## ЛИТЕРАТУРА

1. **Gilbarg D., Shiffman M.** On bodies achieving extreme values of the critical Mach number.— J. Rat. Mech. and Anal., 1954, vol. 3, N 2.
2. **Чаплыгин С. А.** Собр. соч. Т. 2. М.—Л.: Изд-во техн.-теор. лит., 1948.
3. **Southwell R. V., Vaisey G.** Fluid motions characterized by «free» stream-lines.— Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 1946, vol. 240, N 815.
4. **Garabedian P. R., Spencer D. C.** Extremal methods in cavitational flow.— J. Rat. Mech. and Anal., 1952, vol. 1, N 3.
5. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
6. **Кожуро Л. А.** Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 5.
7. **Кожуро Л. А.** Семейство осесимметричных вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли.— ПММ, 1981, т. 45, № 1.


---


УДК 532.516


# ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ


*В. В. Попов*

(*Ленинград*)


Для описания течений вязкой пленки по поверхности невязкой жидкости в [1] была предложена система уравнений (обозначения те же)

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H v_k}{\partial x_k} = 0, \quad \rho H \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$S_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\mu H \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\delta_{ik} + \mu H\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\delta_{ik}\right),$$

$$p = \rho\,(1 - \rho/\rho_1)\, gH^2/2, \ i,\ j,\ k = 1,\ 2.$$

В выражении для тензора напряжений $S_{ik}$ первый член — суммарное по толщине пленки гидростатическое давление с учетом погружения пленки в нижнюю жидкость, второй описывает вязкие силы, связанные с ее растяжением, третий соответствует деформации сдвига.

Пусть пленка со свободными боковыми краями течет в направлении оси $Ox$, которую будем считать осью симметрии. Предположим также, что толщина пленки $H$, ее продольная скорость $u$ и ширина $W$ являются функциями времени и медленно меняющимися функциями координаты $x$. Это позволит перейти к одномерному описанию течения. Пусть на боковые края $y = \pm W/2$ действуют симметричные относительно оси $Ox$ силы $F = (F_x/2, F_y)$, $F' = (F_x/2, -F_y)$ в расчете на единицу длины края. При этом пленка растягивается в поперечном направлении силами $F_y$ и $-F_y$, в продольном направлении на оба края в сумме действует сила $F_x$. Применение к системе (1) процедуры, с помощью которой она сама была получена из трехмерных уравнений Навье — Стокса, дает систему уравнений для функций $H$, $W$, $u$ от переменных $x$, $t$:

$$\partial HW/\partial t + \partial HWu/\partial x = 0, \tag{2}$$

$$\rho HW\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[W\left(-\frac{p}{2} + 3\mu H\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F_y}{2} + \frac{F_x}{8}\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] + F_x,$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{W}{4\mu H}\left[F_y + p + \frac{F_x}{4}\frac{\partial W}{\partial x}\right] - \frac{W}{2}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вязкие эффекты в уравнении для импульса даются членом $3\mu HW\partial u/\partial x$. Как известно, для течений растяжения коэффициент пропорциональности между вязкими напряжениями и скоростью деформации равен $3\mu$ [2]. При математическом описании таких течений, встречающихся в задачах о формовании различных изделий, обычно полагают, что на боковую поверхность изделия не действуют никакие силы и конфигурация его поперечного сечения не меняется (например, [3]). В нашем случае изменения толщины и ширины пленки подчиняются различным законам.

Из системы (2) можно найти силы $F_x$, $F_y$. Результат можно интерпретировать как решение задачи идентификации, когда по наблюдаемому движению определяются действующие силы, или задачи управления, когда находятся силы, которые нужно приложить к пленке, чтобы получить желаемый режим течения.

Для стационарных течений объемный расход жидкости будет постоянным: $Q = HWu$. Пусть $Q > 0$, что влечет $u > 0$. Тогда для сил получим следующие выражения:

$$F_x = \frac{d}{dx}\left(\rho Qu + Wp - 4\mu HW\frac{du}{dx} - 2\mu Hu\frac{dW}{dx}\right),$$

$$F_y = \frac{4\mu Hu}{W}\frac{dW}{dx} + 2\mu H\frac{du}{dx} - p - \frac{F_x}{4}\frac{dW}{dx}.$$

Для пленки постоянной ширины, если пренебречь инерцией и гидростатическим давлением, формулы приобретают простой вид

$$F_x = -4Q\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{d\ln u}{dx}\right),\quad F_y = \frac{2\mu Q}{W}\frac{d\ln u}{dx}.$$

В рамках одномерной модели рассмотрим задачу о растекании пленки, когда на ее край ортогонально к нему действует сила $-\gamma$, равная коэффициенту растекания [1], при этом $F_x = \gamma\partial W/\partial x$, $F_y = -\gamma$. Вводя безразмерную толщину пленки $h = H/H_*$ ($H_*$ — равновесная толщина) и постоянную $\varkappa = \rho g(1 - \rho/\rho_1)H_*/8\mu$, перепишем систему (2) в виде ($\nu = \mu/\rho$)

(3) $$\frac{\partial hW}{\partial t} + \frac{\partial hWu}{\partial x} = 0,\quad \frac{dW}{dt} = W\left[\frac{\varkappa}{h}(h^2-1) - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

$$hW\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{W\nu\left[-2\varkappa(h^2-1) + 3h\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}.$$

Система уравнений, практически эквивалентная (3), для течений, возникающих под действием продольной растягивающей силы, численно решалась в [4], где приведено сравнение результатов расчетов с данными эксперимента. Для медленных стационарных течений (3) можно решить аналитически. Последнее уравнение системы имеет интеграл

$$W\nu[-2\varkappa(h^2 - 1) + 3h\partial u/\partial x] = C.$$

Если внешние растягивающие усилия отсутствуют, то $h \to 1$, $\partial u/\partial x \to 0$ при $x \to \infty$, отсюда $C = 0$. Оставшиеся уравнения (3) приобретают вид

$$dh/dt + (4\varkappa/3)(h^2 - 1) = 0,\ dW/dt = (2\varkappa W/3h)(h^2 - 1).$$

Пусть при $x = 0$ пленка ширины $W_0$, толщины $h_0$ движется со скоростью $u_0$. Через промежуток времени $\tau = t - t_0$ толщина элемента, имевшего в момент $t_0$ координату $x = 0$, будет равна

$$h(\tau) = 1 + 2/[e^{8\varkappa\tau/3}(h_0 + 1)/(h_0 - 1) - 1],$$

его ширина и положение даются выражениями

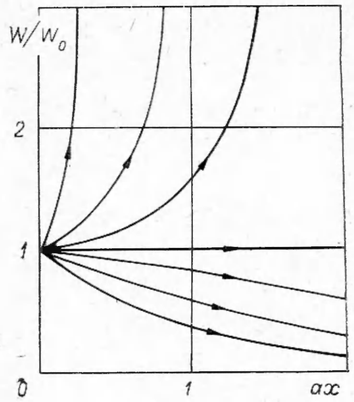
$$W(\tau) = W_0(h_0/h(\tau))^{1/2},\quad x(\tau) = u_0\sqrt{h_0}\int_0^\tau d\tau/\sqrt{h(\tau)}.$$

При $x \to \infty$ ширина пленки стремится к значению $W_0\sqrt{h_0}$.

При рассмотрении эффектов, вызванных поперечными растягивающими силами, будем считать пленку очень вязкой и пренебрегать гидростатическим давлением и силами инерции. В стационарном случае при $F_x = 0$ из (2) получим

(4) $$3\mu HWdu/dx + WF_y/2 = C.$$

Постоянная $C$ определяется из граничных условий. Она равна продольной силе, приложенной к сечению пленки на конце $x = L$, если в этой точке $F_y = 0$. С учетом соотношения $Q = HWu = H_0W_0u_0$ из (4) и последнего уравнения (2) получаем уравнение для $W$:




(5) $dW/dx + CW/(6\mu Q) - F_yW^2/(3\mu Q) = 0$.

При постоянных $F_y$ и $\mu$ оно имеет решение (при $a = C/(6\mu Q)$, $b = 2F_yW_0/C$)

(6) $$W = W_0/[b + (1 - b)e^{ax}].$$

Остальные величины определяются формулами

(7) $$u = u_0\sqrt{b + (1 - b)e^{ax}}\, e^{3ax/2},\ H = H_0\sqrt{b + (1 - b)e^{ax}}\, e^{-3ax/2}.$$

При $b = 1$ ширина пленки остается постоянной, при $b < 1$ она убывает с ростом $x$, при $b > 1$ возрастает, обращаясь в бесконечность при $x_* = (1/a)\ln[b/(b - 1)]$ (см. фигуру). Отметим два предельных случая. Когда поперечные силы малы,

(8) $$u = u_0e^{2ax},\ H/H_0 = W/W_0 = \sqrt{u_0/u}.$$

Когда продольные силы малы,

(9) $$W = W_0/(1 - F_yW_0x/3\mu Q),\ u/u_0 = H/H_0 = \sqrt{W_0/W}.$$

Пользуясь уравнением (5), можно определить действие на пленку точечной силы $F_y = f\delta(x - x_0)$. Обозначая $W_+ = W(x_0 + 0)$, для изменения ширины будем иметь формулу $1/W_+ = 1/W_- - f/3\mu Q$, для остальных величин (обозначения аналогичны) $u_+/u_- = H_+/H_- = \sqrt{W_-/W_+}$.

Рассмотрим поведение элементарного цилиндра длины $l$ из вязкого материала под действием приложенной к торцам растягивающей силы $F(t)$. Из уравнений

$$3\mu S\partial u/\partial x = F,\ \partial u/\partial x = (dl/dt)/l,\ lS = l_0S_0$$

($S$ — площадь поперечного сечения) следует формула $1/l = 1/l_0 - \int_0^t Fdt/3\mu S_0l_0$. Цилиндр разорвется, $l = \infty$, когда он поглотит критический импульс силы $P_* = 3\mu S_0$ независимо от его начальной длины. Можно показать, что это правило определяет положение особой точки для решения (9), а также максимальное допустимое значение поперечной точечной силы $f$.

Хотя стационарное течение (8) формально существует при всех $x$, длина элемента материала станет бесконечной, когда он получит импульс $3\mu$ в расчете на единицу площади поперечного сечения, т. е. это течение фактически может существовать лишь на конечном отрезке оси $Ox$. Так же обстоит дело и в задаче о форме пленки, падающей под действием собственного веса, которая по существу совпадает с задачей о вязкой струе [5].

Если пленка растягивается одновременно в двух направлениях, то, хотя соотношение $P_* = 3\mu S_0$ перестает быть справедливым, порядок величины критического импульса, который разорвет пленку, не меняется. Так, для течения типа (6), (7) его максимальная величина не превосходит $4\mu S_0$.

*Поступила 16 VI 1982*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов В. В.** Течение вязкой пленки по поверхности невязкой жидкости.— ПМТФ, 1982, № 2.
2. **Рейнер М.** Деформация и течение. М.: Гостоптехиздат, 1963.
3. **Буевич Ю. А., Скуратов В. К.** О растяжении прядомой жидкости под действием собственного веса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5.
4. **Narayanaswamy O. S.** A one-dimensional model of stretching float glass.— J. Amer. Ceram. Soc., 1977, vol. 60, N 1—2.
5. **Trouton F. T.** On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity.— Proc. Roy. Soc. Lond., 1906, vol. 77A, N 519.


---


УДК 532.546


# ОТБОР ЖИДКОСТИ ИЗ ДЕФОРМИРУЕМОГО ПЛАСТА ЧЕРЕЗ ВЫСОКОПРОНИЦАЕМОЕ ОКНО


*А. В. Колмогоров, В. Н. Николаевский*

*(Якутск, Москва)*


**1.** В осесимметричном случае система уравнений упругонористого насыщенного жидкостью пласта состоит [1] из уравнений движения для твердой фазы:

$$\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} g \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} g \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon = (1-m_0)\beta_1 K, \quad g = (1-\varepsilon)(1-2\nu)[2G(1-m_0)(1-\nu)]^{-1},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

уравнений движения жидкости:

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -m_0\left(w_r - \frac{\partial u_r}{\partial t}\right), \quad \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = -m_0\left(w_z - \frac{\partial u_z}{\partial t}\right) \tag{1.2}$$

и уравнений неразрывности для твердой и жидкой фаз:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\beta_1}{3}\frac{\partial \theta^f}{\partial t} - \beta_1(1-m_0)\frac{\partial p}{\partial t} - (1-m_0)\frac{\partial e}{\partial t} = 0; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \beta_2 m_0 \frac{\partial p}{\partial t} - m_0\left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = 0; \tag{1.4}$$

$$\theta^f = \sigma^f_{rr} + \sigma^f_{\theta\theta} + \sigma^f_{zz} = 2G(1-m_0)(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}e + 3\varepsilon p. \tag{1.5}$$

Здесь переменными являются отклонения от стационарных значений величин и приняты следующие обозначения: $m$ — пористость ($m_0$ — ее начальное значение); $u_i$ — компонента перемещения твердой фазы; $w_i$ — компонента скорости движения жидкости; $e$ — объемная деформация твердой фазы: $p$ — поровое давление; $\sigma_{ij}$ — напряжение в твердой фазе; $\sigma^f_{ij}$ — эффективное напряжение Терцаги; $\theta^f$ — его первый инвариант; $k$ — проницаемость; $\mu$ — вязкость жидкости; $\beta_1$ и $\beta_2$ — коэффициенты сжимаемости материала твердой и жидкой фаз; $K$, $G$, $\nu$ — модули сжатия, сдвига и коэффициент Пуассона матрицы пласта.

Пусть вязкая жидкость отбирается из замкнутого пласта радиуса $R$ и мощности $2h$ через плоскую горизонтальную трещину радиуса $\rho$ с дебитом $Q(t)$. В случае высокоэффективного крупномасштабного гидроразрыва [2] радиус $\rho$ может быть сравним с $R$ и значительно превосходить $h$. Для упрощения примем, что депрессия в пласте из-за отбора жидкости не вызывает изменения полного напряжения, иначе говоря, горного дав-