

УДК 533.6: 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В. А. Жаров, Тун Тун, Ю. И. Хлопков

Московский физико-технический институт (государственный университет),
140180 Жуковский Московской области
E-mail: htunhtun80@gmail.com

На основе экспериментальных данных о кинематике и динамике турбулентных пятен (пятен Эммонса) на плоской пластине в несжимаемой жидкости предложен статистический метод моделирования течения в переходной области пограничного слоя, позволяющий определить перемежаемость с учетом наложения пятен друг на друга, а также силы на поверхности пластины и поле течения в окрестности переходной зоны, если известно поле продольной компоненты средней скорости в развитом турбулентном пограничном слое, в зависимости от числа Рейнольдса. Данный подход, в отличие от многопараметрических моделей перехода, позволяет избежать использования значений параметров, не имеющих физического смысла.

Ключевые слова: пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход, статистическое моделирование.

Введение. В последнее время предпринимаются попытки исследования турбулентных течений с помощью методов статистического моделирования [1, 2]. При этом используются модели [3], которые легко интерпретируются в рамках теории вероятности. В задаче о ламинарно-турбулентном переходе такой моделью является модель возникновения и развития турбулентных пятен, предложенная в работе [4]. Этот подход основан на экспериментальном наблюдении при некотором критическом значении числа Рейнольдса появления пятен — зародышей турбулентности, которые далее вниз по течению растут по известным простым законам, сохраняя свою форму. Внутри пятен характеристики течения близки к характеристикам развитого турбулентного течения при соответствующем положении пятна числу Рейнольдса, что позволяет определить средние силы и поля в переходной области. В окрестности критического значения числа Рейнольдса пятна возникают хаотично как в пространстве, так и во времени. С использованием информации о геометрии пятен и статистике их появления в работе [4] определена вероятность того, что некоторая точка на поверхности пластины накрыта турбулентным пятном, т. е. перемежаемость. При этом предполагалось, что пятна не перекрываются. Используя метод статистического моделирования, легко получить подобную картину даже с учетом их перекрытия, если известны кинематика и динамика отдельных пятен и характер их взаимодействия. Такие данные получены в ряде современных экспериментальных исследований (см., например, [5–7]), результаты которых использованы в настоящей работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00556) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1984-2002.1).

Для замыкания модели необходимо знать критическое значение числа Рейнольдса начала перехода. Имеется большое количество экспериментальных данных (см., например, [8]) о связи параметров набегающего потока с числом Рейнольдса перехода Re_{cr} . Эту информацию целесообразно использовать на начальной стадии моделирования. Тем не менее предприняты попытки не только решить эту задачу феноменологически (с использованием критерия e^n), но и определить Re_{cr} с учетом развития возмущений в допереходной области. В [9] эта величина рассчитана на основе статистики развития волн в приближении трехволнового резонанса. В работах [10, 11] предложены методы определения динамики волновых пакетов, которые также можно использовать для вычисления Re_{cr} . Необходимо отметить, что имеются многочисленные попытки определения переходной области с помощью многопараметрических моделей турбулентности. Однако, как показывает практика подобных расчетов, для вычисления реалистичного значения Re_{cr} требуется задать нефизические значения определяющих параметров таких моделей [12].

1. Формулировка вероятностной модели перехода. Метод определения плотности распределения вероятности турбулизации течения в переходной области заключается в следующем. Начиная со значения Re_{cr} (этому значению числа Рейнольдса соответствует значение продольной координаты x_0) в области течения образуются точечные пятна с частотой λ в соответствии с плотностью распределения вероятности по времени $\rho(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$. Пятна образуются статистически равномерно в области $z \in [0, 1]$, $x \in [0, x^*]$. В расчетах значение x^* принималось равным $0,1 \div 0,2$. При движении вниз по потоку пятна начинают расти (рис. 1). Программа, моделирующая развитие пятен во времени и пространстве, создана на основе пакета “Mathematica”. На рис. 2 представлена схема эволюции характерных точек (P_0, P_1, P_2) турбулентного пятна, использованных в этой программе. Принятая в данной работе форма пятен — равнобедренный треугольник (эта форма сохраняется в течение всего времени наблюдения), основание которого движется со скоростью $V_{P_0} = 0,5U_\infty$, вершина — со скоростью $V_{P_1} = 0,89U_\infty$, боковая вершина — со скоростью $V_{P_2} = 0,1U_\infty$. Рассматривается область между линией $x_0 = 0$ (см. рис. 1), на которой возникают пятна, и линией $x_l = l$, на которой пятна расположены настолько плотно, что течение в целом можно считать турбулентным. Линия $x_l = l$ определяется из численного эксперимента. Область течения $x \in [0, l]$ делится на n равных подобластей (в расчетах принималось $n = 10$). Каждая подобласть случайным образом заполняется стохастически равномерно распределенными по ней точками (в расчетах 5000 точек на подобласть), после чего определяется число $N_s/N = f(x)$, где N_s — число точек, попавших внутрь пятен; N — общее число точек в подобласти. Попадание точки в пятно, т. е.

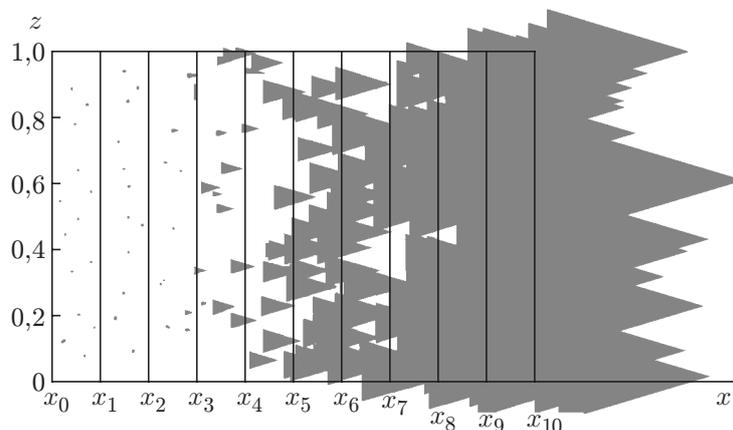


Рис. 1. Кинематика турбулентных пятен при $\lambda = 200$ ($x_{10} = 1$)

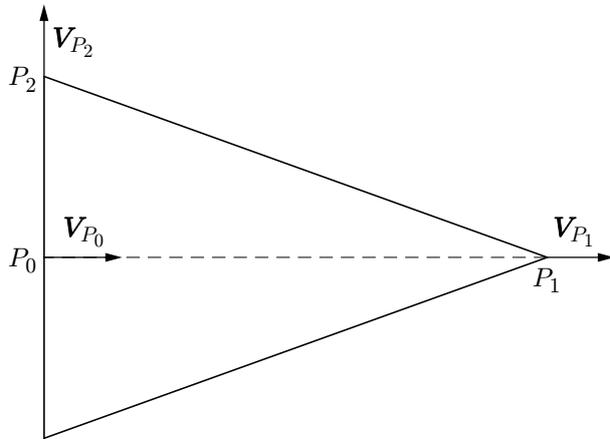


Рис. 2

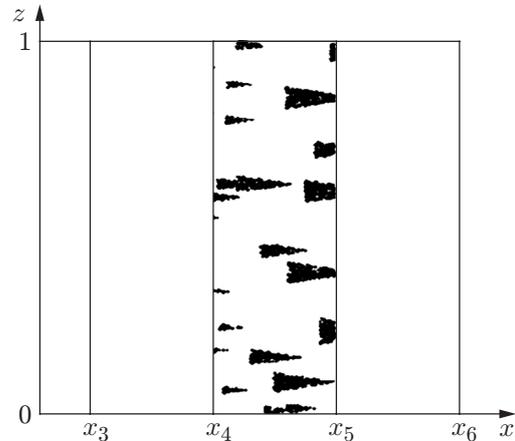


Рис. 3

Рис. 2. Геометрия турбулентного пятна и скорости движения его характерных точек P_0, P_1, P_2

Рис. 3. Схема определения площади, занятой пятнами в выделенной подобласти, методом статистического моделирования

попадание точки (x, z) в область, занятую пятном, определяется с помощью условия

$$q(t, x, z, \mathbf{s}) = \frac{|-V_{P_0}t + x - s_x|}{(V_{P_1} - V_{P_0})t} + \frac{|z - s_z|}{V_{P_2}t} \leq 1 \cap x - V_{P_0}t - s_x \geq 0,$$

где $\mathbf{s} = (s_x, s_z)$ — координаты точки P пятна. Условие, согласно которому точка должна принадлежать хотя бы одному пятну, можно записать в виде

$$Q = \bigcup_{i=1}^N q(t, x, z, \mathbf{s}^i).$$

Полученные значения f затем усредняются по нескольким реализациям.

Программа определения плотности распределения вероятности турбулизации течения создана на основе пакета “Mathematica”. На рис. 3 показаны пятна, попавшие в заданную полосу. Заметим, что в данной работе, в отличие от работы [4], плотность распределения вероятности турбулизации течения (по относительной площади S_s/S) определена с учетом перекрытия пятен. На рис. 4 приведена плотность f распределения вероятности турбулизации течения в переходной области при $\lambda = 200$ (точки). Там же показана кривая $f_1 = 0,5(1 + \operatorname{erf}((x-a)/b))$, полученная методом наименьших квадратов и хорошо аппроксимирующая численные результаты. Для сравнения тем же методом определена константа в выражении $f = 1 - \exp(-x^2/x_0^2)$, полученном теоретически [4]. На рис. 4 видно, что функция такого вида хуже аппроксимирует численные данные. По результатам сравнения численных данных с результатами аппроксимации определяются величины a и b как функции λ (рис. 5). Величина x безразмерная, т. е. отнесена к некоторой характерной длине L . Длина L используется также для обезразмеривания по поперечной координате. Если длину измерять в числах Рейнольдса, то появятся числа Рейнольдса Re и Re_0 , определенные по этим длинам: $x/L = Re/Re_0$.

2. Определение коэффициента сопротивления пластины при наличии перехода. Локальный коэффициент сопротивления пластины определяется по формуле

$$c'_f = (1 - f_1(Re))c'_{f\text{ lam}} + f_1(Re)c'_{f\text{ turb}}.$$

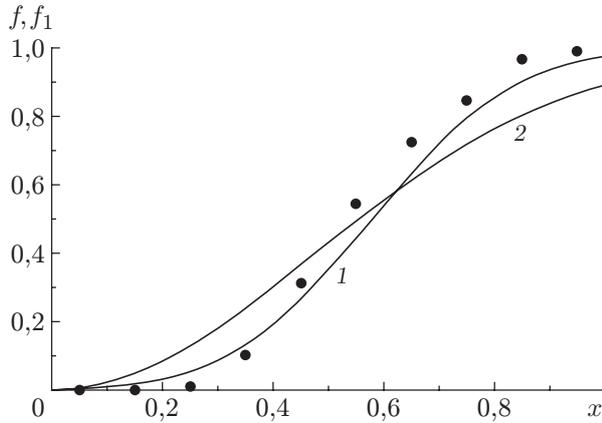


Рис. 4

Рис. 4. Плотность f распределения вероятности турбулизации течения в переходной области:

1 — $f_1 = 0,5(1 + \operatorname{erf}((x - a)/b))$; 2 — $f = 1 - \exp(-x^2/x_0^2)$ [4]; точки — результаты расчета при $\lambda = 200$, полученные в данной работе

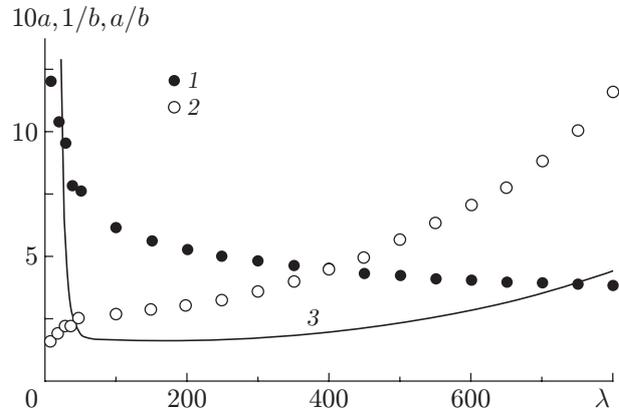


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости коэффициентов a (1), $1/b$ (2), a/b (3) от скорости появления турбулентных пятен λ

(Кривая этой зависимости должна совпадать с полученной в эксперименте [8].) Тогда выражение для интегрального коэффициента сопротивления можно записать в виде

$$c_f = \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \int_0^{\operatorname{Re}_l} c'_f d\operatorname{Re}_l = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \int_0^{\operatorname{Re}_l} c'_{f \text{ lam}} d\operatorname{Re}_l, & \operatorname{Re}_l < \operatorname{Re}_k, \\ \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \int_0^{\operatorname{Re}_k} c'_{f \text{ lam}} d\operatorname{Re}_l + \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \int_0^{\operatorname{Re}_k} ((1 - f_1)c'_{f \text{ lam}} + f_1 c'_{f \text{ turb}}) d\operatorname{Re}_l, & \operatorname{Re}_l \geq \operatorname{Re}_k \end{cases}$$

или

$$c_f = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{\operatorname{Re}_l}}, & \operatorname{Re}_l < \operatorname{Re}_k, \\ \frac{\operatorname{Re}_k}{\operatorname{Re}_l} \frac{1,328}{\sqrt{\operatorname{Re}_l}} + \frac{1}{\operatorname{Re}_l} \int_{\operatorname{Re}_k}^{\operatorname{Re}_l} \left((1 - f_1) \frac{0,664}{\sqrt{\operatorname{Re}}} + f_1 \frac{0,0576}{\sqrt{\operatorname{Re}}} \right) d\operatorname{Re}, & \operatorname{Re}_l \geq \operatorname{Re}_k. \end{cases}$$

Выражение для f_1 можно записать в более удобном виде:

$$f_1 = 0,5[1 + \operatorname{erf}(a(\operatorname{Re} - \operatorname{Re}_k - b\operatorname{Re}_0)/\operatorname{Re}_0)].$$

Здесь Re — локальное число Рейнольдса точки на пластине; $\operatorname{Re}_0, \operatorname{Re}_k$ — вспомогательные коэффициенты. Поскольку рассматривается пограничный слой на пластине при нулевом продольном градиенте давления, результаты сравнения c_f с экспериментальными данными [8. С. 595] позволяют определить величины $a, b, \operatorname{Re}_0, \operatorname{Re}_k$. Сначала определяется зависимость отношения a/b от λ (см. рис. 5). Отметим, что эта зависимость имеет минимум в точке $\lambda = 132$. В расчетах будем использовать это значение λ , поскольку при меньших λ рассмотренная модель перехода, по-видимому, неприменима, а в эксперименте значению

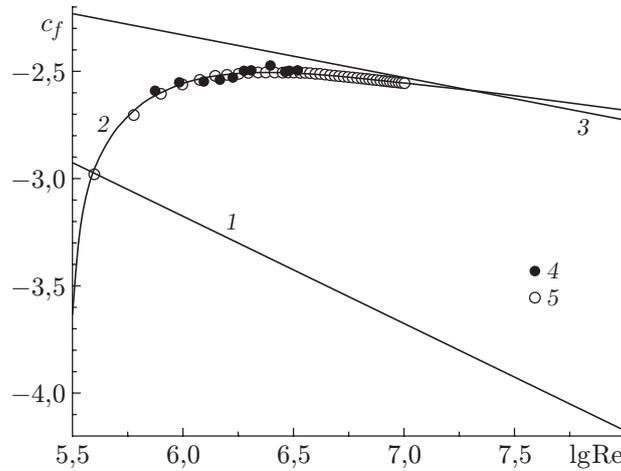


Рис. 6. Зависимость полного сопротивления пластины от числа Рейнольдса пластины: 1 — $c_{flam} = 0,664/Re_l^{3/2}$ [8] — сопротивление пластины при ламинарном обтекании; 2 — $c_f = 0,455/\lg(Re_l)^{2,58} - 1700/Re_l$ — сопротивление пластины с учетом ламинарного участка вблизи передней кромки [8]; 3 — $c_f = 0,074/Re_l^{1/5}$ — сопротивление пластины при турбулентном обтекании [8]; 4 — результаты экспериментов Герберса [8]; 5 — результаты расчетов, полученные в настоящей работе

$\lambda = 132$ соответствует максимальное значение числа Рейнольдса перехода. (Заметим, что при уменьшении λ эффективная ширина области перехода остается практически постоянной, увеличивается только число Рейнольдса начала перехода, что не согласуется со сценарием развития переходной области.) При других значениях параметров набегающего потока будут меняться значения λ и Re_k . В этом случае описание перехода сводится к определению зависимости параметров λ , Re_k от параметров набегающего потока (например, от амплитуды и спектрального состава возмущений на передней кромке).

Определив a и $1/b$ в точке $\lambda = 132$ в соответствии с аппроксимациями по λ , получим $a = 0,55$, $1/b = 2,73$. Значение Re_k определяется значением числа Рейнольдса Re_{cr} , соответствующим началу перехода. Значение Re_0 выбирается из условия наилучшего совпадения значений c_f с экспериментальными данными [8]. В результате получаем $Re_0 = 10^4$, $Re_k = 4 \cdot 10^5$. На рис. 6 приведена зависимость коэффициента сопротивления пластины от числа Рейнольдса, хорошо согласующаяся с экспериментальными данными работы [8].

Заключение. Таким образом, использование методов статистического моделирования позволяет определить кинематику турбулентных пятен в переходной области течения на пластине в различные моменты времени. Зная частоту появления пятен λ , можно определить локальную степень турбулизации потока, что позволяет вычислить различные характеристики турбулентного потока в переходной области, например локальные и интегральные силы, или построить среднее поле течения в переходной области. При этом в отличие от работы [4] степень турбулизации потока определяется с учетом перекрытия пятен. Наличие минимума у зависимости a/b от λ , по-видимому, означает, что при меньших значениях λ модель перехода, обусловленного развитием турбулентных пятен, неприменима.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболь И. М.** Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978.
2. **Ермаков С. М.** Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. М.: Наука, 1982.

3. Белоцерковский О. М., Иванов С. А., Яницкий В. Е. Прямое статистическое моделирование некоторых задач турбулентности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 489–503.
4. Emmons Н. W. The laminar-turbulent transition in a boundary layer. 1 // J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18, N 7. P. 490–498.
5. Хлопков Ю. И. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое / Ю. И. Хлопков, В. А. Жаров, С. Л. Горелов. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2002.
6. Бойко А. В. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях / А. В. Бойко, Г. Р. Грек, А. В. Довгаль, В. В. Козлов. М.; Ижевск: Науч.-исслед. центр “Регулярная и хаотическая динамика”: Ин-т компьютер. исслед., 2006.
7. Chong Т. P., Zhong S. On the three-dimensional structure of turbulent spots // J. Turbomachinery. 2005. V. 127. P. 545–551.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
9. Rubinstein R., Choudhari M. Statistical prediction of laminar-turbulent transition: Report / NASA/CR-2000-210638 ICASE. N 2000-50. Hampton (Virginia), 2000.
10. Додонов И. Г., Жаров В. А., Хлопков Ю. И. Локализованные когерентные структуры в пограничном слое // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 60–67.
11. Жаров В. А. Использование дискретного преобразования Фурье для изучения динамики волновых пакетов // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 31–37.
12. Жаров В. А. Феноменологический анализ взаимодействия внешнего турбулентного потока с турбулентным пограничным слоем на пластине / Центр. аэрогидродинам. ин-т им. Н. Е. Жуковского. Препр. М., 1993.

*Поступила в редакцию 27/XII 2007 г.,
в окончательном варианте — 26/IX 2008 г.*
