

УДК 532.5:532.517.4

## ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ НА ПУЛЬСАЦИОННУЮ АКТИВНОСТЬ В ТЕЧЕНИЯХ ВОЗБУЖДЕННОГО ДВУХАТОМНОГО ГАЗА

Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов\*, Е. Е. Ершова\*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Новосибирская государственная академия водного транспорта, 630099 Новосибирск

Исследовано влияние колебательной релаксации на нелинейную эволюцию крупной вихревой структуры в сдвиговом потоке сильнонеравновесного двухатомного газа. Расчеты выполнены на основе системы уравнений двухтемпературной газодинамики вязкого теплопроводного газа. Релаксация к равновесию температуры колебательных уровней молекул газа описывалась уравнением Ландау — Теллера. Вклад релаксации вращательных уровней учитывался коэффициентом объемной вязкости в тензоре напряжений. Показано, что на фоне только релаксационного процесса в отсутствие вязкой диссипации затухание кинетической энергии возмущений и рейнольдсовых напряжений возрастает в пределах до 10 % по сравнению со случаем термического равновесия. При большой (реально достижимой) степени возбуждения колебательной моды, умеренных значениях динамической и объемной вязкостей и характерном времени релаксации, соизмеримом с временем течения, относительный эффект подавления возмущений достигает 15 %.

**Ключевые слова:** вихревая структура, колебательная мода, возбуждение, релаксация, подавление возмущений.

**Введение.** В работе [1] исследовано влияние умеренной термической неравновесности внутренних степеней свободы на нелинейную эволюцию крупной вихревой структуры в сдвиговом потоке молекулярного газа. В этом случае распределение энергий по динамическим модам характеризуется единой температурой и модельное течение рассчитывалось на основе полных уравнений Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа, в которых термическая неравновесность учитывалась коэффициентом объемной вязкости при дивергентной части тензора напряжений. Результаты расчетов показали, что при возрастании объемной вязкости в диапазоне ее реальных значений средняя скорость затухания энергии возмущения и модуля рейнольдсовых напряжений увеличивается примерно на 10 % по сравнению с тем, когда объемная вязкость исключена, например на основе соотношения Стокса [2]. Выбранная структура и параметры модельного течения позволяют рассматривать этот результат как подавление пульсационной активности в процессе ламинарно-турбулентного перехода или в развитом турбулентном потоке. В первом случае это может привести к возрастанию числа Рейнольдса перехода, а во втором — к снижению турбулентного сопротивления. В этой связи представляет интерес дальнейшее исследование полученного эффекта. В данной работе на основе модели вихревого возмущения, использованной в [1], рассматривается случай более сильного отклонения от равновесия с возбуждением нижних колебательных уровней молекул. Такая неравновесность может

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-00827; 03-01-00160-а).

быть создана естественным путем, например при быстром расширении газа в сопле, либо искусственным возбуждением, в частности умеренной лазерной накачкой.

**1. Физическая модель.** Способ описания неравновесности по внутренним степеням свободы молекул зависит от соотношений между средним временем пробега молекул  $\tau_{tt}$ , временами релаксации вращательных мод  $\tau_{rt}$ , колебательных мод  $\tau_{vt}$  и характерным временем течения  $t_f$ . Если течение газа в целом рассматривается в гидродинамическом приближении, возможны две альтернативные модели колебательной релаксации, отвечающие микро- и макроскопическому подходам [2, 3]. В микроскопическом подходе используются уравнения поуровневой кинетики, описывающие эволюцию во времени заселенностей (чисел заполнения) колебательных уровней молекул. Поскольку в данной работе исследуется принципиальная возможность проявления демпфирующего эффекта релаксации, целесообразнее использовать сокращенное описание процесса на макроскопическом уровне. С этой целью ограничимся наиболее изученными двухатомными газами, молекулы которых имеют только одну колебательную моду.

Будем рассматривать распространенный в аэродинамике случай, когда характерные времена удовлетворяют условиям  $\tau_{tt} \leq \tau_{rt} \ll \tau_{vv} \ll \tau_{vt} \sim t_f$  [4–6]. Здесь  $\tau_{vt}$  — характерное время обмена колебательными квантами между молекулами, в течение которого в подсистеме колебательных уровней устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой, отличной от температуры потока. При этом можно считать, что на временах порядка времени течения  $t_f$  поступательные и вращательные степени свободы находятся в равновесии и характеризуются статической температурой потока.

Адекватной физической моделью таких течений является двухтемпературная газодинамика, в которой вклад вращательного движения молекул учитывается коэффициентом объемной вязкости  $\mu_b$  в тензоре напряжений, а обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы описывается релаксационным уравнением Ландау — Теллера [3, 4]. В пространственно однородном случае уравнение имеет характерный вид

$$\frac{dT_{vib}}{dt} = \frac{T - T_{vib}}{\tau_{vt}},$$

где  $T$  — равновесная температура газа;  $T_{vib}$  — колебательная температура. Уравнение описывает асимптотический процесс приближения колебательной моды к равновесию в некотором осредненном смысле.

Подобные релаксационные уравнения для колебательных мод выводились многими авторами в рамках различных кинетических подходов: из уравнений поуровневой кинетики для модели гармонического осциллятора [2, 3], из кинетического уравнения Уленбека — Ван-Чанг обобщенным методом Чепмена — Энскога [5], из кинетического уравнения Уленбека — Ван-Чанг моментным методом Грэда [6]. Каждый из этих теоретических подходов содержит свои ограничения, но на практике диапазон применимости уравнений расширяется использованием экспериментальных данных по временам релаксации. Это позволило успешно применять модель двухтемпературной (многотемпературной) газовой динамики за пределами теоретических ограничений в многочисленных расчетах сверхзвукового обтекания и истечения, ударно-волновых процессов, внутренней аэродинамики реактивных двигателей, лазеров (см. монографии [2, 3], обзоры [5, 7] и библиографию в них).

Реальным физическим фактором, который может заставить перейти от уравнения Ландау — Теллера к микроскопической модели поуровневой кинетики, является проявление ангармонизма колебательной моды при большой глубине ее возбуждения. В этой связи необходимо указать границы изменения физических параметров, позволяющие провести расчеты в рамках двухтемпературной модели.

1.1. *Степень возбуждения и времена релаксации колебательной моды.* В качестве грубой оценки [7] принято считать, что уравнения Ландау — Теллера дают удовлетворительные результаты до температуры  $T \sim \Theta = h\nu/k$ , где  $\Theta$  — характеристическая температура (энергия основного колебательного кванта в абсолютной шкале), выше которой начинают проявляться эффекты ангармонизма. Для двухатомных газов, таких как азот, кислород, окись углерода, она достаточно высока и принимает значения  $\Theta_{N_2} = 3400$  К,  $\Theta_{O_2} = 2300$  К,  $\Theta_{CO} = 3100$  К [7]. Хотя в дальнейших расчетах абсолютные значения температуры газа нигде не фигурируют, для определенности будем считать, что для всех вариантов начальных данных  $T \leq 2000$  К. Заметим, что при такой температуре степень диссоциации в этих газах не превышает долей процента.

Общепринято, что для простых двухатомных молекул ангармонизм всегда означает возбуждение большого числа колебательных уровней. Степень возбуждения колебательной моды будем оценивать отношением

$$\xi = (T_{vib} - T)/T.$$

В нашем случае следует ограничиться таким уровнем возбуждения, когда можно пренебречь ангармонизмом колебаний, вслед за проявлением которого начинается заметная диссоциация молекул. Предварительно необходимо оценить возможный диапазон начальных значений параметра  $\xi$ , достижимых тем или иным способом.

При быстром расширении газа в сопле или при истечении недорасширенной струи можно приближенно принять, что колебательная температура “замораживается” на уровне температуры торможения. При этом получается оценка

$$\xi = (\gamma - 1) M^2 / 2,$$

где  $M$  — число Маха потока;  $\gamma$  — показатель адиабаты. Отсюда для двухатомных газов следует, что при числах Маха в интервале  $M = 0,1 \div 5$  степень возбуждения колебательной моды молекул лежит в пределах  $\xi \approx 0 \div 5$ . Эта оценка подтверждается детальными расчетами [4] в рамках многотемпературной газодинамики, где для воздуха при  $M = 4,5$  и статической температуре  $T = 216$  К получено значение  $\xi \approx 3,82$ .

Представляет интерес возможность оптической накачки колебательной моды с помощью лазера с соответствующей длиной волны. В общем случае степень возбуждения  $\xi$  определяется здесь мощностью и длиной волны излучения, а также оптическими свойствами газа. Экспериментальные данные (см. [3, 8–10]) показывают, что при нормальных температуре и давлении и облучении световым потоком в интервале длин волн от 20 до 200 нм степень возбуждения колебательной моды молекул лежит в диапазоне  $\xi \approx 4,8 \div 10,2$  для  $N_2$ ;  $\xi \approx 4,3 \div 10$  для  $O_2$ ;  $\xi \approx 6,2 \div 9,4$  для  $CO$ . При этом во всех случаях степень диссоциации молекул не превышает 1 %. В работах, посвященных эффектам ангармонизма (см. библиографию в [3, 7] и, например, работу [11]), в качестве меры неравновесности колебательной моды используется отношение  $\xi_1 = T_1/T$ , где  $T_1 = \Theta / \ln(x_0/x_1)$  — условная величина, называемая “температурой” первого колебательного уровня;  $x_0, x_1$  — заселенности нулевого и первого уровней. Существенное проявление ангармоничности, в частности в теплоемкостях и коэффициентах переноса, по расчетам [11], начинается с  $\xi_1 > 4$  и прослеживается до  $\xi_1 \approx 10$  при температурах газа  $T \approx 1000$  К, после чего необходимо учитывать диссоциацию. В то же время в отношении  $\xi$  фигурирует величина  $T_{vib}$ , которая имеет смысл осредненной по всем уровням энергии колебаний. Это означает, что в зависимости от возбуждения всегда  $T_{vib} > T_1$  или даже  $T_{vib} \gg T_1$ . Таким образом,  $\xi > \xi_1$ , и при оптической накачке колебательных уровней энергии двухатомных газов можно пренебречь учетом ангармонизма, если ограничить степень возбуждения интервалом  $\xi \approx 4 \div 5$ .

Для оценки возможных времен колебательной релаксации  $\tau_{vt}$  использовалась предложенная в [12] полуэмпирическая зависимость

$$\ln(p\tau_{vt}) = Cm_{eq}^{1/2}\Theta^{4/3}(T^{-1/3} - 0,015m_{eq}^{1/4}) - 18,420,$$

обобщающая многочисленные экспериментальные данные для двухатомных газов в диапазоне температур  $T = 3 \cdot 10^2 \div 10^4$  К. Здесь размерности входящих величин выражаются соответственно:  $\tau_{vt}$  — в секундах, давление газа  $p$  — в атмосферах, температура газа  $T$  и характеристическая колебательная температура  $\Theta$  — в градусах Кельвина, приведенная масса молекул при столкновении  $m_{eq}$  — в атомных единицах. Значения характеристической температуры  $\Theta$  были приведены выше. Значения константы  $C$ , по данным [12], соответственно равны:  $C_{N_2} = 1,15 \cdot 10^{-3}$ ,  $C_{O_2} = 1,10 \cdot 10^{-3}$ ,  $C_{CO} = 1,05 \cdot 10^{-3}$ . Выполненные для этих газов расчеты при давлении  $p = 1$  атм и температуре газа в диапазоне  $T$  от 300 до 1000 К показали, что времена колебательной релаксации изменяются в пределах  $\tau_{vt} \approx 1 \div 10^{-4}$  с, уменьшаясь с ростом температуры газа.

Следует отметить, что приведенная зависимость аппроксимирует экспериментальные данные прямыми в так называемых координатах Ландау — Теллера ( $\ln(p\tau_{vt}), T^{-1/3}$ ) [3], что косвенно подтверждает возможность их использования в релаксационных уравнениях.

В [3] была введена феноменологическая поправка к времени релаксации, позволяющая расширить пределы применимости уравнения Ландау — Теллера для учета ангармонизма колебаний. Время релаксации представляется в виде

$$\tau_a = \tau_{vt} \left[ \frac{1 - \gamma \exp(-\Theta/T_{vib})}{1 - \exp(-\Theta/T_{vib})} \right]^2.$$

Видно, что подправленное таким образом время релаксации зависит не только от температуры газа, но и от колебательной температуры  $T_{vib}$ . Представляет интерес оценить, до каких колебательных температур для рассматриваемых в работе газов можно пользоваться этой поправкой, а также ее величину в диапазоне изменения расчетных параметров.

Оценка предела применимости по  $T_{vib}$  следует [3] из очевидного неравенства  $1 - \gamma \exp(-\Theta/T_{vib}) > 0$ , откуда  $T_{vib} < \Theta / \ln \gamma$ . Для молекул  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO$  имеем приближенное выражение  $\ln \gamma \simeq 1,87\Theta^{2/3}T^{-1/3}x_e$ , где  $x_e = \Theta/(4D)$  — параметр ангармоничности;  $D$  — энергия диссоциации в градусах Кельвина. Задаваясь средними для моделируемых газов значениями величин  $\Theta \simeq 2500$  К,  $D \simeq 10^5$  К, при  $T \simeq 2000$  К получаем, что поправка применима в пределах  $T_{vib} < 1,5 \cdot 10^4$  К. При этом минимальная степень возбуждения оценивается как  $\xi < (1,5 \cdot 10^4 - 2000)/2000 = 6,5$ . Для тех же средних значений параметров и  $\Theta \simeq T_{vib}$  величина поправки на ангармонизм приближенно равна

$$\left[ \frac{1 - \gamma \exp(-\Theta/T_{vib})}{1 - \exp(-\Theta/T_{vib})} \right]^2 \simeq \left[ \frac{1 - 1,18e^{-1}}{1 - e^{-1}} \right]^2 \simeq 0,82.$$

Можно предположить, что такая поправка лежит в пределах разброса экспериментальных данных [12].

1.2. *Коэффициенты переноса и параметры течения.* Тензор напряжений  $P$  и вектор теплового потока  $\mathbf{q}$  в уравнениях импульсов и энергии двухтемпературной газодинамики имеют вид [4, 6]

$$P = pI - \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^* - (2/3)I \operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu_b I \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T - \lambda_{vib} \nabla T_{vib}, \quad \lambda = \lambda_{tr} + \lambda_{rot}, \quad p = \rho RT,$$

где  $\mathbf{u} = (u, v)$  — вектор скорости;  $I$  — единичный тензор второго ранга; звездочка означает операцию транспонирования;  $\mu, \mu_b$  — коэффициенты динамической и объемной вязкостей;

$\lambda_{tr}$ ,  $\lambda_{rot}$ ,  $\lambda_{vib}$  — коэффициенты теплопроводности, связанные с поступательным, вращательным и колебательным движением;  $R$  — газовая постоянная. Объемная вязкость  $\mu_b$  в тензоре напряжений  $P$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda_{rot}$  в векторе теплового потока  $\mathbf{q}$  учитывают вклады вращательных степеней свободы, а коэффициент теплопроводности  $\lambda_{vib}$  — вклад колебательной моды.

Отношение объемной вязкости к сдвиговой, как и в [1], оценивалось в пределах  $\alpha_1 = \mu_b/\mu \approx 0 \div 2$ . Коэффициенты теплопроводности, обусловленные различными типами степеней свободы, определялись из следующих формул, учитывающих модифицированные поправки Эйкена (см. [4]):

$$\lambda_{tr} = 5\gamma_{tr}\mu c_v/2, \quad \lambda_{rot} = 6\gamma_{rot}\mu c_v/5, \quad \lambda_{vib} = 6\gamma_{vib}\mu c_v/5,$$

где  $\gamma_{tr}$ ,  $\gamma_{rot}$ ,  $\gamma_{vib}$  — доли внутренней энергии, содержащейся соответственно в поступательных, вращательных и колебательной степенях свободы;  $c_v$  — суммарная удельная теплоемкость при постоянном объеме. Для двухатомного газа при  $T \leq 2000$  К для простоты принималось  $\gamma_{rot} = \gamma_{vib} \approx 2/7$ ,  $\gamma_{tr} \approx 3/7$ . При этом использованное в расчетах отношение коэффициентов теплопроводности было постоянным  $\alpha_2 = \lambda_{vib}/\lambda \approx 0,2424$ , где  $\lambda = \lambda_{tr} + \lambda_{rot}$ . Принятое приближение оправдано еще и тем, что основной целью расчетов было выявление демпфирующего эффекта на фоне чисто релаксационного процесса, когда все диссипативные коэффициенты занулялись:  $\mu = \mu_b = \lambda_{tr} = \lambda_{rot} = \lambda_{vib} = 0$ .

Модельное течение рассматривалось на плоскости  $(x, y)$  в квадрате со стороной  $l$ . Несущий поток имел антисимметричный линейный профиль скорости  $u(y) = 2U_0y/l$ . Начальное вихревое возмущение задавалось в форме вихря Рэнкина радиуса  $R_0$  с постоянной завихренностью  $\Omega_0$ , центрированного в расчетной области. На внешних границах области, параллельных несущему потоку, задавались постоянные температура  $T_0$  и плотность  $\rho_0$ .

**2. Постановка задачи и метод решения.** 2.1. *Начально-краевая задача.* Эволюция структуры в модельной ячейке описывалась системой полных уравнений двухтемпературной газодинамики вязкого теплопроводного газа. Для обезразмеривания системы уравнений были выбраны следующие характерные величины: начальный диаметр структуры  $2R_0$ ; модуль скорости  $U_0$ , плотность  $\rho_0$  и температура  $T_0$  на верхней и нижней границах модельной ячейки; время  $t_0 = 2R_0/U_0$ ; давление  $p_0 = \rho_0 U_0^2$ .

В безразмерных переменных система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) &= (\gamma - 1) M_0^2 \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) + \frac{1}{\operatorname{Re} \operatorname{Pr}} \Delta T + \\ &+ \frac{(\gamma - 1) M_0^2}{2 \operatorname{Re}} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*)^2 + (\gamma - 1) \left( \alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \frac{M_0^2}{\operatorname{Re}} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \frac{\gamma_v \rho (T_{vib} - T)}{\tau_{vt}}, \\ \gamma_v \rho \left( \frac{\partial T_{vib}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_{vib} \right) &= \frac{\alpha_2}{\operatorname{Re} \operatorname{Pr}} \Delta T_{vib} + \frac{\gamma_v \rho (T - T_{vib})}{\tau_{vt}}, \quad \gamma M_0^2 p = \rho T. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение для колебательной температуры  $T_{vib}$  в системе (1) представляет собой релаксационное уравнение Ландау — Теллера, записанное в эйлеровой форме [4, 6]. Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает локальный поток колебательной энергии, обусловленный молекулярным переносом, а второе — процесс релаксации колебательной энергии к равновесному состоянию.

На границах ячейки во все моменты времени ставились следующие условия: при  $x = \pm\chi/2$ ,  $y \in [-\chi/2; \chi/2]$

$$\begin{aligned} u(\chi/2, y, t) &= u(-\chi/2, y, t), & v(\chi/2, y, t) &= -v(-\chi/2, y, t), \\ \rho(\chi/2, y, t) &= \rho(-\chi/2, y, t), & p(\chi/2, y, t) &= p(-\chi/2, y, t), \\ T_{vib}(\chi/2, y, t) &= T_{vib}(-\chi/2, y, t); \end{aligned} \quad (2)$$

при  $y = \pm\chi/2$ ,  $x \in [-\chi/2; \chi/2]$

$$\begin{aligned} u(x, \chi/2, t) &= -u(x, -\chi/2, t), & v(x, \chi/2, t) &= v(x, -\chi/2, t), \\ \rho(x, \chi/2, t) &= \rho(x, -\chi/2, t), & p(x, \chi/2, t) &= p(x, -\chi/2, t), \\ T_{vib}(x, \chi/2, t) &= T_{vib}(x, -\chi/2, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Несущий поток в расчетной области задается как точное стационарное решение системы (1) в случае термического равновесия по степеням свободы с краевыми условиями (2), (3). В безразмерных переменных его характеристики имеют вид

$$\begin{aligned} T_0(y) &= T_{vib,0}(y) = 1 + (\gamma - 1) M_0^2 \text{Pr} (1 - 4y^2/\chi^2)/2, \\ U(y) &= 2y/\chi, \quad V = 0, \quad \rho_0(y) = T_0^{-1}(y), \quad P_0(x, y) = 1/(\gamma M_0^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия для поля скорости и термодинамических величин задавались в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= \begin{cases} U(y) + \beta y/(2r^2), & r > 1/2, \\ U(y) + 2\beta y, & r \leq 1/2, \end{cases} \\ v(0, x, y) &= \begin{cases} -\beta x/(2r^2), & r > 1/2, \\ -2\beta x, & r \leq 1/2, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

$$T(0, x, y) = T_0(y), \quad T_{vib}(0, x, y) = (1 + \xi)T_0(y), \quad \rho(0, x, y) = \rho_0(y), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Расчеты велись при следующих значениях параметров: число Маха  $M_0 = U_0/\sqrt{\gamma RT_0} = 0,5$ ; число Рейнольдса  $Re = 2U_0 R_0 \rho_0/\mu = 100$ ; число Прандтля  $Pr = \mu c_p/\lambda = 0,74$ ; относительная интенсивность вихревого возмущения  $\beta = \Omega_0 R_0/(2U_0) = 0,2$ ; параметр перемежаемости  $\chi = l/(2R_0) = 3$ ;  $\gamma = 1,4$ ;  $\alpha_1 = 0 \div 2$ ;  $\alpha_2 = 0,2424$ ;  $\xi = 0 \div 5$ ;  $\tau_{vt} = 0 \div 5$ .

2.2. *Разностные схемы.* В численных расчетах система (1) аппроксимировалась весовой конечно-разностной схемой с расщеплением по физическим процессам и пространственным координатам, аналогичной использованной в [1]. Схема в операторной форме записывается в виде

$$\frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} + \mathbf{L}_h[\delta \mathbf{x}^{n+1} + (1 - \delta)\mathbf{x}^n] = \mathbf{G}_h^n, \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}^n = (\rho_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, T_{ij}^n, T_{vib,ij}^n)$  — сеточная вектор-функция решения на  $n$ -м временном слое;  $h$  и  $\Delta t$  — шаг пространственной сетки и шаг по времени соответственно;  $\delta$  — весовой параметр. Вид оператора  $\mathbf{L}_h$  описан в [1], а вектор правых частей  $\mathbf{G}_h^n$  составлен из симметричных по каждой координате аппроксимаций со вторым порядком смешанных производных из уравнений импульсов, слагаемых диссипативной функции из уравнения энергии и источниковых слагаемых из релаксационного уравнения и уравнения энергии. В квазиравновесном случае, когда система (1) переходит в систему полных уравнений Навье — Стокса, схема (6) совпадает со схемой, предложенной в [13] (см. также [1]). Анализ показывает, что появление дополнительного уравнения и источникового слагаемого в уравнении энергии не меняет вычислительных свойств последней. Таким образом, схема (6) на

регулярной сетке с шагом  $h$  по обоим координатам аппроксимирует систему уравнений (1) с порядком  $O(\Delta t + h^2)$  и абсолютно устойчива при весовом параметре  $\delta > 1/2$ .

Для оценки вклада собственно релаксационного процесса рассматриваемая модельная задача решалась также в приближении релаксационной газовой динамики, когда диссипативные слагаемые в уравнениях импульсов, энергии и релаксационном уравнении системы (1) отсутствуют ( $\mu = \mu_b = 0$ ;  $\lambda_{tr} = \lambda_{rot} = \lambda_{vib} = 0$ ). В этом случае система уравнений аппроксимировалась весовой конечно-разностной схемой с расщеплением по физическим процессам и пространственным координатам. В качестве основы для ее построения использовалась численная схема для системы уравнений газовой динамики из [13]. В абстрактной операторной форме схема также записывается в виде (6). Однако в ней оператор  $\mathbf{L}_h$  составлен из симметричных аппроксимаций со вторым порядком первых производных по каждой пространственной координате, а вектор правых частей  $\mathbf{G}_h^n$  состоит из релаксационных слагаемых из уравнения энергии и релаксационного уравнения. Порядок аппроксимации и устойчивость полученной таким образом схемы аналогичны характеристикам схемы (6).

Сетка в расчетной области в обоих случаях содержала  $31 \times 31 = 961$  узел с шагом  $h = 0,1$ , а шаг по времени был выбран  $\Delta t = 0,01$ . Эволюция возмущения прослеживалась вплоть до его выхода на границу ячейки, что требовало до 600 временных шагов, после чего счет прекращался.

Для отработки численных схем проводились тестовые расчеты, аналогичные выполненным в работе [1]. Показано, что максимальные погрешности вычислений не превышают величины порядка  $5 \cdot 10^{-3}$ .

**3. Результаты расчетов и обсуждение.** В расчетах прослеживался обмен энергией и импульсом между наложенным возмущением и несущим потоком. Пульсационные характеристики течения  $\Phi'$  определялись следующим образом:

$$\Phi' = \Phi - \Phi_0,$$

где  $\Phi$  — мгновенные значения характеристик течения, полученные из численного решения модельной задачи;  $\Phi_0$  — характеристики равновесного стационарного несущего потока (4). Для оценки влияния релаксации возбужденных колебательных степеней свободы и объемной вязкости на пульсационные характеристики модельного течения исследовалась эволюция во времени абсолютной величины рейнольдсовых напряжений

$$\sigma_{xy}(t) = \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \int_{-\chi/2}^{\chi/2} |\rho u'v'| dx dy$$

и кинетической энергии возмущений

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \rho \mathbf{u}'^2 dx dy.$$

Соответствующие интегралы вычислялись по формулам прямоугольников на регулярной сетке с шагом  $h = 0,1$ .

На рис. 1,а графики  $E(t)$  демонстрируют влияние чисто релаксационного процесса в зависимости от степени возбуждения колебательной моды  $\xi$ , когда в уравнениях системы (1) диссипативные коэффициенты равны нулю ( $\mu = \mu_b = 0$ ,  $\lambda_{tr} = \lambda_{rot} = \lambda_{vib} = 0$ ), а время колебательной релаксации  $\tau_{vt} = 3$  соизмеримо с характерным временем эволюции течения. Ход кривых показывает, что с увеличением значения  $\xi$  зависимости  $E(t)$

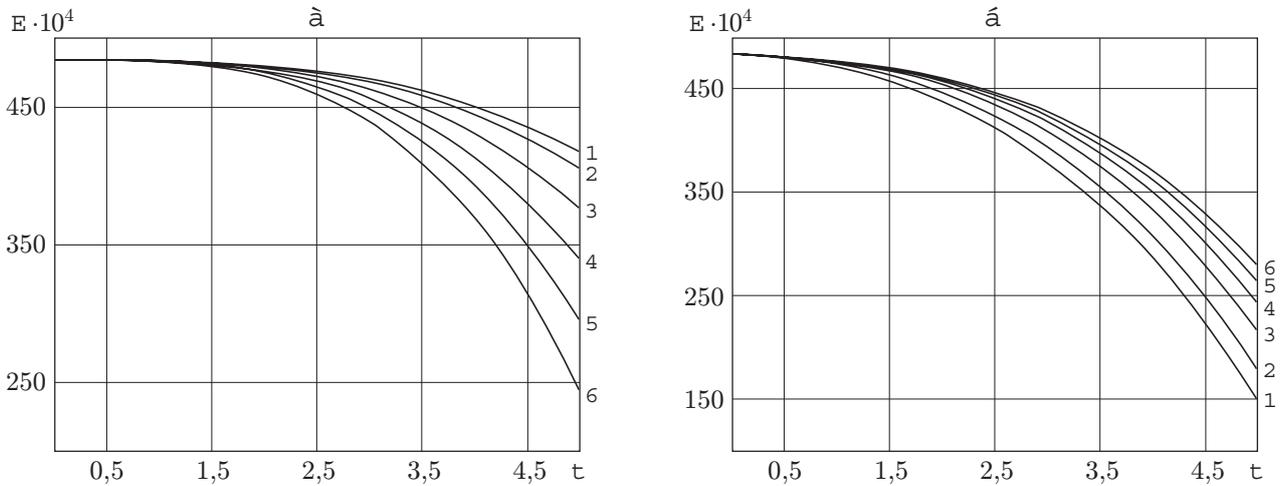


Рис. 1. Зависимости кинетической энергии возмущения от времени ( $Re = 100$ ,  $M_0 = 0,5$ ,  $Pr = 0,74$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\chi = 3$ ,  $\alpha_1 = 0 \div 2$ ,  $\xi = 0 \div 5$ ,  $\tau_{vt} = 0 \div 5$ ):

*a* —  $\mu = \mu_b = 0$ ;  $\lambda = \lambda_{vib} = 0$ ;  $\tau_{vt} = 3$ ;  $\xi = 0 \div 5$  (1 —  $\xi = 0,5$ ; 2 —  $\xi = 1$ ; 3 —  $\xi = 2$ ; 4 —  $\xi = 3$ ; 5 —  $\xi = 4$ ; 6 —  $\xi = 5$ ); *б* —  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $\xi = 2$ ;  $\tau_{vt} = 0,5 \div 5$  (1 —  $\tau_{vt} = 0,5$ ; 2 —  $\tau_{vt} = 1$ ; 3 —  $\tau_{vt} = 2$ ; 4 —  $\tau_{vt} = 3$ ; 5 —  $\tau_{vt} = 4$ ; 6 —  $\tau_{vt} = 5$ )

спадают более интенсивно. Влияние изменения времени колебательной релаксации  $\tau_{vt}$  на затухание энергии возмущения  $E(t)$  иллюстрирует рис. 1, б. Параметр  $\tau_{vt}$  здесь меняется в пределах одного порядка. Значения параметров  $\alpha_1$  и  $\xi$ , также влияющих на диссипацию, выбраны достаточно умеренными. Видно, что с уменьшением времени релаксации пульсации подавляются более интенсивно, хотя и не в прямой пропорции с изменением  $\tau_{vt}$ . Зависимости  $\sigma_{xy}(t)$  при различных  $\xi$ ,  $\tau_{vt}$  ведут себя аналогично кривым, представленным на рисунке. С ростом степени возбуждения колебательных уровней энергии  $\xi$  реинльдсо-вы напряжения затухают интенсивнее, а уменьшение времени колебательной релаксации  $\tau_{vt}$  приводит к увеличению скорости спада  $\sigma_{xy}(t)$ .

Для количественной оценки влияния процесса колебательной релаксации на средние пульсационные характеристики вычислялись их относительные изменения

$$\Delta_F^\xi = |\langle F(\xi, \tau_{vt}) \rangle - \langle F(0, \tau_{vt}) \rangle| / \langle F(0, \tau_{vt}) \rangle, \quad \tau_{vt} = \text{const},$$

$$\Delta_F^{\tau_{vt}} = |\langle F(\xi, \tau_{vt}) \rangle - \langle F(\xi, 0) \rangle| / \langle F(\xi, 0) \rangle, \quad \xi = \text{const}.$$

Усреднение по времени определялось как

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta F(t) dt.$$

Для режима, фиксированного на рисунке, в приближении релаксационной газовой динамики, когда  $\mu = \mu_b = 0$ ,  $\lambda_{tr} = \lambda_{rot} = \lambda_{vib} = 0$ ,  $\tau_{vt} = 3$ , эти характеристики для кинетической энергии  $\langle E \rangle$  и величины реинльдсовых напряжений  $\langle \sigma_{xy} \rangle$  при  $\xi = 0 \div 5$  меняются в пределах  $\Delta_F^\xi = 0,043 \div 0,091$ , соответственно при  $\tau_{vt} = 5$  — в пределах  $\Delta_F^\xi = 0,017 \div 0,056$ . При изменении времени колебательной релаксации в пределах  $\tau_{vt} = 0 \div 5$  и фиксированных значениях  $\alpha_1 = 0,5$  и  $\xi = 2$  относительные изменения величин  $\langle E(\xi, \tau_{vt}) \rangle$  и  $\langle \sigma_{xy}(\xi, \tau_{vt}) \rangle$  лежат в интервале от  $\Delta_F^{\tau_{vt}} = 0,103$  для  $\tau_{vt} = 0,5$  до  $\Delta_F^{\tau_{vt}} = 0,01$  для  $\tau_{vt} = 5$ . В случае, когда объемная вязкость достигала своего максимального значения, принятого в расчетах (см.

также [1]), и соответствующего  $\alpha_1 = 2$ , при  $\xi = 2$  было получено  $\Delta_E^{\tau_{vt}} = 0,158$  при  $\tau_{vt} = 3$  и  $\Delta_E^{\tau_{vt}} = 0,106$  при  $\tau_{vt} = 5$ .

**Заключение.** В работе численно исследовано влияние релаксации колебательных уровней молекул на нелинейное взаимодействие вихревого возмущения конечной амплитуды с несущим сдвиговым потоком возбужденного двухатомного газа. Диапазон изменения степени возбуждения и времени релаксации колебательной моды и объемной вязкости соответствовал их реальным значениям для азота, кислорода и окиси углерода. Результаты численного моделирования позволяют сделать вывод о заметном демпфирующем влиянии неравновесности колебательной моды молекул на динамику возмущений при уровнях возбуждения, которые можно получить при течениях в соплах, недорасширенных струях или умеренной лазерной накачкой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю. Н., Ершов И. В. Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в течениях возбужденного молекулярного газа // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 22–34.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977.
4. Bertolotti F. V. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 93–118.
5. Кузнецов В. М., Кузнецов М. М., Нагнибеда Е. А., Рыдалевская М. А. Некоторые вопросы кинетической теории реагирующих газов и ее приложения в релаксационной газодинамике // Молекулярная газодинамика: Сб. ст. М.: Наука, 1982. С. 137–154.
6. Жданов В. М., Алиевский М. Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.
7. Осипов А. И., Уваров А. В. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 11. С. 1–42.
8. Ormode S. Vibrational relaxation theories and measurements // Rev. Modern Phys. 1975. V. 47. P. 193–258.
9. Таблицы физических величин: Справ. / Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
10. Willet C. S. Handbook of lasers. Cleveland: Chem. Rubber Co., 1971.
11. Кустова Е. В., Нагнибеда Е. А. Колебательная кинетика и процессы переноса в сильнонеравновесном газе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 5. С. 150–160.
12. Millikan R. C., White D. R. Systematics of vibrational relaxation // J. Chem. Phys. 1963. V. 39. P. 3209–3213.
13. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.

*Поступила в редакцию 5/V 2003 г.,  
в окончательном варианте — 24/X 2003 г.*