УДК 536.24

# ВЛИЯНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОЙ ОБОЛОЧКИ НА ТОЛЩИНУ ПАРОВОЙ ПЛЕНКИ ПРИ КИПЕНИИ СВЕРХТЕКУЧЕГО ГЕЛИЯ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

П. В. Королев, А. П. Крюков, Ю. Ю. Пузина

Национальный исследовательский университет "МЭИ", 111250 Москва, Россия
E-mails: Korolyov2007@yandex.ru, KryukovAP@mail.ru, Puzina2006@inbox.ru

Теоретически исследовано кипение сверхтекучего гелия на цилиндрическом нагревателе, расположенном внутри коаксиальной пористой оболочки, в условиях невесомости. С использованием методов молекулярно-кинетической теории проведен расчет стационарных процессов переноса на межфазной поверхности. Путем решения кинетического уравнения Больцмана моментным методом на основе четырехмоментного приближения в виде двустороннего максвеллиана получено соотношение, с помощью которого рассчитывается плотность теплового потока при пленочном кипении на цилиндрической нагревающей поверхности в случае, когда толщина пленки сопоставима с диаметром нагревателя. Движение нормального компонента сверхтекучей жидкости в порах описывается уравнениями, учитывающими особенности тепломассопереноса в сверхтекучем гелии. Получено соотношение, связывающее толщину паровой пленки со структурными характеристиками и геометрическими размерами пористой оболочки. Проведен анализ результатов расчетов.

Ключевые слова: гелий-II, тепломассоперенос, пленочное кипение, невесомость, пористая структура.

DOI: 10.15372/PMTF20150412

**Введение.** Для совершенствования методов охлаждения и криостатирования в технологических линиях промышленных объектов, а также в аэрокосмических технологиях необходимо проводить экспериментальные и теоретические исследования в области сверхнизких температур. В настоящей работе изучается пленочное кипение гелия-II (He-II) в условиях невесомости. При этом возникает проблема удержания жидкости в рабочем объеме, в отличие от условий полной земной гравитации, когда увеличение толщины паровой пленки ограничивается за счет гидростатической разности давлений в жидкости. Поэтому предлагается использовать пористую цилиндрическую проницаемую для потоков тепла и массы оболочку, внутри которой за счет действия сил вязкого трения создается давление, избыточное по отношению к внешнему давлению [1]. Ранее рассматривался вариант с использованием пористой оболочки из тканых металлических сеток [2]. При этом анализ процессов тепломассопереноса позволил выявить некоторые особенности, обусловленные наличием течения квантовой жидкости через пористый слой [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-08-00980, 13-08-00673-а).

© Королев П. В., Крюков А. П., Пузина Ю. Ю., 2015

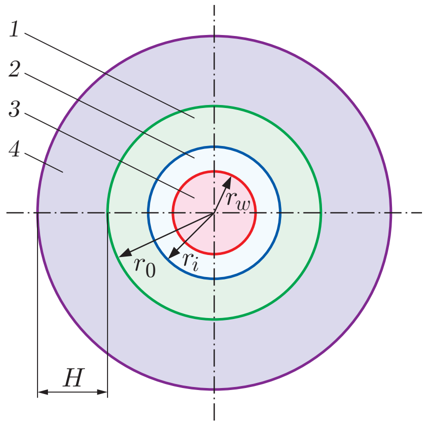


Рис. 1. Физическая модель:
*1* — сверхтекучий гелий, *2* — паровая пленка, *3* — нагреватель, *4* — пористое тело

В данной работе проводится расчет стационарного радиуса паровой пленки в зависимости от структурных и геометрических характеристик пористого тела. Используя эти зависимости, можно выбрать материал оболочки для получения необходимого радиуса паровой пленки, что позволит упростить проектирование экспериментальной ячейки для исследования кипения гелия-II в условиях невесомости [2].

При исследовании пленочного кипения сверхтекучего гелия для описания процессов, происходящих в паре и на межфазной поверхности, необходимо применять методы молекулярно-кинетической теории газов, т. е. решать кинетическое уравнение Больцмана. Существуют линейное [4] и нелинейное [5] соотношения для определения плотности теплового потока при пленочном кипении в случае плоской геометрии задачи, полученные моментным методом решения кинетического уравнения Больцмана. Однако для расчета плотности теплового потока в случае кипения на цилиндрической нагревающей поверхности при толщине пленки, сопоставимой с диаметром нагревательного элемента, необходимо использовать кинетическое соотношение, полученное для задачи в случае цилиндрической геометрии. Эта формула выводится при решении кинетического уравнения Больцмана моментным методом на основе четырехмоментного приближения в виде двустороннего максвеллиана. Приближенный моментный метод решения кинетического уравнения Больцмана позволяет получить аналитические выражения для расчета макропараметров, применимые при любой степени неравновесности процессов и при сколь угодно малых значениях числа Кнудсена. Задача о теплопереносе через газ, находящийся между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями, непроницаемыми для потока массы, рассматривалась в [6], однако применительно к пленочному кипению в случае цилиндрической геометрии кинетическое уравнение Больцмана еще не решалось моментным методом.

**Постановка задачи.** Цилиндрический нагреватель радиусом $r_w$ помещается внутрь коаксиальной пористой оболочки с фиксированными структурными характеристиками (внутренним радиусом $r_0$, толщиной цилиндрической стенки $H$, проницаемостью $k$), внутреннее пространство которой заполняется сверхтекучим гелием He-II (рис. 1). При подаче заданной тепловой нагрузки $q_w$ на поверхности нагревателя образуется паровая пленка конечной толщины (радиусом $r_i$). В дальнейшем паровой объем увеличивается, заполняя внутреннее пространство пористой трубки. Принимается, что на внешней поверхности пористого тела имеется пленка жидкости, так как He-II обладает хорошей смачиваемостью. Давление пара вблизи межфазной поверхности во внешнем объеме $P_{bs}$ соответствует температуре $T_{bs}$ этой пленки на линии насыщения: $P_{bs} = P_s(T_{bs})$. Жидкость считается несжимаемой, зависимость теплофизических свойств от температуры не учитывается, задача является одномерной и стационарной. В силу принятых условий невесомости пленка является симметричной.

**Математическая модель.** Из молекулярно-кинетического описания процесса испарения-конденсации [4] следует, что между давлением пара вблизи межфазной поверхности $P''$ и поступающим на эту границу удельным тепловым потоком $q_i$ имеется соотношение, справедливое для тонкой по сравнению с диаметром нагревателя пленки пара (которую можно считать плоской):

$$q_i = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P'' - P_s(T_i)\right)\sqrt{2RT_i}\,. \tag{1}$$

Здесь $P_s(T_i)$ — давление, соответствующее температуре $T_i$ на линии насыщения; $R$ — газовая постоянная; $T_i$ — температура межфазной поверхности жидкость — пар. Формула (1) справедлива при равенстве нулю потока массы через границу раздела фаз, что и наблюдается при стационарном пленочном кипении.

В стационарных условиях при механическом равновесии давление пара внутри пленки $P''$ должно быть равно сумме давления $P_{bs}$ и перепада давления $\Delta P$ в пористой цилиндрической оболочке, заменяющего гидростатическую разность давлений. Эта величина определяется размерами и структурными характеристиками материала пористой оболочки. Соответственно справедливо выражение $P'' = P_s(T_{bs}) + \Delta P$. Подставляя давление $P''$, заданное этим соотношением, в формулу (1), получаем

$$q_i = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(P_s(T_{bs}) - P_s(T_i) + \Delta P\right)\sqrt{2RT_i}\,. \tag{2}$$

При $(T_i - T_{bs})/T_{av} \ll 1$ (что справедливо для He-II) из уравнения Клапейрона — Клаузиуса определяется разность давлений насыщения, выраженная через разность температур межфазных поверхностей:

$$P_s(T_{bs}) - P_s(T_i) \approx \frac{\rho''\rho'}{\rho' - \rho''}\,\frac{\Lambda(T_{bs} - T_i)}{T_{av}}. \tag{3}$$

Здесь $\rho'$, $\rho''$ — плотности жидкости и пара соответственно; $\Lambda$ — удельная теплота парообразования; $T_{av} = (T_i + T_{bs})/2$ — средняя температура жидкого гелия. Очевидно, что разность температур может быть представлена в виде $T_i - T_{bs} = (T_i - T_0) + (T_0 - T_{bs})$. Подставляя это выражение в (3), а полученную разность давлений $P_s(T_{bs}) - P_s(T_i)$ — в формулу (2), получаем следующее уравнение:

$$q_i = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big(\Delta P - \frac{\rho''\rho'}{\rho' - \rho''}\,\frac{\Lambda[(T_i - T_0) + (T_0 - T_{bs})]}{T_{av}}\Big)\sqrt{2RT_i}\,. \tag{4}$$

Стационарный перенос тепла по неподвижному слою He-II описывается формулой Гортера — Меллинка $\operatorname{grad} T = -f_{GM}(T)q^3$ [7, 8]. Теплота, поступающая через межфазную границу, разделяющую пленку пара и слой He-II, распространяется далее по жидкости (в слое He-II). При этом в стационарном режиме теплопереноса в силу закона сохранения энергии должно выполняться соотношение

$$q(r) = q_w r_w / r, \tag{5}$$

где $r$ — текущий радиус; $q$ — плотность теплового потока на расстоянии $r$ от оси цилиндрического нагревателя. В случае одномерной постановки соотношение (5) для плотности теплового потока $q$ подставляется в формулу Гортера — Меллинка. В результате интегрирования уравнения после разделения переменных определяется разность температур межфазных поверхностей

$$T_i - T_0 = \frac{1}{4}\,\langle f_{GM}\rangle q_w^3 d_w\Big(\Big(\frac{r_w}{r_i}\Big)^2 - \Big(\frac{r_w}{r_0}\Big)^2\Big), \tag{6}$$

где

$$\langle f_{GM}\rangle = (T_i - T_0)\Big(\int\limits_{T_0}^{T_i} \frac{dT}{f_{GM}(T)}\Big)^{-1} \text{ —}$$

среднее значение функции Гортера — Меллинка в интервале температур от $T_0$ до $T_i$; $T_0$ — температура внутренней поверхности оболочки; $r_i$ — радиус паровой пленки; $r_0$ — внутренний радиус цилиндрической пористой оболочки; $d_w$ — диаметр цилиндрического нагревателя.

Гидравлическое сопротивление пористой оболочки выражается законом Дарси, который в рассматриваемом случае записывается только для нормального компонента He-II, поскольку лишь он обладает вязкостью. В случае ламинарного режима течения имеет место соотношение

$$\eta_n \boldsymbol{V}_{nf} = -k \cdot \operatorname{grad} P, \tag{7}$$

где $k$ — проницаемость; $\eta_n$ — динамическая вязкость нормального компонента; $\boldsymbol{V}_{nf}$ — скорость фильтрации нормального компонента, равная отношению объемного расхода этого компонента к общей площади поперечного сечения (а не к площади сечения, занимаемой порами). При этом рассматривается теплоперенос только в сверхтекучем гелии, теплоперенос в матрице и теплообмен между матрицей и He-II не учитываются.

Градиент давления в пористой структуре при стационарном теплопереносе связан с градиентом температуры в He-II соотношением, следующим из уравнений двухскоростной гидродинамики:

$$\operatorname{grad} P = \rho' S \cdot \operatorname{grad} T \tag{8}$$

($S$ — энтропия сверхтекучего гелия).

Поскольку рассматривается стационарная задача и размеры паровой пленки не увеличиваются, жидкий гелий в порах оболочки неподвижен. В этом случае выражение для плотности теплового потока в сверхтекучем гелии, заполняющем поры, имеет вид

$$\boldsymbol{q} = \rho' S T_{av} \boldsymbol{V}_n, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{V}_n$ — средняя скорость течения нормального компонента в порах, связанная со скоростью фильтрации соотношением $V_n = V_{nf}/\varepsilon_S$, где $\varepsilon_S$ — поверхностная пористость оболочки. В предложенной модели пористая оболочка считается изотропным телом, следовательно, объемная и поверхностная пористости равны: $\varepsilon_V = \varepsilon_S = \varepsilon$. Заменяя в (9) $V_n$ на $V_{nf}/\varepsilon$ и подставляя выражение (8) для $\operatorname{grad} P$ в (7), получаем выражение для $V_{nf}$. Подставляя это выражение в (9) и переходя к скалярной форме записи, находим

$$q_0(r) = -\frac{(\rho' S)^2 T_{av} k}{\varepsilon \eta_n}\,\frac{dT}{dr}, \tag{10}$$

где $q_0(r)$ — среднее значение плотности теплового потока в порах. Учитывая соотношение (5) и тот факт, что средняя плотность теплового потока через общую площадь поперечного сечения равна $\varepsilon q_0(r)$, можно записать

$$q_w\,\frac{r_w}{r} = -\frac{(\rho' S)^2 T_{av} k}{\eta_n}\,\frac{dT}{dr}. \tag{11}$$

Интегрируя это уравнение, получаем выражение для перепада температуры по толщине пористой оболочки

$$T_b - T_0 = -\frac{\eta_n q_w d_w}{2(\rho' S)^2 T_{av} k} \ln\Big(1 + \frac{H}{r_0}\Big). \tag{12}$$

Из уравнения (8) следует, что перепад давления $\Delta P = P_0 - P_b$ в пористой оболочке равен

$$\Delta P = \rho' S (T_0 - T_{bs}), \tag{13}$$

а из соотношения (5) следует, что плотность теплового потока $q_i$, поступающего на межфазную поверхность, равна $q_i = q_w r_w / r_i$. Подставляя в (4) выражения для $q_i$ и $\Delta P$ (см. (13)), а также выражения для перепадов температур $T_i - T_0$ и $T_b - T_0$, получаем соотношения, связывающие структурные характеристики и размеры пористой оболочки и нагревателя с толщиной тонкой паровой пленки:

$$\frac{k}{d_w \ln(1 + H/r_0)} = \frac{2(1-a)\eta_n \sqrt{2RT_i/\pi}/(\rho' S T_{av})}{y + a\rho' S \langle f_{GM}\rangle q_w^2 d_w \sqrt{2RT_i/\pi}\,(y^2 - (r_w/r_0)^2)}, \tag{14}$$

где

$$y = \frac{d_w}{2r_i}, \qquad a = \frac{\rho''}{\rho' - \rho''}\,\frac{\Lambda}{S T_{av}}. \tag{15}$$

Выполняя расчеты по формуле (14), можно принять $T_i \approx T_{av} \approx T_{bs}$, поскольку перепад температуры очень мал (не более $10^{-3}$ K). Если не учитывать перепад температуры в слое He-II, находящемся во внутренней полости оболочки (который существенно меньше перепада по толщине пористой структуры, т. е. $T_i \approx T_0$), то формулу (14) можно упростить:

$$\frac{k}{d_w \ln(1 + H/r_0)} = \frac{2(1-a)\eta_n \sqrt{2RT_i/\pi}}{\rho' S T_{av}}\Big(1 + \frac{\delta}{r_w}\Big). \tag{16}$$

Здесь $\delta = r_i - d_w/2$ — толщина паровой пленки. Таким образом, если перепад температуры во внутренней полости оболочки пренебрежимо мал, то структурные характеристики пористого тела влияют на толщину паровой пленки более существенно, чем величина теплового потока.

**Теплоперенос в паровой пленке.** Для определения теплового потока от нагревателя к межфазной поверхности $q_i$ необходимо рассмотреть вспомогательную задачу о стационарном теплопереносе в двухфазной системе с проницаемой границей раздела фаз в следующей постановке (рис. 2). Цилиндрический нагреватель диаметром $d_w$ погружен в жидкость. Длина нагревателя во много раз превышает его диаметр. Температура нагревателя $T_w$ такова, что от жидкости его отделяет пленка пара с температурой межфазной поверхности $T_i$. Внутренний радиус пленки равен $r_w = d_w/2$, внешний радиус — $r_i$.

Согласно [9] для стационарной осесимметричной задачи кинетическое уравнение Больцмана в цилиндрических координатах имеет вид

$$\xi_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\xi_\theta^2}{r}\frac{\partial f}{\partial \xi_r} - \frac{\xi_r \xi_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \xi_\theta} = J, \tag{17}$$

где $f$ — функция распределения молекул по скоростям; $\xi_r$, $\xi_\theta$ — радиальная и тангенциальная проекции скорости соответственно; $r$ — расстояние от оси нагревателя; $J$ — интеграл столкновений. Умножая обе части уравнения (17) на произвольные функции скоростей $\varphi(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z)$ и записывая его в дивергентной форме [9], получаем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r \varphi f) - \frac{f}{r}\Big(\xi_\theta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_r} - \xi_r \xi_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\theta}\Big) = \varphi J. \tag{18}$$

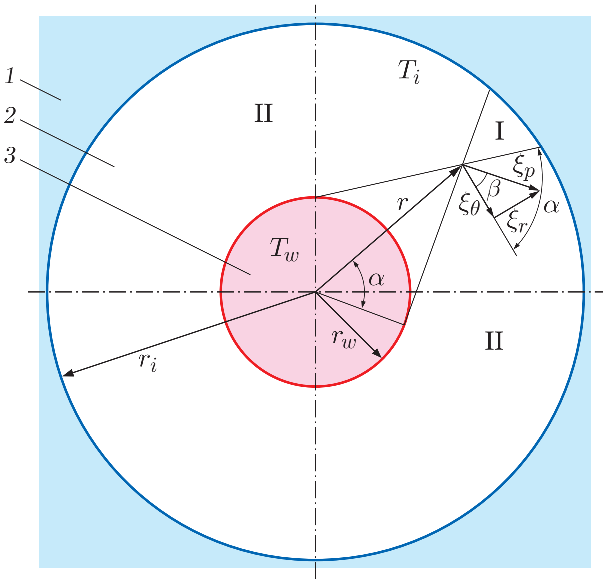


Рис. 2. Физическая модель процесса теплопереноса при пленочном кипении на цилиндрической нагревающей поверхности:
*1* — жидкость, *2* — паровая пленка, *3* — нагреватель; I — "клин влияния", II — область вне "клина влияния"

Подставляя в (18) конкретные функции скоростей $\varphi(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z)$ и интегрируя левую и правую части полученных уравнений по пространству скоростей, получаем систему моментных уравнений.

При решении кинетического уравнения Больцмана, записанного в цилиндрических координатах, функция распределения принимается в следующем виде [6] (см. рис. 2):

$$f = f_1 + f_2;$$

$$f_1 = \frac{n_1}{(2\pi RT_1)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{\xi_p^2 + \xi_z^2}{2RT_1}\Big), \qquad \alpha < \beta < \pi - \alpha; \tag{19}$$

$$f_2 = \frac{n_2}{(2\pi RT_2)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{\xi_p^2 + \xi_z^2}{2RT_2}\Big), \qquad \pi - \alpha < \beta < 2\pi + \alpha. \tag{20}$$

Здесь $\xi_p = \sqrt{\xi_r^2 + \xi_\theta^2}$; $\beta = \operatorname{arctg}(\xi_r/\xi_\theta)$; $\alpha$ — угол, определяемый по формуле

$$\alpha = \arccos(r_w/r). \tag{21}$$

Функция $f_1$ справедлива для молекул, проекция скорости $\xi_p$ которых находится в области I ("клин влияния"), а функция $f_2$ — для молекул, проекция $\xi_p$ которых расположена в области II (см. рис. 2). В рассматриваемом случае связь проекций скоростей в прежних и новых координатах задается формулами

$$\xi_z = \xi_z, \qquad \xi_\theta = \xi_p \cos\beta, \qquad \xi_r = \xi_p \sin\beta. \tag{22}$$

В новых координатах дифференциал в пространстве скоростей имеет вид

$$d\boldsymbol{\xi} = \xi_p \, d\xi_p \, d\xi_z \, d\beta, \tag{23}$$

где $\xi_p$ — модуль якобиана преобразования системы координат.

**Система моментных уравнений.** Уравнение (18) решается в четырехмоментном приближении. В качестве первых трех функций скоростей $\varphi(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z)$ выбираются инварианты столкновений, так как в этом случае моменты интеграла столкновений равны нулю. Выбираются следующие инварианты столкновений: $m$ (масса молекулы), $m\xi_r$, $m\boldsymbol{\xi}^2/2$ ($\boldsymbol{\xi}$ — вектор скорости).

При $\varphi_1 = m$ производные $\partial\varphi/\partial\xi_r$ и $\partial\varphi/\partial\xi_\theta$ равны нулю и уравнение (18) с учетом (22), (23) принимает вид

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}(f_1+f_2)\xi_p^2\sin\beta\,d\xi_p\,d\xi_z\,d\beta\Big) = 0. \tag{24}$$

Подставляя функции $f_1$, $f_2$, заданные выражениями (19), (20), и интегрируя уравнение (24), с учетом соотношения $r\cos\alpha = r_w$, справедливого в силу (21), получаем

$$n_1\sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - n_2\sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = \frac{G}{r_w}. \tag{25}$$

Константа $G$ в уравнении (25) равна или, по крайней мере, прямо пропорциональна произведению плотности потока массы и радиуса $r$. Поскольку рассматривается стационарный процесс, поток массы на межфазной поверхности в данном случае равен нулю. Из решения кинетического уравнения Больцмана для нестационарных задач тепломассопереноса в случае проницаемой межфазной границы [10] следует, что стационарное состояние, характеризующееся отсутствием потока массы через эту границу, достигается за время кинетической релаксации порядка времени между столкновениями молекул пара. Поэтому первое уравнение системы принимает вид

$$n_1\sqrt{T_1} - n_2\sqrt{T_2} = 0. \tag{26}$$

Так как проекции скорости связаны соотношениями (22), то, подставляя в уравнение (18) функцию $\varphi_2 = m\xi_r$ (второй инвариант столкновений), находим

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(r\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_p^2 f\sin^2\beta\,d\boldsymbol{\xi}\Big) - \frac{1}{r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_p^2 f\cos^2\beta\,d\boldsymbol{\xi} = 0. \tag{27}$$

Интегрируя (27), получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\,[rn_1T_1(\pi-2\alpha+\sin 2\alpha)] + \frac{d}{dr}\,[rn_2T_2(\pi+2\alpha-\sin 2\alpha)] = {}\\ = n_1T_1(\pi-2\alpha-\sin 2\alpha) + n_2T_2(\pi+2\alpha+\sin 2\alpha).\end{aligned} \tag{28}$$

Вычислив производную от левой части уравнения (28) и выполнив преобразование с учетом соотношения (21), можно сформулировать второе моментное уравнение:

$$(\sin 2\alpha - 2\alpha)\,\frac{d}{dr}\,(n_1T_1 - n_2T_2) + \pi\,\frac{d}{dr}\,(n_1T_1 + n_2T_2) = 0. \tag{29}$$

Подставляя в уравнение (18) функцию $\varphi_3 = m\boldsymbol{\xi}^2/2 = m(\xi_r^2 + \xi_\theta^2 + \xi_z^2)/2$, являющуюся третьим из выбранных инвариантов столкновения, вычисляя интегралы и выполняя ряд преобразований, при которых используется соотношение (21), выводим третье моментное уравнение:

$$mR\sqrt{\frac{2R}{\pi}}\,\big(n_1T_1\sqrt{T_1} - n_2T_2\sqrt{T_2}\,\big)\,\frac{r_w}{r} = q. \tag{30}$$

Четвертое уравнение получается в результате подстановки в (18) функции $\varphi_4 = m\xi_r\boldsymbol{\xi}^2/2 = m\xi_r(\xi_r^2 + \xi_\theta^2 + \xi_z^2)/2$, не являющейся инвариантом столкновения. Интеграл столкновений вычисляется для молекул, взаимодействующих в соответствии с моделью Максвелла: $F = K_1/r^5$. Уравнение (18) при таком потенциале взаимодействия молекул и $\varphi_4 = m\xi_r\boldsymbol{\xi}^2/2$ было проинтегрировано в работе [6]. В результате интегрирования уравнение (18) принимает вид

$$\frac{d}{dr}\,(n_1T_1^2 - n_2T_2^2) + \pi\,\frac{d}{dr}\,(n_1T_1^2 + n_2T_2^2) = \\ = -\frac{4}{5}\,\frac{A_2}{\sqrt{\pi R}}\,\sqrt{\frac{K_1}{m}}\,(n_1T_1^{3/2} - n_2T_2^{3/2})(n_1(\pi - 2\alpha) + n_2(\pi + 2\alpha))\cos\alpha, \qquad (31)$$

где $A_2 = 1{,}3682$ — константа интегрирования для максвелловских молекул. В работе [6] в качестве результата интегрирования уравнения (18) приведено безразмерное моментное уравнение. Таким образом, получена полная система моментных уравнений (26), (29)–(31), граничные условия которой имеют вид

$$r = r_w\colon\quad T_1(r_w) = T_w, \qquad r = r_i\colon\quad T_2(r_i) = T_i, \quad n_2(r_i) = n_s(r_i). \qquad (32)$$

**Линейное приближение.** Система моментных уравнений приводится к безразмерному виду, вводятся следующие безразмерные переменные: $n_1^* = n_1/n_b$, $n_2^* = n_2/n_b$, $T_1^* = T_1/T_b$, $T_2^* = T_2/T_b$, $r^* = r/r_w$. Затем проводится линеаризация системы безразмерных моментных уравнений. Безразмерные переменные представляются следующим образом: $n_1^* = 1 + N_1$, $n_2^* = 1 + N_2$, $T_1^* = 1 + t_1$, $T_2^* = 1 + t_2$. В результате преобразований линеаризованная система моментных уравнений имеет следующий вид:

$$N_1 - N_2 = -\gamma/2, \qquad t_1 + t_2 + N_1 + N_2 = \text{const}, \qquad t_1 - t_2 = \gamma;$$
$$\frac{dt_1}{d\bar r} = -\frac{4}{15\,\mathrm{Kn}_b}\,\frac{\gamma}{\bar r}. \qquad (33)$$

Здесь $\mathrm{Kn}_b = 2\langle l_b\rangle/d_w$ — число Кнудсена; $\langle l_b\rangle = \sqrt{\pi RT_b}/(3A_2n_b\sqrt{K_1/m}\,)$ — длина свободного пробега максвелловских молекул при температуре, равной характерной температуре; $\gamma$ — безразмерный тепловой поток:

$$\gamma = \frac{q}{mn_bRT_b\sqrt{2RT_b/\pi}}\,\frac{r}{r_w}.$$

Поскольку рассматривается линейное приближение, очевидно, что $\gamma \ll 1$.

Граничные условия для линеаризованной системы имеют вид

$$t_1(1) = T_w/T_b - 1, \quad t_2(r_i/r_w) = T_i/T_b - 1, \quad N_2(r_i/r_w) = n_s(T_i)/n_b - 1. \qquad (34)$$

Целесообразно принять следующие характерные значения температуры и концентрации молекул пара: $T_b = T_i$, $n_b = n_s(T_i)$.

Интегрируя уравнение (33) с граничными условиями (34), находим выражение

$$\frac{T_1(r_i)}{T_i} - 1 = \frac{T_w/T_i - 1}{1 + (4/(15\,\mathrm{Kn}_b))\ln{(r_i/r_w)}}. \qquad (35)$$

Из уравнений (26), (30), (35), граничных условий (32) и равенства $\rho = mn$ при условии, что пар является идеальным газом ($P_s(T_i) = \rho_s(T_i)RT_i$), для определения плотности теплового потока $q$ при произвольном радиусе $r$ получаем следующую формулу:

$$q = P_s(T_i)\sqrt{\frac{2}{\pi}\,RT_i}\,\frac{d_w}{2r}\,\frac{T_w/T_i - 1}{1 + (4/(15\,\mathrm{Kn}_b))\ln{(2r_i/d_w)}}. \qquad (36)$$

В приближении сплошной среды, т. е. при $\mathrm{Kn} \to 0$, формула (36) преобразуется в соотношение вида

$$q = \frac{15}{4}\, P_s(T_i)\sqrt{\frac{2}{\pi}\, RT_i}\; \frac{\langle l_b \rangle}{T_i}\; \frac{T_w - T_i}{r \ln{(2r_i/d_w)}}.$$

Полученное выражение имеет вид формулы для плотности теплового потока в цилиндрическом слое в приближении сплошной среды, при этом среднее значение теплопроводности пара в пленке в интервале температур от $T_i$ до $T_w$ равно

$$\lambda = \frac{15}{4}\, \frac{P_s(T_i)}{T_i}\, \langle l_b \rangle \sqrt{\frac{2RT_i}{\pi}}\ .$$

В свободномолекулярном пределе, т. е. при $\mathrm{Kn} \to \infty$, формула (36) переходит в следующее соотношение, описывающее теплоперенос при сильной разреженности пара:

$$q = P_s(T_i)\sqrt{\frac{2RT_i}{\pi}}\, \left(\frac{T_w}{T_i} - 1\right) \frac{d_w}{2r}.$$

Используя формулу (36) для описания теплопереноса в паре при пленочном кипении He-II внутри пористого тела в условиях невесомости, после ряда преобразований, аналогичных описанным выше, вместо соотношения (16) получаем

$$\frac{k}{d_w \ln{(1 + H/r_0)}} = \frac{(T_w/T_i - 1)(a\eta_n/(2\rho' S T_b))\sqrt{2RT_{bs}/\pi}}{(1 + (4/(15\,\mathrm{Kn}_i))\ln{(1 + \delta/r_w)})(1 - P_s(T_{bs})/P_s(T_i))} \tag{37}$$

($T_i \approx T_{av} \approx T_{bs}$). Формула (37), не содержащая $q_w$ в явном виде, может быть преобразована к более удобному для расчетов виду

$$\frac{k}{d_w \ln{(1 + H/r_0)}} = \frac{a\eta_n}{2(P_s(T_i) - P_s(T_{bs}))}\, \frac{q_w}{\rho' S T_{bs}}. \tag{38}$$

**Результаты расчетов.** На рис. 3 показаны рассчитанные с помощью формулы (16) зависимости структурно-геометрического параметра $k/(d_w \ln{(1 + H/r_0)})$ от температуры $T_{bs}$ при различных значениях отношения толщины паровой пленки $\delta$ к радиусу нагревателя $r_w$. Видно, что с уменьшением температуры структурно-геометрический параметр

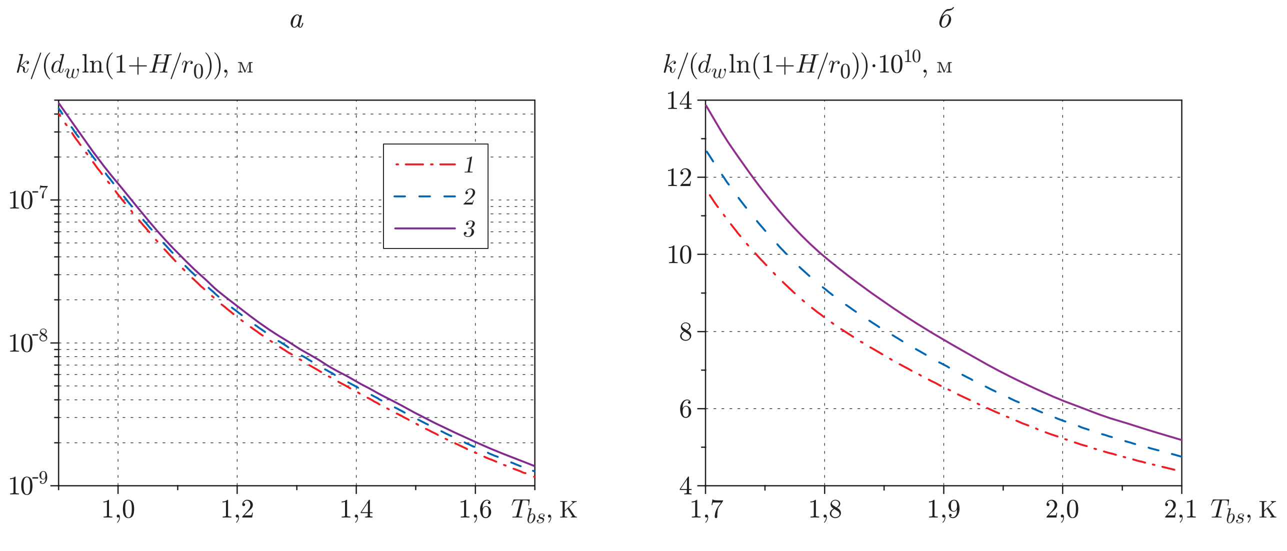


Рис. 3. Зависимость структурно-геометрического параметра от температуры при различных значениях отношения толщины паровой пленки к радиусу нагревателя: *а* — $T_{bs} = 0{,}9 \div 1{,}7$ К, *б* — $T_{bs} = 1{,}7 \div 2{,}1$ К; *1* — $\delta/r_w = 0{,}01$, *2* — $\delta/r_w = 0{,}1$, *3* — $\delta/r_w = 0{,}2$

Расчетные характеристики тканых металлических сеток российского производства

| Марка сетки | Размер сетки | $d_g$, мкм | $m_p$ | $A$ | $d_*$ | $K$ | $k \cdot 10^{10}$, м$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| С100 | $10 \times 118$ | 180 | 0,402 | 2,30 | 1,14 | 5,21 | 0,763 |
| С200 | $20 \times 157$ | 140 | 0,298 | 2,65 | 0,54 | 5,09 | 0,145 |
| П160 | $16 \times 83$ | 140 | 0,589 | 1,52 | 0,75 | 5,34 | 3,246 |

монотонно увеличивается: при $T_{bs} = 2{,}1$ K этот параметр имеет порядок $10^{-10}$ м, а при температуре 1 K — $10^{-7}$ м. Таким образом, если увеличение толщины паровой пленки нежелательно, то при высокой проницаемости пористой структуры необходимо поддерживать низкую температуру. Увеличение проницаемости пористой оболочки приводит к уменьшению гидравлического сопротивления и, следовательно, к увеличению скорости нормального компонента. Вследствие этого должен увеличиваться удельный тепловой поток $q$ (см. формулу (9)), но, поскольку согласно постановке задачи тепловая нагрузка является постоянной, величина $q$ зависит только от радиуса $r$ и с уменьшением температуры не должна изменяться. Действительно, $q$ остается постоянной, так как при понижении температуры уменьшаются энтропия He-II и (в соответствии с (8)) градиент давления. Кроме того, при $T_{bs} < 1{,}75$ K вязкость нормального компонента увеличивается, что компенсирует увеличение проницаемости (в соответствии с (7)), поэтому величина $V_n$ возрастает незначительно и как следствие $\rho' S T_{av} V_n$ в (9) не увеличивается.

С использованием полученных результатов проводится расчет толщины пористой оболочки с фиксированными структурными характеристиками. Пусть пористая структура выполнена из тканой металлической сетки. Проницаемость пористой структуры, изготовленной из тканой металлической сетки, определяется по формуле

$$k = \frac{1}{K} \frac{m_p^3 d_g^2}{A^2},$$

где $K$ — безразмерная постоянная Козени — Кармана; $A$ — безразмерная удельная площадь поверхности; $m_p$ — пористость; $d_g$ — диаметр уточной нити. Результаты расчета проницаемости для сеток трех типов приведены в таблице ($d_*$ — безразмерный гидравлический диаметр, т. е. отношение гидравлического диаметра к диаметру уточной нити $d_g$).

Введем следующее обозначение:

$$\frac{k}{d_w \ln(1 + H/r_0)} \equiv x.$$

Тогда отношение толщины оболочки к внутреннему радиусу имеет вид

$$\frac{H}{r_0} = \exp\Big(\frac{k}{x d_w}\Big) - 1.$$

В случае тонкой паровой пленки (которую можно считать плоской) на поверхности цилиндрического нагревателя величина $x$ определяется по формуле (16):

$$x = \frac{2(1-a)\eta_n \sqrt{2RT_i/\pi}}{\rho' S T_{av}} \Big(1 + \frac{\delta}{r_w}\Big).$$

Для отношения толщины оболочки к ее внешнему радиусу $r_{out} = r_0 + H$ справедлива формула

$$\frac{H}{r_{out}} = 1 - \exp\Big(-\frac{k}{x d_w}\Big). \tag{39}$$

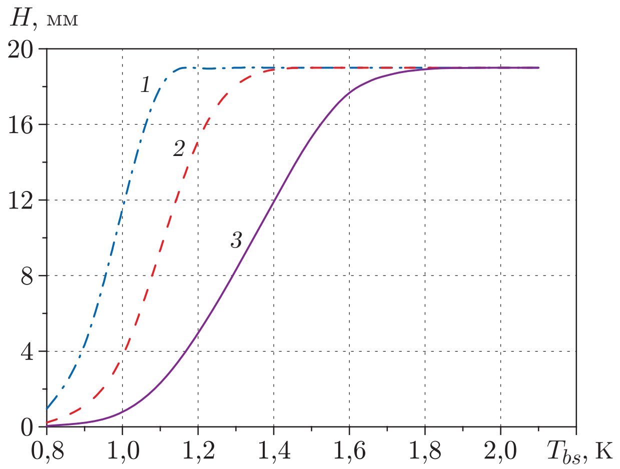


Рис. 4. Зависимость толщины пористой оболочки от температуры сверхтекучего гелия:
*1* — сетка П160 (16 × 83), *2* — сетка С100 (10 × 118), *3* — сетка С200 (20 × 157)

Таким образом, можно определить толщину пористой оболочки (толщину намотки слоев тканой металлической сетки) при различных значениях температуры сверхтекучего гелия и заданных диаметре нагревателя и толщине паровой пленки.

Пусть внешний радиус пористой оболочки равен 19 мм (такой же размер имела экспериментальная ячейка, описанная в работе [2]). Рассчитанные по формуле (39) зависимости толщины оболочки от температуры сверхтекучего гелия $T_{bs}$ для пористых структур с внешним радиусом, равным 19 мм, представлены на рис. 4. Видно, что для поддержания постоянной толщины паровой пленки при более высоких температурах сверхтекучего гелия необходимо использовать пористую оболочку большей толщины. В области низких температур ($T < 1{,}1$ К) постоянная толщина пленки пара, равная $\delta = 0{,}1 r_w$, может поддерживаться при толщине оболочки $H \leqslant 2$ мм, и наоборот, при определенной температуре необходимо использовать оболочку, толщина которой равна ее внешнему радиусу, т. е. в этом случае цилиндрическая полость внутри оболочки должна отсутствовать, что не соответствует постановке задачи. На рис. 4 видно, что при заданной температуре гелия среди трех рассмотренных металлических сеток наименьшую толщину оболочки обеспечивает сетка типа С200 (20 × 157).

**Заключение.** В данной работе в линейном приближении путем решения кинетического уравнения Больцмана моментным методом выведена формула для расчета плотности теплового потока при пленочном кипении на цилиндрическом нагревателе. Это аналитическое выражение, применимое в инженерных расчетах, справедливо при любых (в том числе сколь угодно малых) значениях числа Кнудсена.

Получено соотношение, связывающее в явном виде толщину паровой пленки при стационарном кипении He-II на цилиндрической нагревающей поверхности со структурными характеристиками и размерами цилиндрической пористой оболочки и находящегося внутри нее нагревателя. Данное соотношение позволяет рассчитать необходимую для получения требуемой толщины паровой пленки проницаемость пористой структуры с известными размерами (или размеры пористого тела при заданной проницаемости). Представлены соответствующие графики. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании экспериментальной ячейки для исследования кипения He-II в условиях микрогравитации.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Крюков А. П., Пузина Ю. Ю.** Обоснование экспериментальных исследований процессов тепломассопереноса при кипении сверхтекучего гелия в условиях микрогравитации на международной космической станции // Вопр. электромеханики: Тр. Всерос. науч.-исслед. ин-та электромеханики. 2009. Т. 112, № 5. С. 45–53.
2. **Королев П. В., Крюков А. П., Пузина Ю. Ю.** Конструкция экспериментальной ячейки для исследования кипения гелия-II в условиях невесомости // Вопр. электромеханики: Тр. Всерос. науч.-исслед. ин-та электромеханики. 2012. Т. 130, № 5. С. 43–50.
3. **Крюков А. П., Пузина Ю. Ю.** Подавление колебаний границы раздела фаз пар — жидкость при кипении сверхтекучего гелия внутри пористого тела // Инж.-физ. журн. 2013. Т. 86, № 1. С. 24–30.
4. **Муратова Т. М., Лабунцов Д. А.** Кинетический анализ процессов испарения и конденсации // Теплофизика высоких температур. 1969. Т. 7, № 5. С. 959–976.
5. **Khurtin P. V., Kryukov A. P.** Some models of heat transfer at film boiling of superfluid helium near $\lambda$-point in microgravity // J. Low Temperature Phys. 2000. V. 119, N 3/4. P. 413–420.
6. **Lester Lees, Chung-Yen Liu.** Kinetic-theory description of conductive heat transfer from a fine wire // Phys. Fluids. 1962. V. 5, N 10. P. 1137–1148.
7. **Gorter C. J., Mellink J. H.** On the irreversible processes in liquid hellium II // Physica. 1949. V. 5, N 15. P. 285–304.
8. **Van Sciver S. W.** Helium cryogenics. N. Y.: Springer, 2012.
9. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
10. **Ястребов А. К., Крюков А. П.** Тепломассоперенос через пленку пара с учетом движения межфазной поверхности жидкость — пар и роста температуры границы раздела фаз // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, № 4. С. 560–567.


*Поступила в редакцию 21/VII 2014 г.*