

УДК 539.19

К ТЕОРИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ МЕЛКОДИСПЕРСНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

С. О. Гладков

Московский государственный областной университет, 105005 Москва

E-mail: sglad@newmail.ru

С помощью кинетического уравнения для функции распределения электронов дана оценка температурной и частотной зависимостей сечения поглощения внешнего переменного электромагнитного поля малой металлической частицей. При этом считается, что радиус частицы R удовлетворяет неравенству $l_{ee} \ll R \ll \lambda$, где l_{ee} — длина свободного пробега электрона; λ — длина волны электромагнитного излучения. Найдено общее выражение для сечения поглощения при произвольном соотношении между линейным размером частицы и толщиной скин-слоя. Исследовано влияние изменения температуры частицы под действием внешнего переменного электромагнитного поля на сечение поглощения. Доказано, что при $R \ll \lambda$, $R \ll l_{ee}$ сечение поглощения следует вычислять с помощью квантово-механических принципов, считая температуру электронов равной нулю. В этих условиях функцию распределения электронов вводить неправомерно, и сечение поглощения оказывается достаточно сложной функцией частоты внешнего поля.

Ключевые слова: электромагнитное излучение, сечение поглощения, мелкодисперсные металлические частицы.

Введение. В последнее время результаты исследования физических свойств мелкодисперсных частиц (в том числе наночастиц) получают все более широкое применение в различных областях техники. Это обусловлено тем, что теоретически предсказанные свойства многих мелкодисперсных объектов (в частности, металлических частиц) являются уникальными.

В задаче, решению которой посвящена настоящая работа, изучается поглощение энергии внешнего электромагнитного поля металлическим сферическим объектом диаметром $D = 2R$ при произвольном соотношении между диаметром и главной характеристикой поглощательной способности металла — толщиной скин-слоя ξ . Далее рассматривается ансамбль металлических частиц, среднее расстояние между которыми L удовлетворяет неравенству $D \ll \lambda \ll L$, поэтому рассеяние и поглощение электромагнитного излучения каждой частицей можно исследовать по отдельности.

Следует отметить, что значительное влияние на поглощение оказывает геометрия частицы. Как показано ниже, именно учет формы частицы позволяет вычислить зависимость сечения поглощения от соотношения между ξ и R в общем случае.

Кроме того, характер поглощения существенно зависит от соотношения между длиной свободного пробега электрона l_{ee} и линейным размером частицы D .

В п. 1 анализируется случай $l_{ee} \ll D$, в п. 2 — случай $l_{ee} \gg D$.

Известно, что

$$\xi = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega} \quad (1)$$

(c — скорость света в вакууме; σ — проводимость металла; ω — частота внешнего переменного электромагнитного поля) [1–3].

Из (1) следует, что если проводимость $\sigma \approx 10^{19} \text{ с}^{-1}$, а частота $\omega \approx 10^{11} \text{ с}^{-1}$, то $\xi \approx 10^{-5} \text{ см}$. Это значение соответствует характерному размеру R мелкодисперсных частиц (в том числе наночастиц), который может изменяться в достаточно широком диапазоне $10^{-7} \text{ см} < R < 10^{-1} \text{ см}$.

Из решения уравнений Максвелла для массивных образцов в одномерном случае (когда ось z направлена от поверхности в глубь металла) следуют распределения напряженностей электрического $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ и магнитного $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$ полей по координате z в виде экспоненциального закона

$$(E_x, H_y) = (E_0, H_0) e^{-z/\xi},$$

где E_0, H_0 — соответственно значения напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности металла при $z = 0$.

Заметим, что такой подход справедлив только в том случае, если выполняется неравенство

$$l_{ee} \ll R \ll \lambda,$$

где λ — длина волны электромагнитного излучения.

В случае если

$$R \ll \lambda, \quad R \ll l_{ee},$$

необходимо использовать квантово-механический подход.

1. Случай $l_{ee} \ll R \ll \lambda$. С учетом внешних полей зависимость энергии электрона в нерелятивистском приближении следует представить в виде [4]

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/(2m) + e\varphi(\mathbf{r}, t) - \mu_B \mathbf{s} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где e — заряд электрона; \mathbf{p} — импульс электрона; \mathbf{s} — его спин; μ_B — магнетон Бора; \mathbf{H} — внешнее магнитное поле.

Как правило, вследствие того что взаимодействие магнитного поля внешнего источника излучения со спином электрона (которое описывает последнее слагаемое в выражении (2)) является достаточно слабым, этим взаимодействием можно пренебречь.

Запишем квазиклассическое кинетическое уравнение для электронной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]}{c} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = L(f), \quad (3)$$

где \mathbf{u} — скорость электрона; $L(f)$ — интеграл столкновений.

В линейном приближении можно использовать тау-приближение, т. е. искать решение уравнения (3) в виде $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \delta f$, где δf — поправка к квазиравновесной функции распределения электронов $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, которую можно представить в общем виде:

$$\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 1/[e^{(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - \mu)/T(t)} + 1].$$

Здесь μ — химический потенциал; $T(t)$ — квазиравновесная (в общем случае) температура электронного газа, изменяющаяся под действием внешнего переменного электромагнитного поля. Полагаем, что постоянная Больцмана $k_b = 1$. В результате уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]}{c} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\delta f}{\tau_p}, \quad (4)$$

где τ_p — время электрон-электронной релаксации для электрона с импульсом \mathbf{p} . Для вычисления сечения поглощения используем формулу

$$\sigma^* = 8\pi \frac{\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2}{(|E|^2 + |H|^2)c}, \quad (5)$$

где \dot{Q}_1, \dot{Q}_2 — диссипативные функции.

Выражение для \dot{Q}_1 имеет вид (см. [5])

$$\dot{Q}_1 = T_0 \dot{S} = T_0 \frac{d}{dt} \left(\sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} (1-f) \ln(1-f) + f \ln f \right) = -T_0 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial t} \ln \left(\frac{1}{f} - 1 \right),$$

где $\dot{S} = dS/dt$; S — энтропия. Если $f = \bar{f} + \delta f = \bar{f} + (\partial \bar{f} / \partial T_0) \delta T$ ($\delta T = T - T_0$; T_0 — равновесная температура электронов), то

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= T_0 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} \frac{\delta f^2}{\bar{f}(1-\bar{f})\tau_p} = T_0 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \right)^2 \frac{\delta T^2}{\tau_p \bar{f}(1-\bar{f})} = \\ &= 2T_0 \operatorname{Re} \int \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \right)^2 \frac{\delta T^2}{\tau_p \bar{f}(1-\bar{f})} d\Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

где $d\Gamma = d^3x d^3p / (2\pi\hbar)^3$ — элемент фазового объема (множитель 2 появляется вследствие учета вырождения электронных состояний по спину); \hbar — постоянная Планка.

Так как взаимодействие электронов с электромагнитным полем определяется гамильтонианом (см. [6])

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} d^3x,$$

где $\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{u} f \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$ — плотность тока электронов; \mathbf{A} — потенциал магнитного поля, то

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 &= -\dot{H}_{int} = \frac{2e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{u} \mathbf{A}) d\Gamma \approx \frac{2e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \delta T(\mathbf{u} \mathbf{A}) d\Gamma = \\ &= \frac{2e}{c} \operatorname{Re} \int \frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} [\delta \dot{T}(\mathbf{u} \mathbf{A}) + \delta T(\mathbf{u} \dot{\mathbf{A}})] d\Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления изменения температуры под действием внешнего электромагнитного поля используем уравнение (4), подставив в него функцию распределения $f = \bar{f} + (\partial \bar{f} / \partial T_0) \delta T$ (см. [7, 8]). После несложных преобразований получаем уравнение

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \left(\delta \dot{T} + \frac{\delta T}{\tau_p} \right) + e \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varepsilon} \left(\dot{\varphi} - \frac{(\mathbf{u} \dot{\mathbf{A}})}{c} \right) = 0.$$

Оставляя в этом уравнении только слагаемое, которое содержит векторный потенциал \mathbf{A} , и считая, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}$, получаем выражение для действительной части искомого решения

$$\delta T = -\frac{e(\omega\tau)^2}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{(\mathbf{u} \mathbf{A})}{c} \frac{T}{\varepsilon_p - \mu}. \quad (8)$$

При этом использовалось соотношение

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varepsilon_p} \frac{\varepsilon_p - \mu}{T_0},$$

где $\bar{f} = 1/(e^{(\varepsilon_p - \mu)/T_0} + 1)$. С учетом (8) из (6), (7) получаем соответственно

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= 2 \frac{e^2 \omega^4}{c^2} T_0^3 \int \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \right)^2 \frac{\tau_p^3 (\mathbf{uA})^2}{\bar{f}(1-\bar{f})(\varepsilon_p - \mu)^2 (1 + \omega^2 \tau_p)^2} d\Gamma, \\ \dot{Q}_2 &= \text{Re}(-\dot{H}_{int}) = 4 \frac{e^2 \omega^2}{c^2} T_0 \int \frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \frac{(\mathbf{uA})^2 \tau_p}{(1 + \omega^2 \tau_p^2)(\varepsilon_p - \mu)} d\Gamma.\end{aligned}\quad (9)$$

Формулы (9) определяют диссипацию энергии в металлической частице.

Осталось определить зависимость векторного потенциала от соотношения между толщиной скин-слоя и радиусом частицы.

Выберем полярную ось z , направление которой противоположно направлению падения электромагнитной волны. Кроме того, в силу осевой симметрии задачи ось z ориентирована противоположно вектору Пойнтинга. Начало сферической системы координат $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ выберем в центре частицы. Для компонент полей \mathbf{E} и \mathbf{H} имеем соответственно $\mathbf{E} = (0, E_\theta(r), 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H_\varphi(r))$, при этом магнитный потенциал \mathbf{A} обладает лишь одной отличной от нуля компонентой: $\mathbf{A} = (0, A_\theta(r), 0)$.

Заметим, что вследствие сферической симметрии задачи направление внешнего излучения можно считать совпадающим с направлением полярной оси или с направлением, противоположным ему. В общем случае, когда вектор Пойнтинга не совпадает с осью симметрии, необходимо ввести три корректирующих эйлеровых угла $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и результат вычислений проинтегрировать по всем этим углам. При этом результат (сечение поглощения) изменится лишь на некоторый числовой множитель порядка единицы, а характер сечения поглощения останется прежним. Поэтому в данной работе рассматривается лишь случай падения электромагнитной волны на частицу в радиальном направлении. Следует отметить, что такое упрощение не оказывает влияния на искомые частотную и температурную зависимости сечения поглощения и дает количественно и качественно корректное выражение.

Таким образом, с помощью соотношения

$$H_\varphi = (\text{rot } \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta)$$

нетрудно вычислить все искомые зависимости.

Магнитный потенциал \mathbf{A} удовлетворяет уравнению Даламбера $\Delta \mathbf{A} - \ddot{\mathbf{A}}/c^2 = (4\pi/c) \mathbf{j}$ (для металла $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$; σ — проводимость металла, в общем случае являющаяся тензором второго ранга). В случае сферической поверхности Ферми тензор σ сводится к скалярной величине (см. [2]), поскольку оказывается пропорциональным символу Кронекера.

В настоящей работе рассматривается сферическая поверхность Ферми металлической частицы (когда не существует выделенного направления в пространстве (координатном или импульсном)). Заметим, что форма этой поверхности не меняется в электромагнитном поле [2], поскольку рассматривается импульсное пространство.

Из уравнения Даламбера следует

$$A_\theta = -\frac{4\pi\sigma}{c} \int_V \frac{E_\theta(\mathbf{r}', t) e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (10)$$

где $\kappa = \omega/c$.

Для вычисления интеграла (10) необходимо знать распределение переменного электрического поля $E_\theta(\mathbf{r}, t)$ внутри частицы. Для того чтобы его найти, используем уравнение

$$\Delta E_\theta + \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} E_\theta = 0.$$

В сферической системе координат решение этого уравнения целесообразно искать в виде $E_\theta = f(r) \cos \theta$, где функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 f'' + 2x f' - (a^2 x^2 + 2) f = 0, \quad (11)$$

$x = r/\xi$, $a = i - 1$.

Решением уравнения (11), конечным в нуле, является выражение

$$f(x) = [C_1(ax - 1) e^{ax} + C_2(ax + 1) e^{-ax}] / x^2, \quad (12)$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования.

Для того чтобы на бесконечности решение было конечным, в общем решении (12) можно положить $C_2 = 0$, $C_1 = C$. В результате получаем $f(x) = C(1 + x - ix) e^{-x+ix} / x^2$. Заметим, что это решение следует понимать как предел $f(x) = \lim_{C_2 \rightarrow 0} f(x, C_2)$. Результаты всех последующих вычислений следует рассматривать как предельные переходы при $C_2 \rightarrow 0$, однако вследствие сходимости всех последующих интегралов можно положить $C_2 = 0$.

Поскольку в статическом приближении $x = 0$ ($\omega = 0$) выполняется равенство $E_\theta|_{x=0} = E_0 \cos \theta$, искомое значение постоянной равно $C = iE_0$. Окончательно распределение переменного электрического поля по объему сферической частицы имеет вид

$$E_\theta = \frac{iE_0 e^{-i\omega t}}{r^2} \xi^2 \cos \theta \left(1 + \frac{r}{\xi} - i \frac{r}{\xi}\right) e^{-r/\xi + ir/\xi}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в интеграл (10), получаем искомое распределение векторного потенциала.

Полагая, что направление полярной оси совпадает с фиксированным направлением радиус-вектора \mathbf{r} , и переходя к сферическим координатам, находим

$$A_\theta = -\frac{8i\pi^2 \sigma E_0}{c} \xi^2 \cos \theta \int_0^R \psi(r') dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta'}{\sqrt{d_1 - d_2 \cos \theta'}} e^{i\kappa \sqrt{d_1 - d_2 \cos \theta'}} d\theta',$$

где $d_1 = r^2 + r'^2$; $d_2 = 2rr'$.

Функция $\psi(x)$ имеет вид $\psi(x) = (1 + x - ix) e^{-x+ix}$, где $x = r/\xi$.

Интеграл по угловой переменной вычисляется элементарно и равен $i[e^{i\kappa|r-r'|} - e^{i\kappa(r+r')}] / (rr'\kappa)$. Следовательно,

$$A_\theta = -\frac{8\pi^2 \sigma E_0}{c r \kappa} \xi^2 \cos \theta \int_0^R \frac{\psi(r')}{r'} [e^{i\kappa|r-r'|} - e^{i\kappa(r+r')}] dr'.$$

Для вычисления интеграла по r' (вследствие наличия модуля разности $|r-r'|$) область интегрирования следует разбить на две области: $r' \in [0, r]$ и $r' \in [r, R]$. Выполнив простые вычисления, получаем искомое распределение векторного потенциала по объему частицы

$$A_\theta = \frac{8\pi^2 i \sigma E_0}{c r \kappa} \xi^2 \cos \theta J(r), \quad (14)$$

где

$$J(x) = (i-1) e^{i\kappa r} \left(\frac{e^{(i-1+i\kappa\xi)x}}{i-1+i\kappa\xi} - \frac{e^{(i-1-i\kappa\xi)x}}{i-1-i\kappa\xi} + \frac{1}{i-1-i\kappa\xi} - \frac{1}{i-1+i\kappa\xi} \right) + \\ + 2 \frac{(i+1) \sin \kappa \xi x}{i-1+i\kappa\xi} \left(e^{(i-1+i\kappa\xi)R/\xi} - e^{(i-1+i\kappa\xi)x} \right) +$$

$$+ 2i \left(e^{i\kappa r} \int_0^x \frac{e^{(i-1)x}}{x} \sin(\kappa \xi x) dx + \sin(\kappa \xi x) \int_x^{R/\xi} \frac{e^{(i-1+i\kappa \xi)x}}{x} dx \right),$$

$x = r/\xi$.

Полученное точное выражение можно упростить, если учесть, что параметр $\kappa \xi$ равен $\sqrt{\omega/(2\pi\sigma)}$ и для рассматриваемых частот $\omega \leq 10^{15} \text{ с}^{-1}$ всегда мал (характерное значение проводимости металлов $\sigma \approx 10^{19} \text{ с}^{-1}$). В линейном приближении по $\kappa \xi$ имеем

$$J(x) \approx 2i\kappa r (e^{(i-1)R/\xi} - e^{(i-1)x}) + (i-1)\kappa r e^{(i-1)x} + 2i\kappa r \int_x^{R/\xi} \frac{e^{(i-1)x}}{x} dx,$$

следовательно, искомое распределение векторного потенциала по объему частицы имеет вид

$$A_\theta \approx -\frac{16\pi^2 \sigma E_0}{c} \xi^2 \cos \theta \left[(e^{(i-1)R/\xi} - e^{(i-1)r/\xi}) + \left(\frac{i+1}{2} e^{(i-1)r/\xi} + \int_{r/\xi}^{R/\xi} \frac{e^{(i-1)x}}{x} dx \right) \right].$$

Поскольку согласно (5) $\sigma = 8\pi(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2)/[(|E|^2 + |H|^2)c]$, в силу (9) с учетом $(\mathbf{u}\mathbf{A})^2 = (u_\theta A_\theta)^2 \rightarrow u^2 |A_\theta|^2 \cos^2 \theta$ имеем

$$\sigma_{\text{п}} = 16\pi \frac{e^2 \omega^2}{c^3 (|E_\theta|^2 + |H_\varphi|^2)} T_0 \int \frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \frac{\tau_p (2 + 3\omega^2 \tau_p^2) |u A_\theta|^2 \cos^2 \theta}{(1 + \omega^2 \tau_p^2)^2 (\varepsilon_p - \mu)} d\Gamma.$$

Используя решение (14) и соотношение $|E_\theta|^2 = |H_\varphi|^2 = E_0^2$, для сечения поглощения окончательно получаем

$$\sigma_{\text{п}} = -\frac{16^3 \pi^5 e^2 \omega^2 \sigma^2 \xi^4}{2c^5 \kappa^2} \int K(r, \omega) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varepsilon} \frac{u^2 \tau_p (2 + 3\omega^2 \tau_p^2)}{r^2 (1 + \omega^2 \tau_p^2)^2} \cos^4 \theta d\Gamma,$$

где

$$\begin{aligned} K(r, \omega) = & \sin^2 \kappa r \left[e^{-2R/\xi} + e^{-2r/\xi} - 2e^{-(r+R)/\xi} \cos\left(\frac{R-r}{\xi}\right) \right] + \\ & + \sin 2\kappa r \left[\left(e^{-R/\xi} \cos\left(\frac{R}{\xi}\right) - e^{-r/\xi} \cos\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) \int_0^{r/\xi} e^{-x} \frac{\cos x \sin(\kappa \xi x)}{x} dx + \right. \\ & + \left. \left(e^{-R/\xi} \sin\left(\frac{R}{\xi}\right) - e^{-r/\xi} \sin\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) \int_0^{r/\xi} e^{-x} \frac{\sin x \sin(\kappa \xi x)}{x} dx \right] - \\ & - 2 \sin^2 \kappa r \left[\left(e^{-R/\xi} \cos\left(\frac{R}{\xi}\right) - e^{-r/\xi} \cos\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) \int_0^{r/\xi} e^{-x} \frac{\sin x \sin(\kappa \xi x)}{x} dx + \right. \\ & + \left. \left(e^{-R/\xi} \sin\left(\frac{R}{\xi}\right) - e^{-r/\xi} \sin\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) \int_0^{r/\xi} e^{-x} \frac{\cos x \sin(\kappa \xi x)}{x} dx \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^{r/\xi} e^{-x} \frac{\cos x \sin(\varkappa \xi x)}{x} dx \right)^2 + \left(\int_0^{r/\xi} e^{-x} \frac{\sin x \sin(\varkappa \xi x)}{x} dx \right)^2 + \\
& + \sin^2 \varkappa r \left[\left(\int_{r/\xi}^{R/\xi} e^{-x} \frac{\cos x}{x} dx \right)^2 + \left(\int_{r/\xi}^{R/\xi} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx \right)^2 \right] + \\
& + 2 \sin^2 \varkappa r \left[\left(e^{-R/\xi} \cos\left(\frac{R}{\xi}\right) - e^{-r/\xi} \cos\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) \int_{r/\xi}^{R/\xi} e^{-x} \frac{\cos x}{x} dx + \right. \\
& \left. + \left(e^{-R/\xi} \sin\left(\frac{R}{\xi}\right) - e^{-r/\xi} \sin\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) \int_{r/\xi}^{R/\xi} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx \right] + \\
& + 2 \sin \varkappa r \left(\cos \varkappa r \int_0^{r/\xi} dx \int_{r/\xi}^{R/\xi} dy e^{-(x+y)} \frac{\cos(x-y) \sin(\varkappa \xi x)}{xy} - \right. \\
& \left. - \sin \varkappa r \int_0^{r/\xi} dx \int_{r/\xi}^{R/\xi} dy e^{-(x+y)} \frac{\sin(x-y) \sin(\varkappa \xi x)}{xy} \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

Заметим, что выражение (15) можно существенно упростить, поскольку однородность внешнего электромагнитного поля (условие $\lambda \gg R$) позволяет провести разложение по малому параметру $\varkappa R$ и заменить $\sin \varkappa r$ на $\varkappa r$, а подынтегральные синусы аргумента $\varkappa \xi x$ — на линейную зависимость $\varkappa \xi x$.

Для вычисления интеграла (15) целесообразно перейти к сферической системе координат как в пространстве, для которого элемент объема вычисляется по формуле

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

(область изменения переменных $r \in [0, R]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$), так и в импульсном пространстве, для которого $d^3p = p^2 \sin \alpha dp d\alpha d\beta$ (область изменения переменных $p \in [0, p_F]$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, 2\pi]$). Используя условие вырождения электронного газа (что позволяет заменить производную $\partial f / \partial \varepsilon$ на $-\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$, где ε_F — энергия Ферми; $\delta(x)$ — дельта-функция), с учетом явного выражения для \varkappa и ξ получаем

$$\sigma_{\Pi} = \frac{128\pi^2 e^2 c}{5\hbar^2 a} \frac{m u_F^2 \bar{\tau} (2 + 3\omega^2 \bar{\tau}^2)}{\omega^2 (1 + \omega^2 \bar{\tau}^2)^2} F(\omega). \quad (16)$$

Здесь $F(\omega) = \int_0^R K(r, \omega) dr$ (порядок величины $F(\omega) \approx (\omega/c)^2 R^4 / \xi \sim \omega^{5/2} R^4$); u_F — скорость Ферми; $\bar{\tau}$ — среднее время релаксации электрона.

Формула (16) имеет общий характер и справедлива при любых частотах внешнего электромагнитного поля, как при малых, когда $\omega \ll 1/\tau_{ee}$, так и при больших, когда $\omega \gg 1/\tau_{ee}$. Время, обратное времени релаксации в случае электрон-электронных столкновений по порядку величины, определяется формулой $1/\tau_{ee} \approx T^2 / (\hbar \varepsilon_F)$ (см., например,

[2, 9, 10]). Это утверждение доказывается с помощью выведенного в [11] (см. также [12, 13]) кинетического уравнения, в правой части которого учтена частотная зависимость амплитуды рассеяния и которое является справедливым при любых частотах внешнего электромагнитного поля ω .

Вычислив время релаксации с использованием этого кинетического уравнения, с учетом законов сохранения энергии и импульса в случае произвольных частот получаем следующую частотную зависимость времени релаксации:

$$\frac{1}{\tau_{ee}(\omega)} \approx \frac{T^2}{\hbar \varepsilon_F} \left(1 + \frac{2\hbar\omega}{\mu_B H_0} \right). \quad (17)$$

Подставляя (17) в формулу (16), находим искомое сечение поглощения в виде функции частоты

$$\sigma_{\Pi} = \frac{64\pi^3 e^2 c}{3\omega \hbar^3} \frac{m^2 u_F^3 \tau_0^2 \omega_L}{(1 + \omega^2 \omega_L^2 \tau_0^2 / (2\omega + \omega_L)^2)^2 (\omega_L + 2\omega)} F(\omega),$$

где $1/\tau_0 = T^2/(\hbar \varepsilon_F)$; $\omega_L = \gamma_e H_0$ — ларморовская частота прецессии электрона в переменном электромагнитном поле с амплитудой H_0 .

Функция $F(\omega)$ легко вычисляется с помощью численного интегрирования, но в предельных случаях эту зависимость нетрудно определить, не используя численное интегрирование. Окончательно для $F(\omega)$ получаем выражение

$$F(\omega) \approx \begin{cases} \nu_1 \xi, & c^2/(2\pi\sigma R^2) \ll \omega \ll 1/\tau_0, \\ \nu_2 R^3/\xi^2, & \omega \ll 1/\tau_0, \quad \omega \ll c^2/(2\pi\sigma R^2), \end{cases}$$

где ν_1, ν_2 — числовые коэффициенты. При этом зависимость сечения поглощения от частоты имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Pi} &= \frac{64\pi^3 e^2 c}{3\omega \hbar^3} \frac{m^2 u_F^3 \tau_0^2 \omega_L}{(1 + \omega^2 \omega_L^2 \tau_0^2 / (2\omega + \omega_L)^2)^2 (\omega_L + 2\omega)} F(\omega) \approx \\ &\approx \begin{cases} 1/\omega^{3/2}, & c^2/(2\pi\sigma R^2) \ll \omega \ll 1/\tau_0, \\ \sigma_0 = \text{const}, & \omega \ll 1/\tau_0, \quad \omega \ll c^2/(2\pi\sigma R^2). \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

При больших частотах, когда $1/\tau_0 \ll \omega \ll \omega_L$, $\omega \ll c/R$, для сечения поглощения получаем

$$\sigma \sim 1/\omega. \quad (19)$$

Следует отметить, что сечение поглощения существенно зависит от амплитуды приложенного внешнего электромагнитного поля. Эта зависимость является следствием учета нелинейности взаимодействия частицы с переменным полем.

Проанализируем формулу (16), справедливую в общем случае. Зависимость сечения поглощения от частоты имеет следующую асимптотику:

— если частота электромагнитного поля мала ($\omega\tau_{ee} \ll 1$), то

$$\sigma_{\Pi} \approx \frac{2^7 \sqrt{2\pi} \pi^2 e^2}{5\hbar^2 a} \frac{m u_F^2 \bar{\tau} R^4}{c^2} \sqrt{\omega\sigma};$$

— если частота поля велика ($\omega\tau_{ee} \gg 1$), то

$$\sigma_{\Pi} = \frac{128\pi^2 e^2 c}{5\hbar^2 a} \frac{m u_F^2 \bar{\tau}}{\omega^2} \text{Re}^{-R/\xi};$$

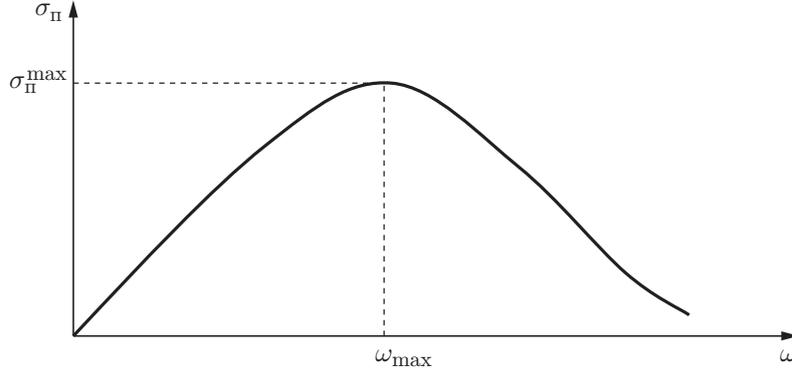


Рис. 1. Зависимость сечения поглощения от частоты при $l_{ee} \ll R$

— в точке максимума $\omega_{\max} = \omega_0 = c^2/(2\pi\sigma R^2)$ сечение поглощения определяется по формуле

$$\sigma_{\Pi}^{\max} = \frac{384\pi^2 e^2}{5\hbar^2 a c} \frac{m u_{\text{F}}^2 \bar{\tau}}{e} R^3,$$

где число e , стоящее в знаменателе выражения, есть основание натурального логарифма.

На рис. 1 показаны зависимости (18), (19).

2. Случай $l_{ee} \gg R$. В отсутствие внешних переменных полей мелкодисперсная металлическая частица находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой, поэтому, несмотря на то что время баллистического движения электрона $\tau_b = 2R/u_{\text{F}}$ значительно меньше времени электрон-электронных столкновений τ_{ee} , по истечении некоторого промежутка времени τ (причем $\tau \gg \tau_{ee} \gg \tau_b$) эта частица термализуется и приобретает температуру, равную температуре окружающей среды T , которая всегда может считаться термостатом. Однако для этого необходимо, чтобы электроны столкнулись с внутренней поверхностью частицы, которая находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой, большое количество раз N^* .

В соответствии с физикой явления $\tau = N^* \tau_c$. Здесь τ_c — время контакта с поверхностью, в течение которого энергия электрона ε изменяется на величину $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$; число столкновений N^* определяется из условия $\varepsilon \pm N^* \delta\varepsilon \sim k_b T$ (знак “+” соответствует случаю $\varepsilon < k_b T$, знак “−” — случаю $\varepsilon > k_b T$).

Иная ситуация наблюдается во внешних переменных полях. Пусть система находится в состоянии термодинамического равновесия, и в некоторый момент времени на нее начинает действовать внешнее переменное электромагнитное поле, которое мгновенно выводит электроны из состояния равновесия. В случае малых частиц вследствие постоянного периодического воздействия внешнее электромагнитное поле не позволяет электронам вернуться в состояние равновесия. Это означает, что при $l_{ee} \gg R$ невозможно ввести в рассмотрение функцию Ферми распределения электронов, несмотря на то что сама наночастица под действием электромагнитного поля нагревается, а электроны, ударяясь о ее поверхность, не успевают термостатироваться. Последнее позволяет использовать при вычислении сечения поглощения принципы квантовой механики, считая электроны квантовым газом, заключенным в некоторый объем $V = (4\pi/3)R^3$ и подвергающимся внешнему воздействию.

Для решения задачи введем в рассмотрение нерелятивистский квантовый оператор взаимодействия электронов с классическим электромагнитным полем в виде

$$H_{int} = -i \frac{e\hbar}{2mc} \int [(\nabla\psi^*)\psi - \psi^* \nabla\psi] \mathbf{A} d^3x, \quad (20)$$

где операторы ψ (ψ^*) можно представить в виде разложения по плоским волнам, не учитывая амплитуду Блоха $u_p(\mathbf{r})$, обусловленную действием периодического кристаллического поля $V(\mathbf{r})$.

Вследствие того что электроны слабо взаимодействуют друг с другом, их движение является свободным, поэтому для нормированных на объем частицы операторов волновых функций имеем выражения

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p c_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}, \quad \psi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p c_p^+ e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}, \quad (21)$$

где c_p , c_p^+ — операторы уничтожения и рождения электрона в состоянии p ; p — все квантовые числа электрона.

Поскольку в рассматриваемой задаче спиновое взаимодействие электрона с переменным магнитным полем мало, под p понимаются только импульсы свободного электрона \mathbf{p} .

Разложим векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в ряд Фурье

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_q (\mathbf{A}_q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} + \mathbf{A}_q^* e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}), \quad (22)$$

где

$$\mathbf{A}_q = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x, \quad \mathbf{A}_q^* = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x.$$

Подставляя разложения (21), (22) в гамильтониан взаимодействия (20), получаем

$$H_{int} = -\frac{e}{2mcV} \sum_{p,p',q} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') [c_p^+ c_{p'} A_q^* \Delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \hbar\mathbf{q}) + c_p^+ c_{p'} A_q \Delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \hbar\mathbf{q})],$$

где $\Delta(x)$ — ступенчатая функция ($\Delta(x) = 1$, если $x \geq 0$, и $\Delta(x) = 0$, если $x < 0$). Функция $\Delta(x)$ получена в результате интегрирования по объему частицы:

$$\int_V e^{i(\mathbf{q} + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})/\hbar)\mathbf{r}} d^3x = V \Delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \hbar\mathbf{q}).$$

С помощью известного определения [14] (см. также [15]) сечение можно ввести следующим образом:

$$\sigma_{\Pi} = W_{pp'} V/c.$$

В результате достаточно громоздких преобразований находим

$$\bar{\sigma}_{\Pi}(\omega, R) = \frac{e^2 Z(\omega, R) \sqrt{m}}{2^5 \pi c^3 \hbar^4 \varepsilon_F \sqrt{\varepsilon_F}} (\hbar\omega)^3 g(x),$$

где $x = \varepsilon_F/(\hbar\omega)$; $Z(\omega, R) = |\mathbf{A}_q|^2$; $\mathbf{A}_q = \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x$,

$$g(x) = [(2x+1)^2 - 1]^{3/2} - [(2x-1)^2 - 1]^{3/2} - (2x+1)\sqrt{(2x+1)^2 - 1} - (2x-1)\sqrt{(2x-1)^2 - 1} + \text{arch}(2x+1) - \text{arch}(2x-1).$$

Вводя энергию фотона в соответствии с формулой $E_0^2 V/(4\pi) = E_0^2 R^3/3 = \hbar\omega$, получаем

$$\bar{\sigma}_{\Pi}(\omega, R) = \frac{2^7 \pi^2 e^2 S(\omega, R) \omega}{3c\alpha\hbar} R^3,$$

где $S(\omega, R) = g(x)Z(\omega, R)$.

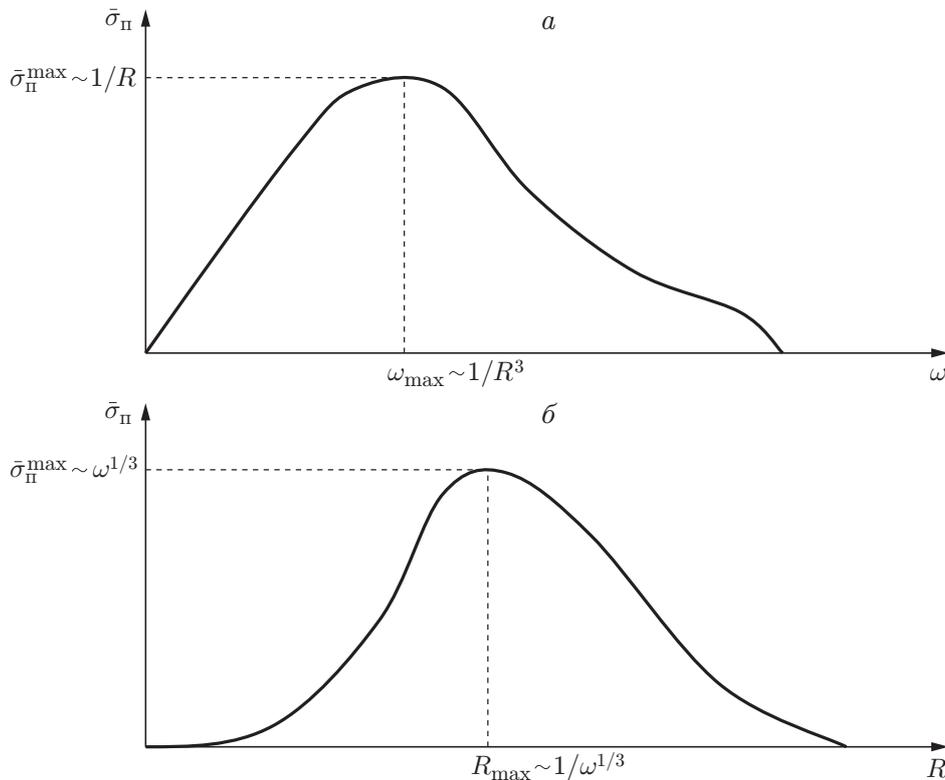


Рис. 2. Зависимости сечения поглощения от частоты (а) и размера частицы (б) при $l_{ee} \gg R$

Оценим величину $\bar{\sigma}_{\Pi}$, приняв следующие значения параметров: радиус частицы $R = 10^{-5}$ см, частота $\omega = 10^{12}$ с $^{-1}$, межатомное расстояние $a = 10^{-8}$ см, скорость Ферми $u_F = 3 \cdot 10^7$ см/с, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 10^{-27}$ г, скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Окончательно имеем $\bar{\sigma}_{\Pi} \approx 3,5 \cdot 10^{-11}$ см 2 . Полученная оценка хорошо согласуется с результатами экспериментов.

Качественные зависимости сечения поглощения от частоты и радиуса показаны на рис. 2.

Заключение. В работе построена теория поглощения электромагнитного излучения металлическими сферическими частицами при $l_{ee} \ll R$ и $l_{ee} \gg R$.

Учтена геометрия частицы и определена зависимость сечения поглощения от соотношения между толщиной скин-слоя ξ и радиусом частицы R .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрикосов А. А.** Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1969.
2. **Лифшиц И. М.** Электронная теория металлов / И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов. М.: Наука, 1971.
3. **Займан Дж.** Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.
4. **Ландау Л. Д.** Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1973. Т. 2.
5. **Ландау Л. Д.** Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1976. Т. 5.
6. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982. Т. 8.

7. **Гладков С. О., Каганов М. И.** К теории релаксации ядерных спинов в ферромагнетиках при сверхнизких температурах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1981. Т. 80, вып. 4. С. 1577–1585.
8. **Гладков С. О.** Релаксация в ферромагнитных металлах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1982. Т. 83, вып. 7. С. 806–809.
9. **Лифшиц Е. М.** Физическая кинетика / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. М.: Наука, 1979. Т. 10.
10. **Гладков С. О.** Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999.
11. **Gladkov S. O.** The kinetics of nuclear magnetically ordered systems // Phys. Rep. 1989. V. 182, N 4/5. P. 211–364.
12. **Sapogov S. A., Seminozhenko V. P.** Magnon kinetic equations for ferromagnets parametrically excited by intense high frequency sound // Phys. Solid State. 1981. V. 23. P. 2436–2437.
13. **Seminozhenko V. P., Yatsenko A. A.** Kinetic equations for electrons and phonons in a strong constant electric field // Phys. Lett. A. 1980. V. 75. P. 267–268.
14. **Ландау Л. Д.** Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1974. Т. 3.
15. **Gladkov S. O.** Dielectric properties of porous media. Berlin; N. Y.; L.: Springer, 2003.

*Поступила в редакцию 12/II 2009 г.,
в окончательном варианте — 2/II 2010 г.*
