0{,}05$, $S = 2{,}3$, $N = 2$ и различных значениях числа Прандтля $\Pr$:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $\Pr = 2$, *2* — $\Pr = 3$, *3* — $\Pr = 5$

Рис. 9. Распределение температуры по толщине пограничного слоя при $A = 0{,}2$, $\varphi = 0{,}05$, $S = 2{,}3$, $\Pr = 2$ и различных значениях параметра N:
сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $N = 1$, *2* — $N = 2$, *3* — $N = 4$

Изменяя параметр всасывания, можно регулировать завихренность жидкости, возникающую вследствие сжатия пластины, и, следовательно, толщину пограничного слоя. На рис. 7 представлены распределения скорости и температуры по толщине пограничного слоя при различных значениях параметра S. Видно, что с увеличением параметра S скорость увеличивается для первого решения и уменьшается для второго (см. рис. 7,*а*). Для обоих решений толщина теплового пограничного слоя уменьшается с увеличением параметра S (см. рис. 7,*б*). С увеличением параметра всасывания частицы жидкости притягиваются к поверхности пластины, вследствие чего уменьшается диффузия завихренности в жидкость.

На рис. 8, 9 приведены распределения температуры по толщине пограничного слоя при различных значениях числа Прандтля и параметра излучения. Видно, что для обоих решений с увеличением числа Прандтля температура жидкости уменьшается (см. рис. 8). Температура жидкости и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются с увеличением параметра теплового излучения N для обоих решений (см. рис. 9).

Заключение. Численно решена задача о теплопереносе в неустановившемся течении наножидкости в окрестности пористой пластины, сжимающейся по экспоненциальному закону. В качестве базовой жидкости использовалась вода, в качестве наполнителя — частицы меди. Исходная задача сведена к краевой задаче для двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено два неавтомодельных решения задачи и выполнен их анализ при различных значениях параметров задачи. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

При увеличении параметра, характеризующего степень нестационарности течения, коэффициент поверхностного трения и теплопроводность увеличиваются.

При наличии теплового излучения с увеличением числа Прандтля теплопроводность увеличивается. Температура пограничного слоя уменьшается при увеличении интенсивности теплового излучения.

Как для первого решения, так и для второго с увеличением объемной доли частиц меди в наножидкости коэффициент поверхностного трения и скорость жидкости увеличиваются, а коэффициент теплообмена уменьшается.

С увеличением объемной доли частиц меди в наножидкости увеличивается диапазон значений параметра всасывания, в котором существует неавтомодельное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Choi S. U. S., Eastman J. A.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // Proc. of the ASME Intern. mech. engng congress and exposition, San Francisco (USA) Nov. 12–17, 1995. N. Y.: ASME, 1995. FED V. 231/MD V. 66. P. 99–105.
2. **Kinloch I. A., Roberts S. A., Windle A. H.** A rheological study of concentrated aqueous nanotube dispersions // Polymer. 2002. V. 43. P. 7483–7491.
3. **Tohver V., Chan A., Sakurada O., Lewis J. A.** Nanoparticle engineering of complex fluid behaviour // Langmuir. 2001. V. 17. P. 8414–8421.
4. **Wasan D. T., Nikolov A. D.** Spreading of nanofluids on solids // Nature. 2003. V. 423. P. 156–159.
5. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
6. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction and blowing // Canad. J. Chem. Engng. 1977. V. 55. P. 744–746.
7. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching sheet // Quart. Appl. Math. 1990. V. 48. P. 601–610.

8. **Miklavčič, Wang C. Y.** Viscous flow due a shrinking sheet // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64. P. 283–290.
9. **Magyari E., Keller B.** Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface // J. Phys. D. Appl. Phys. 1999. V. 32. P. 577–585.
10. **Bhattacharyya K.** Boundary layer flow and heat transfer over an exponentially shrinking sheet // Chinese Phys. Lett. 2011. V. 28. 074701.
11. **Khan W. A., Pop I.** Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 2477–2483.
12. **Nadeem S., Lee C.** Boundary layer flow of nanofluid over an exponentially stretching surface // Nanoscale Res. Lett. 2012. V. 7. 94.
13. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Stagnation-point flow over a stretching/shrinking sheet in a nanofluid // Nanoscale Res. Lett. 2011. V. 6. P. 623–633.
14. **Hamad M. A. A., Ferdows M.** Similarity solutions to viscous flow and heat transfer of nanofluid over nonlinearly stretching sheet // Appl. Math. Mech. (English Ed.). 2012. V. 33. P. 923–930.
15. **Bachok N., Ishak A., Nazar R., Senu N.** Stagnation-point flow over a permeable stretching/shrinking sheet in a copper-water nanofluid // Boundary Value Problems. 2013. V. 39. P. 1–10.
16. **Das K.** Mixed convection stagnation point flow and heat transfer of Cu — water nanofluids towards a shrinking sheet // Heat Transfer — Asian Res. 2013. V. 42. P. 230–242.
17. **Makinde O. D., Khan W. A., Khan Z. H.** Buoyancy effects on MHD stagnation point flow and heat transfer of a nanofluid past a convectively heated stretching/shrinking sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 62. P. 526–533.
18. **Haile E., Shankar B.** A steady MHD boundary-layer flow of water-based nanofluids over a moving permeable flat plate // Intern. J. Math. Res. 2015. V. 4. P. 27–41.
19. **Zaimi K., Ishak A., Pop I.** Boundary layer flow and heat transfer over a nonlinearly permeable stretching/shrinking sheet in a nanofluid // Sci. Rep. 2014. V. 4. 4404.
20. **Fang T. G., Zhang J., Yao S. S.** Viscous flow over an unsteady shrinking sheet with mass transfer // Chinese Phys. Lett. 2009. V. 26. 014703.
21. **Merkin J. H., Kumaran V.** The unsteady MHD boundary-layer flow on a shrinking sheet // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2010. V. 29. P. 357–363.
22. **Yacob N. A., Ishak A., Pop I.** Unsteady flow of a power-law fluid past a shrinking sheet with mass transfer // Z. Naturforsch. 2012. Bd 67a. S. 65–69.
23. **Bhattacharyya K.** Heat transfer analysis in unsteady boundary layer stagnation-point flow towards a shrinking/stretching sheet // Ain Shams Engng. J. 2013. V. 4. P. 259–264.
24. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Unsteady boundary-layer flow and heat transfer of a nanofluid over a permeable stretching/shrinking sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 2102–2109.
25. **Viskanta R., Grosh R. J.** Boundary layer in thermal radiation absorbing and emitting media // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1962. V. 5. P. 795–806.
26. **Pal D.** Heat and mass transfer in stagnation-point flow towards a stretching surface in the presence of buoyancy force and thermal radiation // Meccanica. 2009. V. 44. P. 145–158.
27. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Slip effects on boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a shrinking sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 308–313.
28. **Mukhopadhyay S., Bhattacharyya K., Layek G. C.** Steady boundary layer flow and heat transfer over a porous moving plate in presence of thermal radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 2751–2757.

29. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C., Pop I.** Effects of thermal radiation on micropolar fluid flow and heat transfer over a porous shrinking sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 2945–2952.
30. **Mukhopadhyay S., Gorla R. S. R.** Effects of partial slip on boundary layer flow past a permeable exponential stretching sheet in presence of thermal radiation // Heat Mass Transfer. 2012. V. 48. P. 1773–1781.
31. **Nadeem S., Haq R. U.** Effect of thermal radiation for magnetohydrodynamic boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with convective boundary condition // J. Comput. Theoret. Nanosci. 2014. V. 11. P. 1–9.
32. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Boundary layer stagnation-point flow and heat transfer over an exponentially stretching/shrinking sheet in a nanofluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 8122–8128.
33. **Oztop H. F., Abu-Nada E.** Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2008. V. 29. P. 1326–1336.
34. **Brewster M. Q.** Thermal radiative transfer properties. N. Y.: John Wiley and Sons, 1972.

Поступила в редакцию 6/XI 2014 г.,
в окончательном варианте — 17/V 2016 г.