

УДК 532.529.2:536.24+551.511.6

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ СТРУИ В АДИАБАТИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ

А. Н. Вульфсон, О. О. Бородин*

Институт проблем нефти и газа РАН, 117312 Москва

* Московский государственный институт электроники и математики, 109028 Москва

Предложена интегральная модель нестационарной высокотемпературной конвективной струи, включающая универсальную зависимость верхней границы конвективного фронта от мощности точечного теплового источника. Рассмотрен класс автомодельных решений, соответствующих источникам тепла, мощность которых изменяется во времени по степенному и экспоненциальному законам. Результаты расчетов сопоставлены с известными экспериментальными профилями вертикальной скорости и температуры на оси струи.

Введение. Теоретическое исследование нестационарных конвективных струй начато сравнительно недавно [1]. Использование в [1] приближения вертикального пограничного слоя и интегрального метода Кармана — Польгаузена позволило записать амплитудные уравнения для вертикальной скорости и температуры на оси струи. При этом для замыкания системы уравнений применялось эвристическое эволюционное дифференциальное уравнение для радиуса струи. Аналогичный подход использован в работе [2]. В рамках этих моделей в [1, 2] построен класс автомодельных решений, соответствующих точечному источнику тепла, мощность которого изменяется во времени по степенному закону. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

Иное гидродинамическое описание нестационарной конвективной струи представлено в работе [3]. В основу модели положен подход Прандтля. При этом для нахождения плоской (верхней) границы струи, соответствующей основанию конуса, принималось универсальное уравнение распространения конвективного фронта [3, 4], связывающее высоту струи с временной зависимостью мощности точечного источника тепла. В [3, 4] показано, что в данной модели также имеются автомодельные режимы, соответствующие источникам тепла, мощность которых изменяется во времени по степенному закону. Существенно, что универсальное уравнение распространения конвективного фронта позволяет построить автомодельное решение, соответствующее экспоненциальному источнику тепла, которое можно рассматривать как огибающую семейства степенных решений. Построенное решение представляет собой автомодельное решение второго рода [5], так как не может быть получено на основе теории размерности.

В настоящей работе предложено уточнение интегральной гидродинамической модели [3] за счет высокотемпературного обобщения и использования экспериментальных горизонтальных профилей температуры и профилей вертикальной скорости [6].

1. Задача о турбулентной струе над точечным источником тепла. Рассмотрим задачу о распространении осесимметричной конвективной струи в адиабатической атмосфере над точечным источником тепла. Пусть t — время, (r, φ, z) — цилиндрическая система координат, ось z которой направлена противоположно ускорению свободного падения g .

Для описания распространения струи используем уравнения “глубокой” конвекции идеального газа [7], обобщающие модель Буссинеска за счет частичного учета сжимаемости воздуха. Пусть $\Theta_a = \text{const}$ — статическое значение потенциальной температуры сухого воздуха в неподвижной атмосфере, Θ — локальная потенциальная температура воздуха*. Следуя [7], введем локальную безразмерную потенциальную температуру $\theta = (\Theta - \Theta_a)/\Theta_a$.

Безразмерная плотность сухого неподвижного воздуха в адиабатической атмосфере $\bar{\rho}_a$ задается соотношениями

$$\frac{1}{\bar{\rho}_a} \frac{d\bar{\rho}_a}{dz} = -\frac{c_p - R_d}{R_d} \frac{g}{c_p} \frac{1}{T_a}, \quad \bar{\rho}_a(0) = 1, \quad \frac{dT_a}{dz} = -\frac{g}{c_p},$$

где R_d, c_p — газовая постоянная и теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении; T_a — температура воздуха в адиабатической атмосфере.

Течение в осесимметричной нестационарной конвективной струе будем рассматривать в приближении вертикального пограничного слоя [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}_a w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}_a u w r + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho}_a w w &= g \bar{\rho}_a \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_w \bar{\rho}_a r \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}_a \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}_a u \theta r + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho}_a w \theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_\theta \bar{\rho}_a r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}_a u r + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho}_a w = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u, w — компоненты скорости вдоль осей r и z соответственно; ν_w, ν_θ — коэффициенты турбулентного обмена вертикальной скорости и безразмерной потенциальной температуры.

Система уравнений (1.1) рассматривается в области $V = \{0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \infty\}$, где бесконечная верхняя граница находится на расстоянии, равном высоте адиабатической атмосферы. При $\bar{\rho}_a = 1$ уравнения “глубокой” конвекции (1.1) переходят в уравнения Буссинеска.

Наличие полной кинетической и потенциальной энергии, а также энтропии в системе уравнений “глубокой” конвекции [7], т. е. существование интегралов вида

$$2\pi \int_0^\infty \bar{\rho}_a \left(\frac{1}{2} w^2 - g\theta z \right) r dr, \quad 2\pi \int_0^\infty \bar{\rho}_a \theta r dr,$$

позволяет считать, что функции $\bar{\rho}_a w^2, \bar{\rho}_a g\theta z, \bar{\rho}_a \theta$ принадлежат функциональному пространству $L_1(V)$ (см. [9]). Интегрируемость функций по неограниченной области V приводит к условию их затухания на бесконечно удаленных границах.

Учитывая, что среда не возмущена, на верхней границе области зададим условия непротекания и затухания потоков в виде

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} w(r, z, t) &= 0, & \lim_{z \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^\infty w(r, z, t) r dr &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} w w(r, z, t) &= 0, & \lim_{z \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^\infty w w(r, z, t) r dr &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} w \theta(r, z, t) &= 0, & \lim_{z \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^\infty w \theta(r, z, t) r dr &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

* Для идеального газа потенциальная температура Θ определяется соотношением $\Theta = T(p/p_H)^{-R_d/c_p}$, где T — локальная температура газа; p — локальное давление; p_H — постоянное нормальное давление газа на подстилающей поверхности, примерно равное 1 атм; R_d, c_p — газовая постоянная и теплоемкость при постоянном давлении.

На боковой поверхности примем условия непротекания и затухания потоков

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\rho}_a u r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \nu_w \bar{\rho}_a r \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \nu_\theta \bar{\rho}_a r \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0. \quad (1.3)$$

На нижней границе области зададим точечный нестационарный источник тепла и нулевой источник импульса, т. е.

$$\lim_{z \rightarrow 0} [\bar{\rho}_a w \theta(r, z, t)] = \frac{1}{2\pi r} S_0(t) \delta(r), \quad \lim_{z \rightarrow 0} [\bar{\rho}_a w w(r, z, t)] = \frac{1}{2\pi r} P_0(t) \delta(r), \quad (1.4)$$

где $P_0(t) = 0$, $S_0(t) > 0$ — мощности точечного источника импульса и тепла; $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

В качестве начального условия при $t = t_0$ примем состояние невозмущенной атмосферы

$$w(r, z, t_0) = 0, \quad \theta(r, z, t_0) = 0. \quad (1.5)$$

Соотношения (1.1)–(1.5) образуют замкнутую систему уравнений.

2. Интегральная модель конвективной струи над точечным источником тепла. Для построения приближенного решения системы (1.1) используется интегральный метод Кармана — Польгаузена [8]. Предполагается, что неизвестные функции в области восходящего движения $0 < r < R(z, t)$ можно аппроксимировать соотношениями с разделяющимися переменными

$$w(r, z, t) = \tilde{w}(z, t) f_w\left(\sqrt{\bar{\rho}_a} \frac{r}{R}\right), \quad u(r, z, t) = -\frac{1}{\bar{\rho}_a} \frac{\partial \bar{\rho}_a \tilde{w}(z, t)}{\partial z} \frac{1}{r} \int_0^r r f_w\left(\sqrt{\bar{\rho}_a} \frac{r}{R}\right) dr, \quad (2.1)$$

$$\theta(r, z, t) = \tilde{\theta}(z, t) f_\theta\left(\sqrt{\bar{\rho}_a} \frac{r}{R}\right).$$

Здесь $\tilde{w}(z, t)$, $\tilde{\theta}(z, t)$ — вертикальная скорость и безразмерная потенциальная температура на оси струи; f_w , f_θ — заданные функции.

Для сопоставления данной модели с существующими моделями [1, 2] используем экспоненциальные аппроксимации профилей параметров в соответствии с известными экспериментальными данными [6]:

$$f_w(\xi) = \exp(-\lambda_w \xi^2), \quad f_\theta(\xi) = \exp(-\lambda_\theta \xi^2), \quad \xi = \sqrt{\bar{\rho}_a} r/R. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1), (2.2) в уравнения (1.1) и интегрируя полученные уравнения по площади поперечного сечения струи, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w} R^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w} \tilde{w} R^2 = \alpha_g g \tilde{\theta} R^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\theta} R^2 + \frac{1}{1 + \alpha_g} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w} \tilde{\theta} R^2 = 0, \quad (2.3)$$

где $\alpha_g = \lambda_w/\lambda_\theta$ — постоянный коэффициент. Уравнения (2.3) следует дополнить граничными условиями

$$\lim_{z \rightarrow 0} [\tilde{w} \tilde{w} R^2(z, t)] = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} [\tilde{w} \tilde{\theta} R^2(z, t)] = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_w}{k^2} S_0(t), \quad k^2 = \frac{\alpha_g}{1 + \alpha_g}. \quad (2.4)$$

Для замыкания системы уравнений (2.3), (2.4) необходимо использовать уравнение для радиуса струи R . Следуя [3], будем предполагать, что конвективный термик аппроксимируется конической поверхностью и головной частью, при этом в любой момент времени форма термика остается неизменной (рис. 1).

В соответствии с гипотезой Прандтля используем закон линейного расширения струи над точечным источником, принятый в моделях [3, 10]:

$$R(z, t) = \alpha_R z, \quad 0 \leq z \leq h(t), \quad (2.5)$$

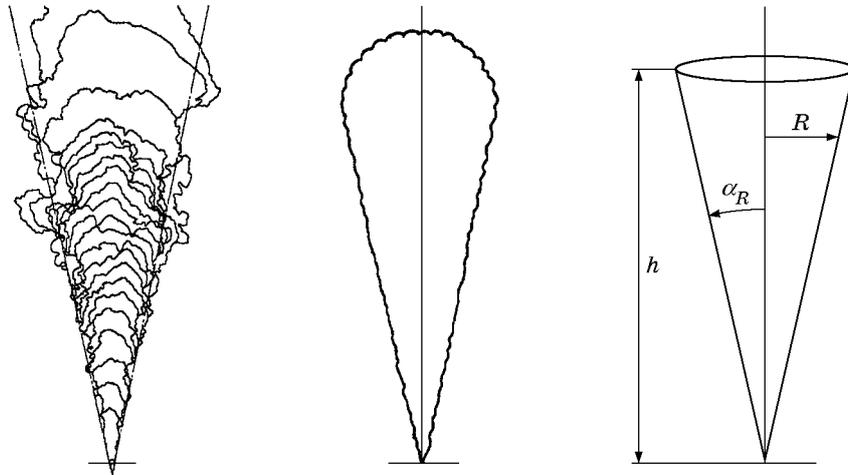


Рис. 1. Контур развивающейся конвективной струи, соответствующей точечному тепловому источнику, и его аппроксимация

где α_R — угловой коэффициент расширения струи, величина которого изменяется от 0,1 до 0,2 (см., например, [10]); $h(t)$ — высота верхней границы конической поверхности струи. В рамках принятой постановки задачи движение в области $z > h(t)$ не рассматривается.

В качестве уравнения, описывающего распространение верхней границы конвективной струи от теплового источника в нейтральной атмосфере, примем соотношение [3, 4]

$$\lambda_0^2 h^2 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = g \int_{t_0}^t S_0(t) dt, \quad \lambda_0^2 = \frac{\pi}{2\lambda_w} \alpha_R^2 (1 + \alpha_g)^2. \quad (2.6)$$

В последующих численных экспериментах будет предполагаться, что согласно [6] $\lambda_w = 96\alpha_R^2$, $\lambda_\theta = 0,74\lambda_w$ и соответственно $\alpha_g = \lambda_w/\lambda_\theta = 1,35$. При этом $\lambda_0^2 = 9,04 \cdot 10^{-2}$, что по порядку величины соответствует экспериментальным значениям $\lambda_0^2 = (2,22 \div 4,56) \cdot 10^{-2}$ из [11].

Соотношения (2.3)–(2.6) образуют замкнутую систему уравнений интегральной модели вертикальной конвективной струи.

3. Квазистационарные уравнения как асимптотика решения вблизи источника. Учитывая наличие особенности решения в начале координат, связанной с воздействием точечного источника тепла, целесообразно описать асимптотическое решение задачи о конвективной струе вблизи источника. Согласно [1, 2] асимптотическое поведение решения описывается квазистационарными уравнениями (2.3), в которых отсутствуют производные по времени.

Пусть мощность приведенного источника тепла \tilde{S} задана соотношением $\tilde{S}(t) = \lambda_w S_0(t)/(\pi k^2)$. Соответствующие параметры квазистационарной струи имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a(z, t) &= ((3/2)\alpha_g g \tilde{S}(t))^{1/3} \alpha_R^{-2/3} z^{-1/3}, \\ \tilde{\theta}_a(z, t) &= ((3/2)\alpha_g g \tilde{S}(t))^{-1/3} \tilde{S}(t) \alpha_R^{-4/3} z^{-5/3}, \quad R(z, t) = \alpha_R z, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где \tilde{w}_a , $\tilde{\theta}_a$ — вертикальная скорость и безразмерная потенциальная температура на оси квазистационарной струи в адиабатической атмосфере.

Заметим, что соотношения (3.1) представляют самостоятельный интерес, так как в случае $\tilde{S}(t) = \text{const}$ соответствуют точному решению задачи о стационарной струе, распространяющейся в нейтральной атмосфере. Функциональные зависимости (3.1) впервые

получены Я. Б. Зельдовичем [12] на основе теории подобия. В [10] соотношения типа (3.1) найдены как решения интегральной модели струи.

Пусть $h(t)$ — высота конвективной струи, соответствующей тепловому источнику мощности $S_0(t)$, вычисленная согласно (2.6). Введем безразмерную переменную $\eta = z/h(t)$. Тогда квазистационарное решение (3.1) можно представить в виде

$$\tilde{w}_a(z, t) = \frac{dh}{dt} w_*^s(\eta, t), \quad \tilde{\theta}_a(z, t) = \frac{1}{gh} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \theta_*^s(\eta, t), \quad R(z, t) = hr_*(\eta, t). \quad (3.2)$$

Здесь безразмерные функции w_*^s , θ_*^s , r_* и нормированная мощность потока тепла S_* имеют вид

$$w_*^s(\eta, t) = \frac{1}{\alpha_R \eta} \left(\frac{3}{2} \alpha_g \alpha_R S_* \eta^2 \right)^{1/3}, \quad \theta_*^s(\eta, t) = \frac{S_*}{\alpha_R \eta} \left(\frac{3}{2} \alpha_g \alpha_R S_* \eta^2 \right)^{-1/3}, \quad (3.3)$$

$$r_*(\eta, t) = \alpha_R \eta, \quad S_*(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_w}{k^2} g S_0(t) \left(h \left(\frac{dh}{dt} \right)^3 \right)^{-1}.$$

Далее для сопоставления с экспериментальными данными общее решение нестационарной задачи будет отнесено к квазистационарному решению (3.1)–(3.3).

4. Автомодельные режимы распространения конвективного фронта. Для ряда специально заданных амплитуд теплового источника соответствующие режимы распространения конвективного фронта можно получить на основе теории размерности без использования универсального соотношения (2.6). Покажем, что уравнение (2.6) не только включает как частные решения все известные автомодельные зависимости, но и позволяет построить новые автомодельные режимы.

Рассмотрим конвекцию, вызванную степенным источником тепла: $t_0 = 0$, $S_0(t) = Q_q q t^{q-1}$, $q > 0$, $Q_q = \text{const}$. Из (2.6) следует автомодельная зависимость

$$h(t) = \left(\left(\frac{2}{\lambda_0} \right)^2 \frac{g Q_q}{(q/2 + 1)^2} t^{q+2} \right)^{1/4}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим конвекцию, вызванную экспоненциальным источником тепла: $t_0 = -\infty$, $S_0(t) = Q_\infty q \exp(qt)$, $Q_\infty = \text{const}$. Из (2.6) следует

$$h(t) = \left(\left(\frac{2}{\lambda_0} \right)^2 \frac{g Q_\infty}{(q/2)^2} \exp(qt) \right)^{1/4}. \quad (4.2)$$

Соотношение (4.2) является автомодельным, хотя и не может быть получено из теории размерности. Его следует интерпретировать как огибающую семейства степенных решений (4.1) при $t_0 \rightarrow -\infty$ и $q \rightarrow +\infty$.

5. Развитие автомодельных струй над точечным источником тепла. Интегральная модель нестационарной струи и соответствующие автомодельные решения для точечных тепловых источников, мощность которых изменяется во времени по степенному закону, впервые получены в [1, 2]. Покажем, что в случае точечных источников тепла автомодельные режимы (4.1), (4.2) порождают соответствующие классы автомодельных решений и для предложенной интегральной модели струи.

Пусть $\eta = z/h(t)$ — безразмерный параметр. При $0 < z < h(t)$ автомодельное решение системы (2.3)–(2.6) можно искать в виде

$$\tilde{w}(z, t) = \frac{dh}{dt} w_*(\eta), \quad \tilde{\theta}(z, t) = \frac{1}{gh} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \theta_*(\eta), \quad R = hr_* = h\alpha_R \eta, \quad (5.1)$$

где w_* , θ_* , r_* — безразмерные функции.

Для степенных источников (4.1) подстановка (5.1) в систему (2.3) при $0 < \eta < 1$ приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{q-2}{q+2}\right) w_* r_*^2 - \eta \frac{d}{d\eta} (w_* r_*^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} w_* w_* r_*^2 &= \alpha_g \theta_* r_*^2, \\ \left(1 + 2 \frac{q-2}{q+2}\right) \theta_* r_*^2 - \eta \frac{d}{d\eta} (\theta_* r_*^2) + \frac{1}{1 + \alpha_g} \frac{d}{d\eta} w_* \theta_* r_*^2 &= 0, \quad r_* = \alpha_R \eta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В соответствии с (2.4) краевые условия системы (5.1) примут вид

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (w_* w_* r_*^2) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} (w_* \theta_* r_*^2) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_w}{k^2} \frac{4q}{q+2} \lambda_0^2. \quad (5.3)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для экспоненциального источника (4.2). При этом коэффициенты в соответствующих уравнениях (5.2), (5.3) получают предельным переходом при $q \rightarrow \infty$. В случае экспоненциального источника (4.2) решение представляет собой автомодельное решение второго рода [5], так как не может быть получено на основе теории размерности.

Заметим, что в области $10 < q < \infty$ коэффициенты (5.2), (5.3) можно считать практически постоянными. Таким образом, все автомодельные струи с достаточно большими значениями q имеют почти идентичные профили скорости и температуры, соответствующие экспоненциальному источнику.

6. Численное описание автомодельных режимов развития струи. Учитывая асимптотическое поведение конвективной струи при $\eta \ll 1$, в соответствии с [1, 2] для представлений результатов используем функции

$$\tilde{w}/\tilde{w}_a = w_*/w_*^s = \varphi_w(\eta), \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi_w(\eta) = 1, \quad \tilde{\theta}/\tilde{\theta}_a = \theta_*/\theta_*^s = \varphi_\theta(\eta), \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi_\theta(\eta) = 1.$$

Следуя [1, 2], введем безразмерный параметр

$$\tilde{z} = \frac{1}{S_0(t)} \frac{dS_0}{dt} \frac{z}{\tilde{w}_a(z, t)}.$$

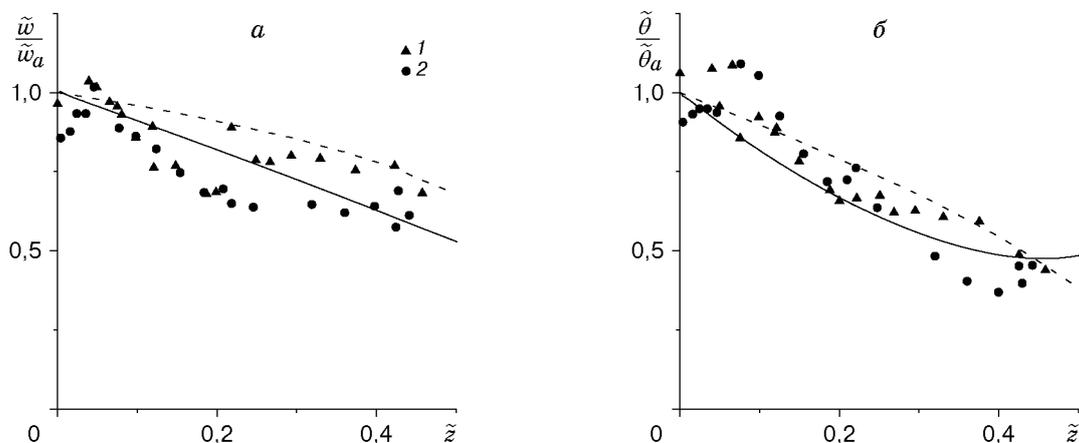


Рис. 2. Распределение нормированных вертикальной скорости (а) и потенциальной температуры (б) вдоль оси \tilde{z} :

сплошные линии — расчет по предлагаемой модели, штриховые — расчет по модели [2]; 1, 2 — данные двух серий измерений [2], в которых источники тепла различаются способом укладки горючих веществ

Используя соотношение (3.1), можно показать, что для степенных источников тепла (4.1)

$$\tilde{z} = C\eta^{4/3}, \quad C = \frac{4}{1 + \alpha_g} \frac{q - 1}{q + 2} \left(\frac{q + 2}{3q} \right)^{1/3}.$$

В качестве примера рассмотрено численное решение автомодельных уравнений при $q = 4$ и $\alpha_R = 0,1$. Результаты расчетов нормированных вертикальной скорости и потенциальной температуры в сравнении с экспериментальными данными и расчетами по модели [2] представлены на рис. 2.

Заключение. Результаты настоящей работы показывают, что предложенная интегральная модель конвективной струи, включающая универсальное уравнение распространения верхней границы конвективного фронта, содержит класс автомодельных решений, соответствующих степенным и экспоненциальным источникам тепла. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Авторы выражают благодарность В. А. Черкашину за конструктивное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Delichatsios M. A.** Time similarity analysis of unsteady buoyant plumes in neutral surroundings // J. Fluid Mech. 1979. V. 93, pt 2. P. 241–250.
2. **Hong-Zeng Yu.** Transient plume influence in measurement of convective heat release rates of fast growing fires using a large scale fire products collector // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1990. V. 112. P. 186–191.
3. **Вульфсон А. Н.** К интегральной теории распространения нестационарных конвективных струй в нейтральной среде // Нефтепромысловое дело. 1999. № 8. С. 45–48.
4. **Вульфсон А. Н.** Автомодельность и распространение верхней границы конвективных термиков в нейтральной стратифицированной атмосфере, вызванное точечными, линейными и плоскими источниками тепла // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1998. Т. 34, № 4. С. 557–564.
5. **Баренблатт Г. И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
6. **Rouse H., Jih C.-S., Humphreys H. W.** Gravitational convection from a boundary source // Tellus. 1952. V. 4, N 3. P. 201–210.
7. **Ogura Y., Phillips N. A.** Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1962. V. 19, N 2. P. 173–179.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
9. **Рудин У.** Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
10. **Schmidt F. H.** On the diffusion of heated jets // Tellus. 1957. V. 9, N 3. P. 378–383.
11. **Скорер Р. С.** Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980.
12. **Зельдович Я. Б.** Предельные законы свободно восходящих конвективных потоков // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1937. Т. 7, вып. 12. С. 1463–1465.

*Поступила в редакцию 6/III 2000 г.,
в окончательном варианте — 20/VII 2000 г.*