

УДК 539.375

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЕ

М. В. Мир-Салим-заде

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан  
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассматривается задача механики разрушения о зарождении трещин в подкреплённой пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий. Зародышевая трещина моделируется полосой предразрушения в состоянии пластического течения при постоянном напряжении, которая рассматривается как область ослабленных межчастичных связей материала. Определение неизвестных параметров, характеризующих зародышевую трещину, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельного раскрытия берегов полосы предразрушения материала.

Ключевые слова: полоса предразрушения, появление трещины, перфорированная подкреплённая пластина, стрингеры.

Для обеспечения достаточной прочности листовые конструкции обычно изготавливают из тонких пластин, усиленных приклепанными ребрами жесткости. Используемые в инженерных конструкциях пластины имеют технологические отверстия, являющиеся концентраторами напряжений и способствующие зарождению трещин. Для увеличения жесткости пластины подкрепляют стрингерами. Изучению деформирования и разрушения подкреплённой пластины посвящено значительное количество работ (см., например, [1]). В то же время большое значение имеет исследование зарождения трещин. В настоящее время известны различные механизмы образования трещин [2–4]. При движении дислокаций возможно расхождение атомных плоскостей, в результате чего между ними утрачивается силовое взаимодействие. Образующиеся при этом целеобразные пустоты можно трактовать как микротрещины с размерами порядка характерных размеров решетки. Моделирование процессов зарождения и развития трещины является сложной задачей, прежде всего с физической и технической точек зрения.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругая изотропная тонкая пластина, ослабленная периодической системой круговых отверстий радиусом  $\lambda$ . В точках  $z = \pm(2m + 1)L \pm iny_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ ) к пластине приклепаны поперечные ребра жесткости из другого упругого материала с площадью поперечного сечения  $A_s$  (рис. 1). На бесконечности пластина подвергнута однородному растяжению вдоль стрингера напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Для стрингера принимается гипотеза об одномерном континууме. Стрингеры не оказывают сопротивление на изгиб и работают лишь на растяжение. В расчетной схеме действие стрингеров моделируется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер с пластиной. По мере повышения интенсивности внешнего нагружения в подкреплённой пластине вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет периодический характер. Наличие зон повышенных напряжений способствует возникновению краевых трещин.

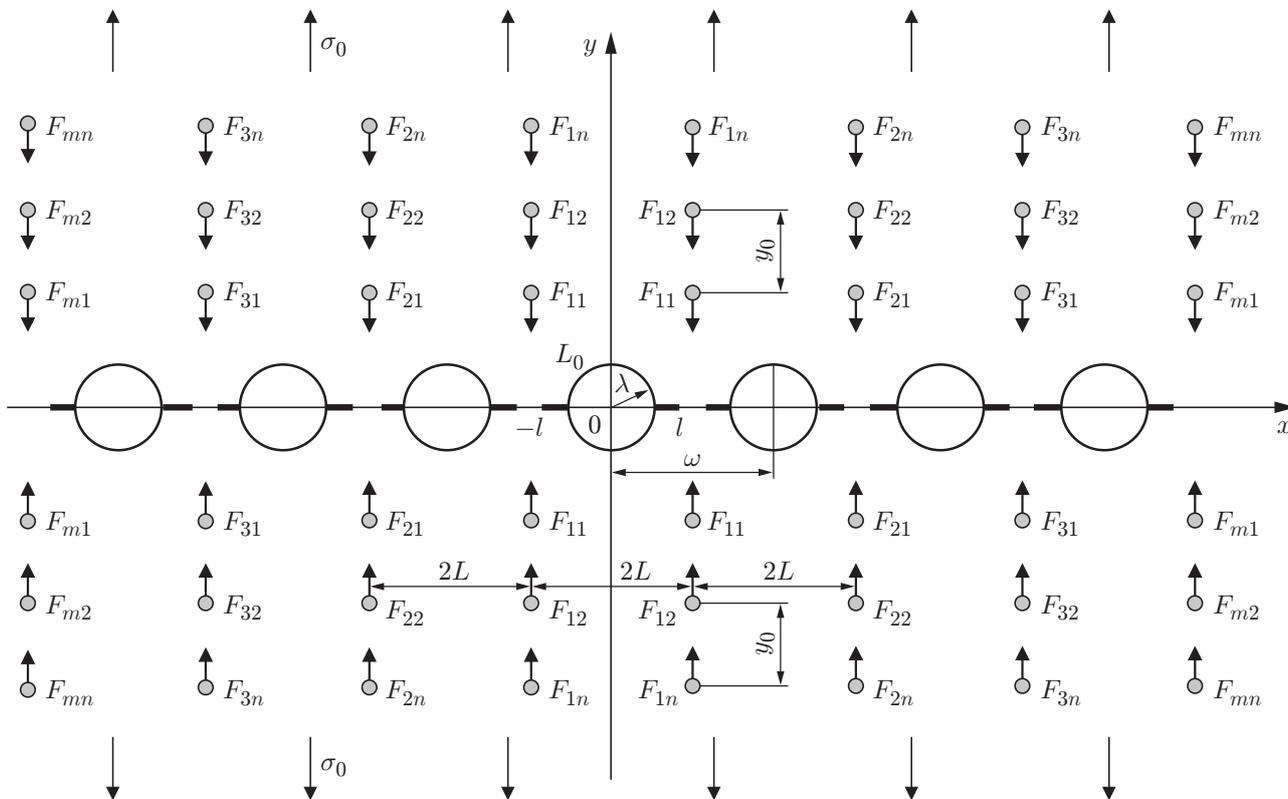


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещин в подкрепленной перфорированной пластине

При нагружении клепаной пластины силовой нагрузкой в пластине возникают зоны предразрушения, которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Принимается, что полоса предразрушения ориентирована в направлении, перпендикулярном направлению действия максимальных растягивающих напряжений, возникающих в подкрепленной пластине. Задачу о напряженно-деформированном состоянии твердого деформируемого тела, когда в теле имеются прослойки “перенапряженного” материала, можно свести к задаче о напряженно-деформированном состоянии в упругом теле, ослабленном разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону. При таком подходе к решению задачи о зарождении дефекта типа трещины прежде всего необходимо установить зависимость между усилиями и перемещениями в той области деформируемого материала, где действуют силы межчастичного взаимодействия (притяжения берегов). Учет этих эффектов в задачах механики разрушения машин и конструкций является важной, но весьма трудной задачей.

Подкрепленную пластину будем моделировать упругим (хрупким) телом. В процессе деформации в некоторых точках пластины могут появляться зоны, в которых закон Гука не выполняется, т. е. в этих зонах напряжения превышают предел упругости. Так как указанные зоны (прослойки) малы по сравнению с остальной упругой частью пластины, их можно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. При этом размер полосы предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Экспериментальные исследования возникновения областей, в которых материал деформируется за пределом упругости, показывают, что на начальной стадии зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, с ростом нагрузки внезапно появляется вторичная система зон пластических деформаций [2, 5–7].

Пусть имеется подкрепленная пластина с периодической системой круговых отверстий радиусом  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ), центры которых находятся в точках

$$P_m = m\omega, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \omega = 2.$$

Из контуров отверстий выходят симметричные прямолинейные полосы предразрушения (см. рис. 1). Будем полагать, что в полосе предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

Граничные условия в полосе предразрушения имеют вид

$$\sigma_y = \sigma_T, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести материала пластины при растяжении.

Контурные круговых отверстий свободны от внешних усилий. Для определения значений приложенной нагрузки, при которых происходит образование трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимается критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \delta_c, \quad (2)$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала трещинообразованию, определяемая в эксперименте; индексы “+” и “-” соответствуют граничным значениям на верхнем и нижнем берегах полосы предразрушения.

Дополнительное условие (2) позволяет определить параметры подкрепленной пластины, при которых появляется трещина.

На основании формул Колосова — Мусхелишвили [8] и краевых условий на контурах круговых отверстий  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и берегах полос предразрушения (см. (1)) задача сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из граничных условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0; \quad (3)$$

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} = \sigma_T, \quad (4)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ );  $x$  — аффикс точек берегов полос предразрушения.

**Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи (3), (4) будем искать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (5)$$

где потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  определяют поля напряжений и деформаций соответственно в подкрепленной пластине без полос предразрушения под действием сосредоточенных сил  $F_{mn}$  и  $\sigma_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1 + \kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right), \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{i\kappa_0}{2\pi h(1 + \kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right) + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1 + \kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{Lm - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $h$  — толщина пластины;  $\kappa_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины; штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m = n = 0$ .

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ , соответствующие неизвестным нормальным смещениям вдоль полос предразрушения, будем искать в явном виде:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1^*} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad \Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1^*} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad (7)$$

$$L_1^* = [-l, -\lambda] + [\lambda, l].$$

Здесь искомая функция  $g(t)$  характеризует производную раскрытия берегов полос предразрушения:

$$\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)] \quad (8)$$

( $\mu$  — модуль сдвига материала пластины).

Для нахождения комплексных потенциалов  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  граничное условие (3) представим в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (9)$$

где  $\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)$ ;  $\Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau)$ .

Функции  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  будем искать в виде [7]

$$\Phi_2(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}. \quad (10)$$

Из условий симметрии относительно координатных осей получаем равенства

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k+2} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Соотношения (5)–(7), (10) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Из условия постоянства главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки (положение которых различается на период  $\omega$ ) в области  $D$ , занятой материалом пластины, следует

$$\alpha_0 = \pi^2 \beta_2 \lambda^2 / 24.$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_{2k+2}$ ,  $\beta_{2k+2}$  должны быть определены из краевого условия (9). Правую часть условия (9) обозначим через  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ . Будем считать, что функция  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$  разлагается на контуре  $|\tau| = \lambda$  в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \operatorname{Im} A_{2k} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) + if_2(\theta)) e^{-2ik\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11)$$

Подставив в (11) правую часть соотношения (9), после вычисления интегралов с помощью теории вычетов получим

$$A_0 = -\frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{2ny_0}{\rho_1^2} \right) - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_0(t) dt,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{\lambda^2 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} + \frac{\varkappa_0 \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1} \right) - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_2(t) dt,$$

$$A_{2k} = \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \left[ \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \frac{\lambda^{2k} \sin (2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} + \frac{(-2)(-3)\cdots(-2k)\lambda^{2k} \sin (2k+1)\varphi_1}{(2k-1)!\rho_1^{2k+1}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varkappa_0 \lambda^{2k-2} \sin (2k-1)\varphi_1}{\rho_1^{2k-1}} + \frac{(-2)(-3)\cdots(1-2k)\lambda^{2k-2} \sin (2k+1)\varphi_1}{(2k-2)!\rho_1^{2k-1}} \right) \right] - \\ - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1^*} g(t) f_{2k}(t) dt \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$A_{-2k} = \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \frac{\lambda^{2k} \sin (2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1^*} g(t) f_{-2k}(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где

$$\rho_1^2 = (mL)^2 + (ny_0)^2, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{ny_0}{mL},$$

$$f_0(t) = 2\gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t), \quad \gamma(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Неизвестная функция  $g(x)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k+2}$ ,  $\beta_{2k+2}$  определяются из краевых условий (4), (9). Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (9) вырождается в одно функциональное уравнение, например на контуре  $L_0$  ( $\tau = \lambda e^{i\theta}$ ), а система краевых условий (4) — в граничное условие на линии  $L_1^*$ .

Для построения уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k+2}$  и  $\beta_{2k+2}$  функций  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ . Подставляя в левую часть граничного условия (9) на контуре  $z = \lambda e^{i\theta}$  вместо  $\Phi_2(z)$ ,  $\overline{\Phi_2(z)}$ ,  $\Phi_2'(z)$  и  $\Psi_2(z)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности  $z = 0$ , а в правую часть (9) вместо функции  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$  ряд Фурье (11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{i\theta}$ , имеем две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k+2}$ ,  $\beta_{2k+2}$ . После ряда преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k+2}$ :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Здесь

$$b_0 = A_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2},$$

$$b_j = A_{2j+2} - \frac{(2j+1)A_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{2^{2j+2} K_1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2},$$

$$\begin{aligned}
 a_{j,k} &= (2j+1)\gamma_{j,k}\lambda^{2j+2k+2}, & K_1 &= 1 - \frac{\pi^2}{12}\lambda^2, & g_j &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}, \\
 \gamma_{0,0} &= \frac{3}{8}g_2\lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)g_{i+1}^2\lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}, \\
 \gamma_{j,k} &= -\frac{(2j+2k+2)!g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}} + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}, \\
 b_{0,k} &= 0, & b_{j,0} &= 0, \\
 b_{j,k} &= \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{2K_2\lambda^2}{K_1}\right), & j &= 1, 2, \dots, & k &= 1, 2, \dots, & K_2 &= \frac{\pi^2}{24}.
 \end{aligned}$$

Постоянные  $\beta_{2k+2}$  определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= \frac{1}{K_1} \left( -A_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right), \\
 \beta_{2j+4} &= (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A_{-2j-2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Потребовав, чтобы функции (5) удовлетворяли краевому условию (4), после ряда преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g(x)$ :

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = \sigma_{\tau}. \tag{14}$$

Здесь  $H(x) = \Phi_s(x) + \overline{\Phi_s(x)} + x\Phi'_s(x) + \Psi_s(x)$ ;  $\Phi_s(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x)$ ;  $\Psi_s(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x)$ .

Сингулярное интегральное уравнение (14), а также системы (12), (13) содержат неизвестные величины сосредоточенных сил  $F_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ ). Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $F_{mn}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$F_{mn} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{m,n} \quad (m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots).$$

Здесь  $E_s$  — модуль Юнга материала стрингера;  $A_s$  — площадь поперечного сечения стрингера;  $2y_0 n$  — расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{m,n}$  — относительное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через  $a_0$  радиус точек крепления (площадки сцепления). Примем естественное допущение о том, что в рассматриваемой задаче теории упругости относительное упругое смещение точек  $z = mL + i(ny_0 - a_0)$  и  $z = mL - i(ny_0 - a_0)$  равно относительному смещению точек крепления  $\Delta v_{m,n}$ . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет найти решение поставленной выше задачи.

С помощью комплексных потенциалов (5)–(7), (10) и формулы Колосова — Мусхелишвили [8] находим относительное смещение  $\Delta v_{m,n}$ :

$$\Delta v_{p,r} = \Delta v_{p,r}^{(0)} + \Delta v_{p,r}^{(1)} + \Delta v_{p,r}^{(2)}. \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta v_{p,r}^{(0)} &= \frac{1}{2\pi(1+\varkappa_0)\mu h} \sum'_{m,n} F_{mn} \left( \varkappa_0 \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(r-n)y_0 c [2p(p-m)L^2 + a_0 c]}{[(p-m)^2 L^2 + c^2][(p-m)^2 L^2 + a_0^2]} \right) + \frac{\sigma_0}{4\mu} (1+\varkappa_0)(ry_0 - a_0), \\ \Delta v_{p,r}^{(1)} &= \frac{1+\varkappa_0}{\mu} \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left[ \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-pL) \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} c \right) - \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi p L}{\omega} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} c \right) \right] dt \right\} - \\ &\quad - \frac{c}{\mu} \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \frac{\sin^2 \alpha_1 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} dt, \\ \Delta v_{p,r}^{(2)} &= \frac{1}{\mu} \left( (\varkappa_0 - 1)(ry_0 - a_0)a_0 + (1+\varkappa_0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right. \\ &+ (\varkappa_0 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+2k+2}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha \right), \\ c &= (r-n)y_0 - a_0, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{\omega} (t-pL), \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{ry_0 - a_0}{pL}, \end{aligned}$$

$$\rho_2^2 = (pL)^2 + (ry_0 - a_0)^2, \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}}, \quad r_{0,0} = 0.$$

Искомая величина силы  $F_{mn}$  определяется с помощью формул (15) из системы

$$F_{pr} = \frac{E_s A_s}{2y_0 r} \Delta v_{p,r} \quad (p = 1, 2, \dots, \quad r = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

которая вследствие периодичности задачи вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему.

Сингулярное интегральное уравнение (14), а также системы (12), (13), (16) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию  $g(x)$ , коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  и силы  $F_{pr}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ). Зная функции  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$ ,  $g(x)$  и величины  $F_{pr}$ , можно определить напряженно-деформированное состояние подкрепленной пластины при наличии полос предразрушения.

**Численное решение задачи и анализ результатов.** Используя разложение

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z = \frac{1}{z} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{z^{2j+1}}{\omega^{2j+2}},$$

уравнение (14) можно привести к стандартному виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) K(t-x) dt = \sigma_{\tau}, \quad (17)$$

где

$$K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}.$$

С учетом  $g(x) = -g(-x)$  преобразуем интегральное уравнение (17) к виду, более удобному для нахождения приближенного решения:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi p(\xi) d\xi}{\xi^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 K_0(\xi, \xi_0) p(\xi) d\xi + H(\xi_0) = \sigma_{\tau}. \quad (18)$$

Здесь

$$K_0(\xi, \xi_0) = K(\xi - \xi_0) + K(\xi + \xi_0), \quad p(\xi) = g(t), \quad \xi = t/l, \quad \xi_0 = x/l, \\ \lambda_1 = \lambda/l, \quad \lambda_1 \leq \xi_0 \leq 1, \quad H(\xi_0) = \Phi_s(\xi_0 l) + \overline{\Phi_s(\xi_0 l)} + \xi_0 l \Phi'_s(\xi_0 l) + \Psi_s(\xi_0 l).$$

Выполним замену переменных:

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования  $[\lambda_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а преобразованное уравнение (18) принимает стандартный вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_*(\eta) = \sigma_{\tau}, \quad (19)$$

где

$$p(\tau) = p(\xi), \quad H_*(\eta) = H(\xi_0), \quad B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j,$$

$$A_j = 2j + 1 + \frac{(2j + 1)(2j)(2j - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots \\ \dots + \frac{(2j + 1)(2j)(2j - 1) \dots [2j + 1 - (2j + 1 - 1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2j + 1)} \left(\frac{u}{u_0}\right)^j.$$

Для замены сингулярного интегрального уравнения системой алгебраических уравнений используем метод прямого решения сингулярных интегральных уравнений [6–8]. Интегральное уравнение (19) помимо особенности в ядре Коши имеет неподвижную особенность в точке выхода полосы предразрушения на поверхность кругового отверстия. В этом случае функция  $g(x)$  в точках  $x = \pm\lambda$  имеет особенность, отличающуюся от корневой. Характер этой особенности может быть определен из анализа сингулярного интегрального уравнения (19) [9]. В рассматриваемом случае интеграл  $\int_{\lambda}^l g(t) dt = C \neq 0$ .

Постоянная  $C$  выражается через раскрытие полосы предразрушения на поверхности кругового отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения.

В рассматриваемом случае следовало бы использовать метод решения интегрального уравнения, построенного на основе квадратурной формулы Гаусса — Якоби. Из-за громоздкости выражений для функций  $B(\eta, \tau)$  и  $H_*(\eta)$  определение особенности функции  $p(\eta)$

на конце интервала (в точках  $x = \pm\lambda$ ) затруднительно. Кроме того, следует отметить, что некоторый выигрыш в сходимости по уточненному методу теряется из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. Будем использовать другой способ численного решения интегральных уравнений типа (19), эффективность которого проверена на многочисленных задачах [10–12]. Так как в подкрепленной пластине напряжения ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (19) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим это решение в виде

$$p(\eta) = p_0(\eta)\sqrt{1 - \eta^2},$$

где  $p_0(\eta)$  — новая неизвестная ограниченная функция на отрезке  $[-1, 1]$ .

Используя квадратурные формулы [7, 10], интегральное уравнение (19) можно свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{p_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left( \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right) = \pi[\sigma_T - H_*(\eta_r)] \quad (20)$$

$$(r = 1, 2, \dots, M + 1),$$

где

$$\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1} \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad \eta_r = \cos \left( \frac{2r-1}{2(M+1)} \pi \right) \quad (r = 1, 2, \dots, M + 1).$$

Полученная алгебраическая система (20)  $M + 1$  уравнений для определения неизвестных  $p_0(\tau_1), p_0(\tau_2), \dots, p_0(\tau_M)$  и  $l/\lambda$  удовлетворяет дополнительному условию, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций (см. [9]).

Поскольку размер зоны предразрушения неизвестен, система уравнений (20) является нелинейной. Полученные системы уравнений относительно неизвестных  $\alpha_{2k+2}, \beta_{2k+2}, p_0(\tau_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $F_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ ) и  $l/\lambda$  при заданной внешней растягивающей нагрузке позволяют определить напряженно-деформированное состояние перфорированной пластины при наличии полос предразрушения. Так как величина  $l$  неизвестна, объединенная система уравнений (12), (13), (16), (20) является нелинейной. Учитывая, что растягивающая нагрузка  $\sigma_0$  входит в эту систему линейно, используем обратный способ решения. Будем считать, что длина зоны предразрушения  $l$  задана, а соответствующую ей внешнюю нагрузку определим в процессе решения системы (12), (13), (16), (20). При таком подходе для каждого значения  $l$  нужно решать линейную алгебраическую систему. Расчеты проводились при следующих геометрических параметрах подкрепленной пластины:  $\nu = 0,3$ ,  $\varepsilon_1 = a_0/L = 0,01$ ,  $\varepsilon = y_0/L = 0,15; 0,25; 0,50$ ,  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95),  $E_s = 11,5 \cdot 10^4$  МПа (композит алюминий — сталь),  $A_s/(y_0h) = 1$ . Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14 и 10 соответственно. Полагалось  $M = 30$ , что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Каждая из бесконечных систем (12), (13) урезалась до пяти уравнений, причем с помощью соотношений (13) из остальных уравнений исключались неизвестные коэффициенты  $\beta_{2k}$ . На рис. 2 представлена зависимость длины полосы предразрушения  $d = (l - \lambda)/L$  от безразмерной внешней нагрузки  $\sigma_0/\sigma_T$  при  $\varepsilon = 0,25$ . Кривые 1–5 строились до значений  $d$ , соответствующих моменту появления трещины.

Используя решение задачи о пластических деформациях полосы, вычислим смещение точек на берегах полосы предразрушения:

$$v(x, 0) = -\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l}^x g(x) dx$$

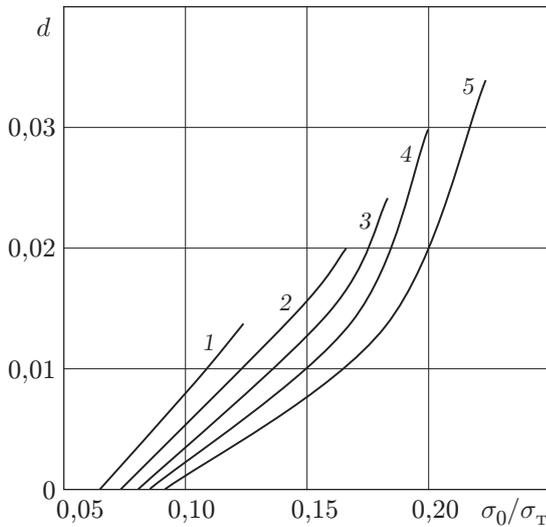


Рис. 2

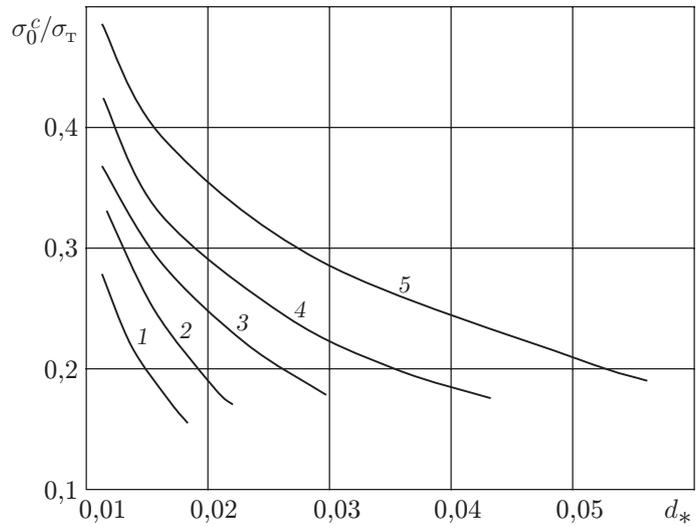


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость относительной длины полосы предразрушения  $d$  от безразмерной внешней нагрузки  $\sigma_0/\sigma_T$  при  $\varepsilon = 0,25$  и различных значениях радиуса отверстия:

1 —  $\lambda = 0,6$ ; 2 —  $\lambda = 0,5$ ; 3 —  $\lambda = 0,4$ ; 4 —  $\lambda = 0,3$ ; 5 —  $\lambda = 0,2$

Рис. 3. Зависимость критической внешней растягивающей нагрузки  $\sigma_0^c/\sigma_T$  от относительной предельной длины полосы предразрушения  $d_*$  при  $\varepsilon = 0,15$  и различных значениях радиуса отверстия (обозначения те же, что на рис. 2)

(функция  $g(x)$  определена в (8)). При  $x = \pm\lambda$

$$v(-\lambda, 0) = -\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l}^{-\lambda} g(x) dx.$$

Заменяя интеграл суммой, находим

$$v(-\lambda, 0) = -\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \frac{\pi(l - \lambda)}{M} \sum_{m=1}^M g(t_m).$$

Для определения предельно равновесного состояния, при котором появляется трещина, используем условие (2). Таким образом, условием, определяющим критическое значение растягивающей нагрузки  $\sigma_0$  для подкрепленной пластины, является следующее:

$$v(-\lambda, 0) = \delta_c. \tag{21}$$

Решение алгебраической системы (12), (13), (16), (20), (21) позволяет определить критическое значение внешней растягивающей нагрузки и размер полосы предразрушения в предельном состоянии, при которых появляются трещины.

На рис. 3 представлена зависимость критической внешней растягивающей нагрузки  $\sigma_0^c/\sigma_T$  от предельной длины полосы предразрушения  $d_* = (l_* - \lambda)/L$  при  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\delta_c^*/(l_* - \lambda) = 0,5$ ,  $\delta_c^* = \pi\delta_c\mu/[(1 + \varkappa_0)\sigma_T]$ .

Анализ модели зарождения трещин в подкрепленной пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий, сводится к параметрическому исследованию алгебраических систем (12), (13), (16), (20) и критерия появления трещины (21) при различных

параметрах подкрепленной пластины (механические характеристики материалов, геометрические параметры подкрепленной пластины).

В заключение следует отметить, что построенная модель трещинообразования в подкрепленной пластине основана на представлении о дислокационном механизме зарождения трещин, получившем экспериментальное подтверждение (см., например, [2]). Предложенная расчетная модель может оказаться связующим звеном между микроскопической теорией дислокаций и феноменологической теорией прочности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Мир-Салим-заде М. В.** Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров // *Механика композит. материалов*. 2007. Т. 43, № 1. С. 59–72.
2. **Панасюк В. В.** *Механика квазихрупкого разрушения материалов*. Киев: Наук. думка, 1991.
3. **Финкель В. М.** *Физика разрушения*. М.: Металлургия, 1970.
4. **Матвиенко Ю. Г.** *Физика и механика разрушения твердых тел*. М.: Эдиториал УрСС, 2000.
5. **Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я.** Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения: Обзор // *Пробл. прочности*. 1973. № 2. С. 3–19.
6. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
7. **Мирсалимов В. М.** *Неоднородные упругопластические задачи*. М.: Наука, 1987.
8. **Мусхелишвили Н. И.** *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966.
9. **Мусхелишвили Н. И.** *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968.
10. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
11. **Мирсалимов В. М.** *Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами*. Баку: Элм, 1984.
12. **Саврук М. П.** Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. Киев: Наук. думка, 1989.

*Поступила в редакцию 3/V 2007 г.,  
в окончательном варианте — 22/X 2007 г.*

---