

10. Гусейнов Г. П., Багир-заде С. Н. Одномерное движение жидкости в трещиновато-пористой среде.—«Труды АзНИПИ нефть», 1972, вып. 24.
11. Гусейнов Г. П., Багир-заде С. Н. Приток жидкости к скважине, частично вскрывшей неоднородный трещиновато-пористый пласт, при неустановившемся режиме фильтрации.—«Азерб. нефт. хоз-во», 1971, № 8.
12. Гусейнов Г. П., Багир-заде С. Н., Керимов А. Г. Приток жидкости из трещиновато-пористого пласта к скважине с постоянным забойным давлением.— В кн.: Вопросы разработки нефтяных и газовых месторождений Азербайджана. Баку, 1974.
13. Багир-заде С. Н. Приток однородной жидкости к галерее в трещиновато-пористом пласте.—«Азерб. нефт. хоз-во», 1972, № 7.
14. Багир-заде С. Н. Неустановившееся движение однородной жидкости к галерее в трещиновато-пористом пласте.—«Труды АзНИПИ нефть», 1973, вып. 28.
15. Chatas A. F. Unsteady spherical flow in petroleum reservoirs.—«Soc. Petrol. Engrs. J.», 1966, vol. 2, N 2.
16. Таблицы Барлоу. М., «Мир», 1965.
17. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
18. Хаяши К., Барк Л. Многозначные таблицы круговых, гиперболических и других функций. М., Изд-во АН СССР, 1965.

УДК 532.529

КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СРЕДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТЯЖЕЛУЮ ТВЕРДУЮ ПРИМЕСЬ

О. Н. Дементьев

(Пермь)

В данной работе рассматриваются две задачи конвективной устойчивости среды, содержащей оседающие тяжелые твердые частицы. Исследуется устойчивость стационарного конвективного течения среды с примесью между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур, а также устойчивость подогреваемого снизу плоского слоя среды, содержащей примесь. Показано, что наличие оседающих твердых частиц оказывает существенное стабилизирующее влияние на конвективную устойчивость.

Устойчивость изотермических плоскопараллельных течений несжимаемого газа, несущего небольшое количество твердых частиц, исследовалась в работах [1—4]. Несущая среда и примесь рассматривались как взаимопроникающие и взаимодействующие друг с другом сплошные среды; взаимодействием между частицами пренебрегалось. Постановка задачи об устойчивости течения на основе этих представлений впервые была дана в [1], где рассматривалась устойчивость движения жидкости, содержащей примесь, в плоском вертикальном канале. Устойчивость конвективного движения среды, несущей твердую примесь, в слое между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур, исследовалась в [5], где оседанием частиц, как и в [2—4], пренебрегалось.

В работе [6] рассматривалось влияние взвешенных твердых частиц на устойчивость равновесия горизонтального слоя газа, подогреваемого снизу. Пренебрегалось оседанием частиц и выталкивающей силой, действующей на частицы. Предполагалось существование теплового равновесия между частицами и газом, т. е. рассматривался простой предельный случай бесконечно малого температурного времени релаксации τ_T . При описанных предположениях эффект наличия частиц в слое сводится лишь

к перенормировке теплоемкости газа, а значит, и к тривиальной перенормировке числа Рэлея.

Ниже исследуется влияние на конвективную устойчивость всех факторов, характеризующих частицы примеси: скорости оседания частиц u_s , скоростного и температурного времени релаксации частиц (или, что то же самое, их размеров, плотности и теплоемкости), массовой концентрации примеси a .

1. Рассмотрим несжимаемую жидкость, содержащую облако сферических недеформируемых частиц одинаковой массы m и радиуса r . Плотность материала частиц ρ_1 много больше плотности несущей среды ρ . Объемная доля частиц $f \ll 1$, поэтому взаимодействием между частицами можно пренебречь. Массовая же концентрация частиц a не предполагается малой и может достигать значения 0,2. В этом случае можно не учитывать эйнштейновскую поправку к вязкости жидкости, пропорциональную объемной концентрации примеси f . Выталкивающая сила, действующая на частицы, пренебрежимо мала, так как пропорциональна отношению ρ/ρ_1 . Частицы достаточно велики и не участвуют в броуновском движении; отсутствует и давление, связанное с облаком частиц. Сила взаимодействия между фазами при их относительном движении описывается законом Стокса.

Уравнения, описывающие поведение среды, содержащей облако твердых частиц, приведены в работах [7, 8]. На основе этих уравнений в работе [5] в приближении Буссинеска [9] получены уравнения свободной конвекции несжимаемой среды с тяжелой примесью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p / \rho + \nu \Delta \mathbf{u} + a / \tau_v (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) - (1 + a) \mathbf{g} \beta T, \\ \partial \mathbf{u}_p / \partial t + ((\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s) \nabla) \mathbf{u}_p &= - (1 / \tau_v) (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}), \\ \partial T / \partial t + \mathbf{u} \nabla T &= \chi \Delta T + (ab / \tau_T) (T_p - T), \\ \partial T_p / \partial t + (\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s) \nabla T_p &= - (1 / \tau_T) (T_p - T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \partial N / \partial t + \operatorname{div} [N(\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s)] &= 0, \\ \tau_v = m / 6\pi r \nu \rho, \quad \tau_T = mb / 4\pi r \chi \rho, \quad \mathbf{u}_s = mg / 6\pi r \nu \rho, \\ a = \rho_p / \rho, \quad b = C_1 / C, \quad \rho_p = Nm, \end{aligned}$$

где \mathbf{u} — скорость; T — температура; p — давление жидкости, отсчитываемое от перенормированного за счет присутствия оседающих частиц гидростатического давления; c — теплоемкость жидкости при постоянном давлении; β , ν , χ — коэффициент объемного расширения жидкости, ее кинематическая вязкость и температуропроводность; \mathbf{g} — ускорение свободного падения. Величины с индексом p относятся к облаку частиц, причём \mathbf{u}_p — скорость, приобретаемая частицами в результате их взаимодействия с движущейся жидкостью, отсчитывается от скорости оседания частиц \mathbf{u}_s ; c_1 — теплоемкость материала частиц; N — число частиц в единице объема.

Величины τ_T и τ_v имеют размерность времени и представляют собой соответственно: τ_T — время, необходимое для того, чтобы разность температур жидкости и частиц уменьшилась в e раз; τ_v — время, необходимое для уменьшения скорости частиц относительно жидкости в e раз по сравнению с ее исходным значением.

2. Рассмотрим конвективное движение жидкости с примесью в плоском слое между бесконечными вертикальными параллельными плоскостями $x = \pm h$, поддерживаемыми при постоянных температурах — Θ и Θ соответственно. Сквозь жидкость движутся частицы, концентрация которых однородна.

Получим стационарное решение системы уравнений (1.1), описывающее плоскопараллельное конвективное движение такой структуры

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_x = u_y = 0, \quad u_z = u_0(x), \quad T_0 = T_0(x), \quad p_0 = p_0(z), \\ u_{px} = u_{py} = 0, \quad u_{pz} = u_{p0}(x), \quad T_{p0} = T_{p0}(x), \quad N_0 = \text{const} \end{aligned}$$

(индекс 0 отличает стационарное решение системы (1.1)).

Из (1.1) с учетом (2.1) получаем систему уравнений

$$(2.2) \quad \nu d^2 u_0 / dx^2 + (1+a)g\beta T_0 = (1/\rho) dp_0 / dz = c, \quad u_{p0} = u_0;$$

$$(2.3) \quad d^2 T_0 / dx^2 = 0, \quad T_{p0} = T_0,$$

где c — постоянная разделения переменных. Для определения u_0 , T_0 и p_0 используем граничные условия

$$(2.4) \quad u_0(\pm h) = 0, \quad T_0(\pm h) = \mp \Theta$$

и условие замкнутости конвективного течения

$$(2.5) \quad \int_{-h}^h u_0 dx = 0.$$

Из (2.2)—(2.5) получим распределение скоростей и температур жидкости и облака частиц по сечению слоя

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_0 = (1+a)(g\beta\Theta h^2/6\nu)(x^3/h^3 - x/h), \\ U_{p0} = u_0 + u_s, \quad T_0 = T_{p0} = -(\Theta/h)x. \end{aligned}$$

Как видно из (2.6), наличие частиц примеси приводит к перенормировке профиля скорости жидкости по сравнению со случаем жидкости без примеси [9].

3. Исследуем устойчивость стационарного движения среды с тяжелой примесью, определяемого соотношениями (2.6). Для этого рассмотрим возмущенные поля скоростей, температур, давления и числа частиц в единице объема $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}$, $T_0 + T$, $\mathbf{U}_{p0} + \mathbf{u}_p$, $T_{p0} + T_p$, $p_0 + p$, $N_0 + N$, где \mathbf{u} , \mathbf{u}_p , T , T_p , p , N — малые возмущения.

Запишем уравнения для возмущений в безразмерном виде, используя следующие единицы измерения: расстояния h , времени h^2/ν , скорости ν/h , давления $\rho\nu^2/h^2$, температуры Θ . Производя линеаризацию по возмущениям, из (1.1) получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla \mathbf{u} + \gamma \text{Gr} T + (a/\tau_v)(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}); \\ \partial \mathbf{u}_p / \partial t + (\mathbf{u}_p \nabla) \mathbf{u}_0 + ((\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s) \nabla) \mathbf{u}_p &= - (1/\tau_v)(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}); \\ \partial T / \partial t + \mathbf{u} \nabla T_0 + \mathbf{u}_0 \nabla T &= (1/\text{Pr}) \nabla T + (ab/\tau_T)(T_p - T); \\ \partial T_p / \partial t + \mathbf{u}_p \nabla T_0 + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s) \nabla T_p &= - (1/\tau_T)(T_p - T); \\ \text{div} \mathbf{u} &= 0; \quad \partial N / \partial t + \text{div}[N(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s) + N_0 \mathbf{u}_p] = 0, \\ \mathbf{u}_s &= -\text{Ga} \tau_v \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{u}_0 = (\text{Gr}/6)(x^3 - x) \boldsymbol{\gamma}, \quad T_0 = -x, \\ \tau_v &= (2/9)(r/h)^2(\rho_1/\rho), \quad \tau_T = (3/2)b \text{Pr} \tau_v, \\ \text{Ga} &= gh^3/\nu^2, \quad \text{Gr} = (1+a)g\beta\Theta h^3/\nu^2, \quad \text{Pr} = \nu/\chi, \end{aligned}$$

где Ga , Gr , Pr — числа Галилея, Грасгофа, Прандтля; τ_v и τ_T — теперь безразмерные времена релаксации; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Как и в случае чистой жидкости [9, 10], для среды с примесью можно показать, что задача об устойчивости относительно пространственных возмущений сводится к соответствующей задаче для плоских возмущений. В случае вертикальной ориентации слоя плоские возмущения более опасны, т. е. им соответствуют меньшие числа Грасгофа. Следовательно, при исследовании устойчивости достаточно ограничиться изучением плоских возмущений.

Рассмотрим плоские нормальные возмущения

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_x &= -\partial\psi/\partial z, \quad u_z = \partial\psi/\partial x, \\ \psi(x, z, t) &= \varphi(x)\exp[ik(z - ct)], \quad T(x, z, t) = \theta(x)\exp[ik(z - ct)], \\ u_{px}(x, z, t) &= v_{px}(x)\exp[ik(z - ct)], \quad u_{pz}(x, z, t) = v_{pz}(x)\exp[ik(z - ct)], \end{aligned}$$

где ψ — функция тока; φ , θ , v_{px} , v_{pz} — амплитуды возмущений; k — вещественное волновое число; $c = c_r + ic_i$ — комплексная фазовая скорость возмущений (c_r — фазовая скорость, c_i — декремент).

Подставив (3.2) в (3.1), получим систему амплитудных уравнений (штрихом обозначено дифференцирование по координате x)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi) - ik(\varphi' - k^2\varphi)(u_1 - c) + Gr\theta' + ik\varphi u_1'' &= 0; \\ \frac{1}{Pr}(\theta'' - k^2\theta) - ik\theta(u_2 - c) + ik\varphi T_0' A &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + a(u_0 + u_s - c)/[1 + ik\tau_v(u_0 + u_s - c)]; \\ u_2 &= u_0 + ab(u_0 + u_s - c)/[1 + ik\tau_T(u_0 + u_s - c)]; \\ A &= 1 + ab/\{[1 + ik\tau_v(u_0 + u_s - c)][1 + ik\tau_T(u_0 + u_s - c)]\}. \end{aligned}$$

Граничные условия

$$(3.4) \quad \varphi = \varphi' = \theta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1.$$

Краевая задача (3.3), (3.4) определяет спектр характеристических возмущений и их декрементов. Комплексная фазовая скорость c зависит от семи независимых параметров задачи: чисел Грасгофа, Прандтля, Галилея, волнового числа k , массовой концентрации примеси a и времен релаксации τ_T и τ_v . Из условия $c_i = 0$ определяется граница устойчивости стационарного течения.

Для решения полученной краевой задачи, т. е. для определения спектра декрементов и границ устойчивости течения, применялся метод пошагового интегрирования Рунге—Кутты—Мерсона с ортогонализацией решений на каждом шаге интегрирования [11, 12]. Используемый метод позволил провести расчеты вплоть до достаточно больших значений параметров задачи: $Gr \sim 10^5$, $Pr \sim 10^2$, $Ga \sim 10^6$.

4. Расчеты, проведенные для широкого интервала значений числа Прандтля ($10^{-2} \leq Pr \leq 10^2$), показывают, что стационарное движение среды с примесью (2.6) имеет две формы неустойчивости. Первая связана со структурой течения наличием двух встречных потоков, взаимодействие между которыми приводит к потере устойчивости. Вторая форма неустойчивости порождается нарастающими в потоке тепловыми волнами при достаточно больших числах Прандтля $Pr \geq Pr_*$ ($Pr_* \approx 11$).

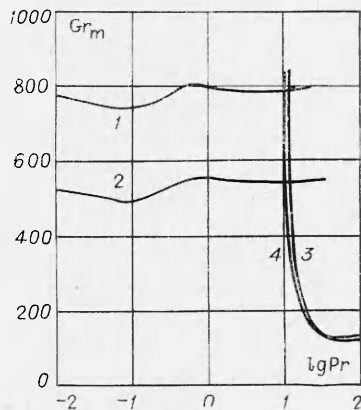
При значениях числа Прандтля, меньших критического $Pr < Pr_*$, неустойчивость стационарного движения жидкости с примесью вызывается гидродинамическими возмущениями, их нижними модами (при $Pr > Pr_*$ более опасными становятся тепловые возмущения). Влияние на

эту форму неустойчивости тепловых факторов незначительно. Оседающие частицы порождают колебательные (бегущие) возмущения и способствуют их переносу. Следовательно, неустойчивость, связанная с нижними гидродинамическими модами возмущений, является колебательной. Неустойчивость же стационарного движения чистой жидкости при $Pr < 11,4$ связана с монотонными возмущениями [9,13] так же, как и в случае жидкости с примесью, скоростью оседания которой можно пренебречь по сравнению со скоростью стационарного течения жидкости [5]. Так как механизм неустойчивости во всех трех случаях один и тот же, рассматриваемую форму неустойчивости движения среды с примесью можно назвать квазимонотонной.

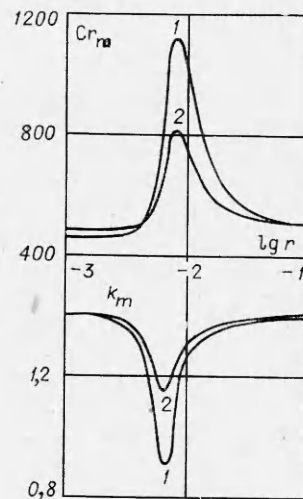
Рассмотрим квазимонотонную неустойчивость стационарного движения (2.6). Ее граница при изменении числа Прандтля в широких пределах ($10^{-2} \leq Pr \leq 30$) меняется слабо. Кризис устойчивости имеет хорошо выраженную гидродинамическую природу.

На фиг. 1 показаны зависимости минимального критического числа Грасгофа Gr_m от числа Прандтля при следующих значениях параметров задачи: $a = 0,05$, $Ga = 43600$ ($b = 2,7$, $\rho_1/\rho = 415$). Кривая 1 соответствует $\tau_v = 0,0049$ ($r/h = 0,0073$); 2 — $\tau_v = 0,00083$ ($r/h = 0,003$). Видно, что увеличение размеров частиц приводит к значительной стабилизации течения (кривая 2 практически совпадает с соответствующей кривой для чистой жидкости [9]). Фазовая скорость возмущений c_{rm} ($c_r < 0$), соответствующая минимальному критическому числу Грасгофа Gr_m , меняется при изменении Pr также очень незначительно ($c_{rm} \approx -5,25$). Критическое волновое число k_m , соответствующее Gr_m , зависит от числа Прандтля слабо ($k_m \approx 1,15$).

Зависимость минимального критического числа Грасгофа Gr_m от массовой концентрации примеси a оказывается линейной. С ростом a при $\tau_v = \text{const}$ ($r = \text{const}$, $\rho_1/\rho = \text{const}$) увеличивается число частиц в единице объема, т. е. возрастает влияние примеси на устойчивость течения. При увеличении массовой концентрации a от 0 до 0,1 минимальное критическое число Грасгофа Gr_m возрастает от 500 до 1050; критическая фазовая скорость c_{rm} убывает от 0 до -12 , а k_m линейно убывает от 1,42 до 1,00 ($Ga = 43600$, $Pr = 0,73$, $\tau_v = 0,0049$, $\tau_T = 0,0145$). Примесь спо-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

собствует диссипации энергии возмущений в некотором диапазоне частот при взаимодействии инертных частиц с пульсациями скорости. Ответственными за кризис течения становятся длинноволновые возмущения.

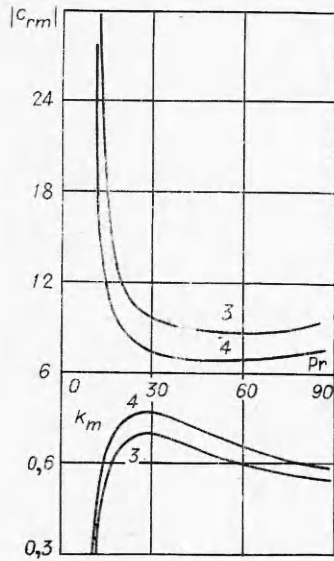
На фиг. 2. показаны зависимости минимального критического числа Грасгофа Gr_m и критического волнового числа k_m от радиуса частиц примеси r (через r обозначен безразмерный радиус частиц) для двух значений массовой концентрации примеси a . Кривая 1 соответствует $a = 0,1$; 2 — $a = 0,05$ при $Gr = 43600$, $Pr = 0,73$ ($b = 2,7$, $\rho_1/\rho = 415$). Эти значения параметров задачи соответствуют древесной пыли в воздухе. Увеличение радиуса частиц r при $a = \text{const}$ приводит к хорошо выраженному эффекту стабилизации течения вплоть до критического значения $r_* \approx 0,0079$, после чего с ростом r стабилизирующий эффект снижается. Здесь конкурируют два противоположно действующих фактора [2]: увеличение размеров частиц приводит к дополнительной диссипации энергии возмущений, но число частиц при этом сокращается ($a = \text{const}$, $\rho_1/\rho = \text{const}$), т. е. ослабляется их влияние на устойчивость течения. Характер зависимости критического волнового числа k_m от радиуса частиц свидетельствует о том, что стабилизация потока обусловлена гашением частицами опасных возмущений. Кривые, отражающие зависимость величины критической фазовой скорости возмущений $[c_{r,m}]$ от радиуса частиц, имеют вид, аналогичный кривым $Gr_m = Gr_m(r)$ фиг. 2. При $r = 0,0075$ критическая фазовая скорость имеет минимальное значение $c_{r,m} = -12,2$ ($a = 0,1$, $Gr = 43600$, $Pr = 0,73$, $b = 2,7$, $\rho_1/\rho = 415$).

5. Рассмотрим колебательную неустойчивость стационарного движения, т. е. неустойчивость, вызываемую нижними тепловыми модами возмущений, нарастающими в потоке тепловыми волнами. В отличие от квазимоноотонной неустойчивости колебательная неустойчивость существенно связана с неизотермичностью течения. В случае чистой жидкости колебательная неустойчивость порождается парой комплексно-сопряженных декрементов [9]. Равновозможны тепловые волны, распространяющиеся в потоке как вверх, так и вниз с одинаковыми по абсолютной величине фазовыми скоростями. Оседающие твердые частицы, порождая бегущие вниз вдоль слоя возмущения, выделяют это направление как наиболее благоприятное для распространения возмущений. Теперь бегущие вниз возмущения имеют большую по абсолютной величине фазовую скорость, чем возмущения, бегущие вверх. Учет оседания частиц приводит к снятию вырождения тепловых декрементов. В таком случае можно говорить о двух нейтральных кривых колебательной неустойчивости, соответствующих паре нижних тепловых декрементов.

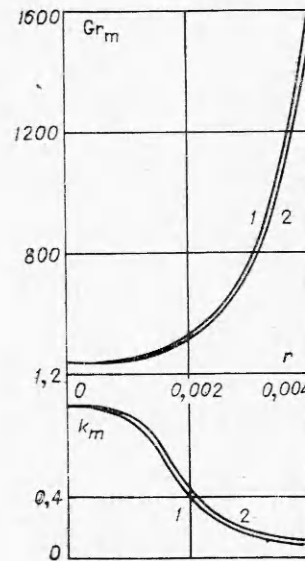
Как и в случае чистой жидкости [9, 13], при $Pr > Pr_*$ ($Pr_* \approx 11$) происходит смена формы неустойчивости, наиболее опасными становятся колебательные возмущения.

На фиг. 1 показана зависимость минимального критического числа Грасгофа Gr_m от числа Прандтля Pr (неустойчивость по отношению к колебательным возмущениям). Параметры задачи следующие: $a = 0,05$, $Gr = 43600$, $\tau_v = 0,00021$ ($b = 2,7$, $r = 0,0015$, $\rho_1/\rho = 415$, $u_s = -9,05$). Кривая 3 соответствует фазовой скорости возмущений $c_r < 0$; 4 — $c_r > 0$. С ростом числа Прандтля устойчивость потока по отношению к колебательным возмущениям снижается вплоть до $Pr \approx 57$, а затем начинает повышаться. До значений числа Прандтля $Pr \approx 40$ наиболее опасными являются возмущения, бегущие вдоль слоя вверх, а при $Pr > 40$ возмущения, бегущие вниз, становятся опаснее.

На фиг. 3 показана зависимость критического волнового числа k_m и абсолютной величины фазовой скорости $c_{r,m}$ от числа Прандтля. Значения параметров задачи соответствуют кривым 3 и 4 на фиг. 1.



Фиг. 3



Фиг. 4

Зависимость критического числа k_m и Gr_m от радиуса частиц r показана на фиг. 4. Кривая 1 соответствует отрицательной фазовой скорости возмущений (декремент ν_1); 2 — положительной (декремент ν_0). Значения параметров задачи: $a = 0,05$, $Ga = 43600$, $Pr = 30$ ($\rho_1/\rho = 415$, $b = 2,7$). С ростом размера частиц растет стабилизирующее воздействие примеси на устойчивость стационарного движения жидкости. Абсолютные величины фазовых скоростей возмущений, бегущих как вверх, так и вниз вдоль слоя, быстро возрастают с увеличением r . Как видно из сравнения фиг. 2 и 4, частицы примеси значительно эффективнее подавляют тепловые возмущения. Устойчивость стационарного конвективного движения жидкости по отношению к квазимоноотонным возмущениям можно повысить в 2—2,5 раза, добавляя к потоку тяжелые частицы ($a \leq 0,2$), а по отношению к колебательным возмущениям — более чем в 10 раз.

Сравнение полученных результатов с результатами работы [5] показывает, что оседающие частицы приводят к значительно большему эффекту стабилизации стационарного течения жидкости, чем взвешенные частицы. Действительно, пренебрежение скоростью оседания частиц по сравнению со скоростью стационарного течения жидкости справедливо лишь для достаточно мелких частиц с не очень большой плотностью (относительно плотности несущей среды). Крупные плотные частицы более инертны, чем мелкие, и скоростью их оседания уже нельзя пренебрегать. Скорость скольжения частиц относительно жидкости порядка величины u_s . Возникающее в результате относительное движение жидкости и частиц приводит к дополнительной диссипации энергии возмущений по сравнению со случаем взвешенных частиц.

6. Рассмотрим горизонтальный плоский слой несжимаемой жидкости или газа, ограниченный бесконечными твердыми плоскостями $z = \pm 1$. Слой подогревается снизу. Через верхнюю плоскость в слой поступают частицы, концентрация которых однородна ($N_0 = \text{const}$). Частицы оседают, поэтому в невозмущенном состоянии в слое имеется поперечное движение примеси с однородной вертикальной скоростью u_s . Предположим, что накапливания частиц на нижней плоскости не происходит. Действительно, объемная концентрация примеси $f \ll 1$ и изменение толщины

слоя за счет осевших частиц незначительны. Можно также предположить, что нижняя ограничивающая плоскость является проницаемой для частиц.

Найдем стационарные распределения температур газа T_0 и облака частиц T_{p0} при отсутствии конвективного движения рассматриваемой двухфазной системы (теперь индекс 0 отличает стационарное решение системы (1.1) при $u_0 = 0$). Для этого нужно решить безразмерные уравнения теплопроводности, получаемые из соответствующих уравнений системы (1.1), записанных в безразмерном виде, при $u_0 = 0$ (в рассматриваемом случае в качестве единиц измерения скорости и давления удобно выбрать χ/h и $\rho_0 v \chi / h^2$ соответственно)

$$(6.1) \quad T_0' + \frac{ab \text{Pr}}{\tau_T} (T_{p0} - T_0) = 0, \quad u_s T_{p0}' + \frac{\text{Pr}}{\tau_T} (T_{p0} - T_0) = 0$$

(штрихом обозначено дифференцирование по координате z).

Граничные условия

$$(6.2) \quad T_0 = \mp 1 \text{ при } z = \pm 1; \quad T_{p0} = -1 \text{ при } z = 1.$$

Частицы поступают в слой, имея температуру его верхней границы.

Распределения температур в слое газа и облаке частиц при стационарном поперечном движении примеси имеют вид

$$(6.3) \quad T_0 = a_1 [\exp(k_1(z-1)) - 1] + a_2 [\exp(k_2(z-1)) - 1] - 1; \\ T_{p0} = a_1 [(k_1/abu_s) \exp(k_1(z-1)) - 1] + a_2 [(k_2/abu_s) \exp(k_2(z-1)) - 1] - 1,$$

где

$$a_1 = 2/[1 - \exp(-2k_1)](k_3 - 1); \quad a_2 = 2/[1 - \exp(-2k_2)](1/k_3 - 1);$$

$$k_1 = -\frac{\text{Pr}}{2\tau_T u_s} + \sqrt{\left(\frac{\text{Pr}}{2\tau_T u_s}\right)^2 + \frac{\text{Pr} ab}{\tau_T}}; \quad k_2 = -\frac{\text{Pr}}{2\tau_T u_s} - \\ - \sqrt{\left(\frac{\text{Pr}}{2\tau_T u_s}\right)^2 + \frac{\text{Pr} ab}{\tau_T}};$$

$$k_3 = [1 - \exp(-2k_2)]/[1 - \exp(-2k_1)] \cdot [(abu_s - k_1)/(abu_s - k_2)].$$

В предельном случае взвешенных частиц ($u_s = 0$) из уравнений (6.1), (6.2) получим линейное по вертикали распределение температур $T_{p0} = T_0 = -z$. Как видно из (6.3), при отличной от нуля скорости оседания частиц распределения температур газа и облака частиц отличаются от линейных. При увеличении скорости оседания частиц, а также с ростом их массовой концентрации и относительной теплоемкости искажение линейного распределения температуры газа увеличивается. При дальнейшем росте перечисленных параметров у нижней границы намечается тенденция к формированию пограничного слоя, внутри которого сосредоточено основное изменение температуры газа.

7. Для исследования конвективной устойчивости равновесия слоя среды, содержащей оседающие частицы, рассмотрим возмущенные поля скоростей, температур, давления и числа частиц $u, u_p + u_s, T_0 + T, T_{p0} + T_p, p_0 + p, N_0 + N$, где u, u_p, T, T_p, p, N — малые возмущения. Уравнения для возмущений можно получить из (1.1), производя линеаризацию по возмущениям. Исключая из этих уравнений обычным образом давление, x, y — компоненты скорости газа и облака частиц, можно получить уравнения для вертикальных компонент возмущений скоростей $u_z(x, y, z, t), u_{pz}(x, y, z, t)$ и температур $T(x, y, z, t), T_p(x, y, z, t)$. Будем рассматривать нормальные возмущения вида

$$(7.1) \quad \begin{aligned} u_z &= v(z) \exp [-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]; \\ u_{pz} &= v_p(z) \exp [-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]; \\ T &= \theta(z) \exp [-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)], \\ T_p &= \theta_p(z) \exp [-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)], \end{aligned}$$

где k_1 и k_2 — вещественные волновые числа вдоль направлений x и y ; $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный декремент возмущений. В результате получим с учетом вида возмущений (7.1) безразмерные уравнения для амплитуд возмущений

$$(7.2) \quad \begin{aligned} & (v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v) - \left(\frac{a}{\tau_v} - \lambda \right) (v'' - k^2 v) - \text{Ra} k^2 \theta + \\ & + \frac{a}{\tau_v} \left\{ \frac{\text{Pr}}{u_s \tau_v} \left[v' - \frac{\text{Pr}}{u_s} \left(\frac{1}{\tau_v} - \lambda \right) v \right] + \left[\frac{\text{Pr}^2}{u_s^2} \left(\frac{1}{\tau_v} - \lambda \right)^2 - k^2 \right] v_p \right\} = 0; \\ & \frac{u_s}{\text{Pr}} v_p' + \left(\frac{1}{\tau_v} - \lambda \right) v_p - \frac{v}{\tau_v} = 0; \\ & \frac{1}{\text{Pr}} (\theta'' - k^2 \theta) - \left(\frac{ab}{\tau_T} - \lambda \right) \theta - \frac{T_0'}{\text{Pr}} v + \frac{ab}{\tau_T} \theta_p = 0; \\ & \frac{u_s}{\text{Pr}} \theta_p' + \left(\frac{1}{\tau_T} - \lambda \right) \theta_p + \frac{T_{p0}'}{\text{Pr}} v_p - \frac{1}{\tau_T} \theta = 0; \\ & \text{Ra} = (1 + a) \frac{g\beta\theta h^3}{\nu\chi}, \quad u_s = -\tau_v \frac{Ca}{\text{Pr}} \gamma, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2. \end{aligned}$$

Граничные условия

$$(7.3) \quad \begin{aligned} v = v' = \theta = 0 & \quad \text{при} \quad z = \pm 1; \\ v_p = \theta_p = 0 & \quad \text{при} \quad z = 1. \end{aligned}$$

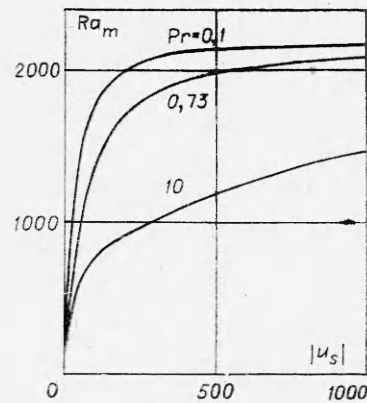
Предполагается, что на верхней границе слоя возмущения скорости и температуры облака частиц исчезают.

Краевая задача (7.2), (7.3) определяет спектр декрементов возмущений и границы устойчивости равновесия слоя жидкости, содержащей частицы примеси. Для решения этой краевой задачи применялся также метод пошагового интегрирования Рунге—Кутта—Мерсона.

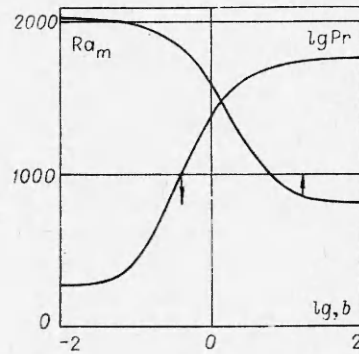
8. Наличие частиц примеси сказывается прежде всего на спектре декрементов возмущений. В отличие от спектра слоя чистой жидкости и спектра слоя с поперечным просачиванием жидкости [9, 14] теперь спектр возмущений значительно богаче за счет появления возмущений, связанных с облаком частиц. Но, как показывают расчеты, ответственными за неустойчивость равновесия остаются возмущения, связанные с несущей средой.

Поперечное движение частиц приводит к значительному изменению спектра возмущений неподвижного слоя чистой жидкости. Теперь в спектре появляются колебательные возмущения, они возникают в результате слияния вещественных уровней. При увеличении числа Рэлея эти комплексно-сопряженные пары снова распадаются на два вещественных уровня. Неустойчивость же, как и в случае неподвижного слоя чистой жидкости, обусловлена вещественными ветвями спектра, она имеет монотонный характер.

Влияние скорости оседания частиц на устойчивость слоя иллюстрируется фиг. 5, где показаны зависимости минимального критического числа



Ф и г. 5



Ф и г. 6

Рэля Ra_m от скорости оседания частиц u_s (или, что то же самое, от числа Галилея) ($Pr = 0,73$, $a = 0,1$, $\tau_v = 0,00452$, $\tau_T = 0,01336$). Устойчивость слоя быстро возрастает с увеличением $|u_s|$. Длина волны наиболее опасных возмущений уменьшается. В слое воздуха толщиной 2 см движение древесных частиц со скоростью ≈ 20 см/с ($a = 0,1$, $r = 0,007$ см) повышает устойчивость почти в 17 раз. Но при увеличении скорости оседания частиц темп роста минимального критического числа Рэля снижается (при $|u_s| \geq 150$).

С увеличением скорости оседания частиц у нижней границы слоя начинает формироваться температурный пограничный слой (происходит «сдувание» распределения температуры газа). В результате уменьшается эффективная толщина стратифицированного слоя газа ($h_{eff} < h$). Характерная же разность температур 2Θ остается при этом фиксированной. Критическая разность температур находится из условия $(1+a)g\beta\Theta h_{eff}^3/\nu\chi = const$, поэтому критическое число Рэля, определенное обычным образом по полуширине слоя h , увеличивается по мере уменьшения h_{eff} , т. е. с ростом $|u_s|$. Это происходит до тех пор, пока частицы, «сдувая» распределение температуры газа, уменьшают толщину температурного пограничного слоя у нижней плоскости. Оказывается, что при больших значениях скорости оседания дальнейшее ее увеличение приводит к незначительному искажению устанавливающегося распределения температуры газа и, значит, к малому росту стабилизирующего эффекта.

С ростом же массовой концентрации примеси a также наблюдается усиление искажающего влияния частиц на распределение температуры газа. Стабилизирующий эффект воздействия частиц на устойчивость равновесия при этом возрастает. При увеличении массовой концентрации a в два раза от 0,1 до 0,2 минимальное критическое число Рэля возрастает от 770 до 1980, критическое волновое число k_m возрастает от 2,19 до 2,77.

На фиг. 6 показаны зависимости минимального критического числа Рэля от числа Прандтля и от относительной теплоемкости частиц b ($a = 0,1$, $Ga/Pr = 43600$, $\tau_v = 0,00452$). График зависимости $Ra_m = Ra_m(Pr)$ построен для значения $b = 2,7$, а график $Ra_m = Ra_m(b)$ — для значения $Pr = 1$. С ростом числа Прандтля ($10^{-2} \leq Pr \leq 10^2$) происходит снижение Ra_m более чем в два раза ($Ra_m \approx 2000$ при $Pr = 0,1$ и $Ra_m \approx 1000$ при $Pr = 6$). Но конвективная устойчивость равновесия в нашем случае много выше устойчивости чистой жидкости. При увеличении относительной теплоемкости частиц b устойчивость повышается. Частицы, об-

ладающие большей теплоемкостью, лучше поглощают тепловые возмущения, которые являются наиболее опасными.

Поведение минимального критического числа Рэлея Ra_m в зависимости от радиуса частиц (или времени релаксации τ_v) аналогично поведению минимального критического числа Грасгофа в задаче об устойчивости конвективного течения среды с примесью в вертикальном слое (см. фиг. 4). Увеличение r приводит к повышению устойчивости равновесия вплоть до некоторого предельного значения $r_* = 0,004$, при котором $Ra_m = 3125$ ($a = 0,1$, $Ga = 31830$, $Pr = 0,73$, $b^* = 2,7$, $\rho_1/\rho = 415$). При $r > r_*$ стабилизирующий эффект снижается. Критическое волновое число k_m возрастает с ростом r и достигает (при $r \approx 0,004$ и данных значениях параметров задачи) величины 3,1, а затем снижается при дальнейшем росте r . В отличие от задачи об устойчивости стационарного конвективного движения среды с примесью (см. фиг. 4) повышение конвективной устойчивости равновесия при увеличении размеров частиц связано с уменьшением длины опасных стоячих возмущений.

В заключение следует отметить, что влияние оседающих частиц на конвективную устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости во многом сходно с влиянием поперечного просачивания жидкости [9, 14, 15].

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за руководство работой, В. Е. Накорякова и участников руководимого им семинара, а также А. Г. Кирдяшкина за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 30 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П. Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью.—Иzv. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1960, № 6.
2. Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas.—«J. Fluid Mech.», 1962, vol. 13, pt 1.
3. Michael D. H. The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas.—«J. Fluid Mech.», 1964, vol. 18, pt 1.
4. Желтухин И. Д. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе, несущем твердую примесь.—Иzv. АН СССР. МЖГ», 1971, № 2.
5. Дементьев О. Н. Устойчивость конвективного движения среды, несущей твердую примесь.—«Учен. зап. Пермск. ун-та», 1974. Гидродинамика, вып. 7, с. 3.
6. Scanlon J. W., Segel L. A. Some effect of suspended particles on the onset of Be-nard convection.—«Phys. Fluids», 1973, vol. 16, N 10.
7. Marble F. E. Dynamics of dusty gases.—«Annual Rev. Fluid Mech.», 1970, vol. 2, p. 397—446. Рус. пер. Динамика запыленных газов. Сб. пер. Механика, 1970, № 6.
8. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
11. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
12. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений.—«Учен. зап. Пермск. ун-та», 1974, № 316 Гидродинамика, вып. 5, с. 149.
13. Бирх Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале.—ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
14. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н., Шварцблат Д. Л. Нестационарные конвективные возмущения в горизонтальном слое жидкости.—«Учен. зап. Пермск. ун-та», 1968, № 184. Гидродинамика, вып. 1.
15. Шварцблат Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.