УДК 533.6.011.72

ДВИЖЕНИЕ ИСКРИВЛЕННОГО ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. А. Румянцев

(*Ленинград*)

Проблема устойчивости фронта ударной волны, распространяющейся в направлении убывания плотности среды, представляет интерес для довольно широкого класса нелинейных движений. Такие явления, как, например, прорыв атмосферы [1], турбулизация облака газа и пыли при атмосферных ядерных взрывах [2], возникновение крупномасштабной турбулентности в оболочках вспыхивающих звезд типа сверхновых [3], распространение фронтов при градиентном ускорении в лабораторных исследованиях [4], так или иначе связаны с неустойчивостями сверхзвуковых движений.

Теоретический анализ показывает, что фронт сильной ударной волны (с числом Маха $M \gg 1$), распространяющейся в среде убывающей плотности, оказывается неустойчивым. Этот анализ проведен соответственно для случаев отсутствия магнитного поля и для магнитогидродинамической ударной волны в линейном относительно возмущений приближении в работах [5, 6]. Случайные искривления фронта, при которых отдельные элементы опережают фронт или отстают от него, нарастают со временем, что оказывается верным и при учете нелинейных поправок, сделанных в данной работе в отсутствие магнитного поля.

Эволюция малых искажений фронта ударной волны, распространяющейся в однородном газе, рассматривалась в работе [7] и более детально (для случая произвольного уравнения состояния газа) в работе [8]. Для случая сильной ударной волны результаты указанных работ непосредственно следуют из рассмотрения данной работы и показывают, что в однородной среде для известных уравнений состояния фронт устойчив.

1. Пусть невозмущенный плоский фронт сильной ударной волны движется по нормали в положительном направлении оси x, причем в этом же направлении убывает плотность невозмущенного газа $\rho_0(X)$. В случаях экспоненциального или степенного законов падения плотности скорость фронта $u(X)$ и его положение $X(t)$ могут быть определены из численного интегрирования уравнений, содержащих автомодельную переменную. Приближенные значения указанных величин могут быть найдены по методу Чизнела — Уизема (см., например, [9]). Значительные уточнения этого метода получены в работе [10], здесь показано, что

$$u \sim \rho_0^{-\lambda}, \quad \lambda = 2 + \frac{\gamma+1}{2}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$

где γ — показатель адиабаты вещества, тогда как, согласно [9], показатель равен $\lambda_0 = 2 + \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)}$.

Ниже будем следовать методу и обозначениям ранее выполненных работ [5, 6, 10]. Однако в развитии метода и с целью получения нелинейных поправок в отличие от этих работ искажения фронта сначала не предполагаются малыми. Пусть координата участка возмущенного фронта $\Xi(y, t) = X(t) + \xi(y, t)$, а его угловое отклонение от плоского $\theta = \operatorname{arctg}(d\xi/dy)$. Переместим начало отсчета в точку Ξ и повернем оси координат так, чтобы ось y' касалась фронта. При пересчете к новым переменным производные, фигурирующие в уравнениях гидродинамики, заменяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x'} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y'}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial y'} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \dot{\Xi}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x'} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y'}\right) - \dot{\theta}\left(y' \frac{\partial}{\partial x'} - x' \frac{\partial}{\partial y'}\right).$$

Интегрируя уравнения гидродинамики в форме законов сохранения по бесконечно малой области вблизи разрыва, находим

$$\varepsilon(p, \rho) - \varepsilon_0(p_0, \rho_0) = \frac{1}{2}(p + \rho_0)\left(\rho_0^{-1} - \rho^{-1}\right), \tag{1.1}$$

$$p = p_0 + jv, \quad v = j\left(\rho_0^{-1} - \rho^{-1}\right),$$

$$j = \rho_0\dot{\Xi}\cos\theta, \quad v_x = v\cos\theta.$$

Для случая идеального газа, полагая $\varepsilon = p/\rho(\gamma - 1)$, из системы (1.1) после простых алгебраических преобразований придем к следующим соотношениям на фронте:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(1 + \frac{2\mathrm{M}^{-2}}{(\gamma-1)\cos^2\theta}\right), \tag{1.2}$$

$$v_x = \frac{2\dot{\Xi}}{\gamma+1}\left(\cos^2\theta - \mathrm{M}^{-2}\right),$$

$$p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0\dot{\Xi}^2\left(\cos^2\theta - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\mathrm{M}^{-2}\right),$$

где $\mathrm{M} = \dot{\Xi}/c_0$; $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$, причем при $\theta = 0$ последние соотношения переходят в обычные, вытекающие из адиабаты Гюгонио. В общем же случае равенства (1.2) соответствуют, как можно видеть, ударной поляре для участка косого фронта или условиям Буземана, но записанным в лабораторной системе отсчета, т. е. в той системе, где невозмущенный газ покоится. Плоскости $\cos\theta = \mathrm{M}^{-1}$ определяют максимальный наклон косых фронтов, эти плоскости содержат линии Маха для возмущений, исходящих из фронта и распространяющихся в невозмущенный газ [11].

При наличии спонтанных искривлений фронта, или его деформаций, вызванных некоторыми случайными изменениями хода невозмущенной плотности $\delta\rho_0$, гидродинамические функции за фронтом будут отличаться от невозмущенных значений на величины $\delta\rho$, δv, δp, а скорость фронта на $\delta u = \dot{\Xi} - u(X + \xi) = \dot{\xi} + u(X) - u(X + \xi)$. Рассмотрим малые возмущения фронта, характеризуемые продольным (вдоль направления распространения) и поперечным волновыми числами k_x, k_y, удовлетворяющими неравенствам: $k_x l \gg 1$, $k_y\xi \sim |d\xi/dy| \ll 1$, $l = |\nabla \ln\rho_0|^{-1}$, так что по продольным (параллельным x) волновым движениям справедливо квазиклассическое приближение, а искривления фронта достаточно гладкие.

Варьируя граничные условия (1.2) для случая сильной ударной волны, в первом приближении по искривлению фронта получим систему уравнений

$$\delta v_x = \frac{2}{\gamma+1}\left(\delta u + \frac{\gamma-1}{2}\delta v_x^0\right), \tag{1.3}$$

$$\delta\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\delta\rho_0,$$

$$\delta p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 u^2\left(\frac{\delta\rho_0}{\rho_0} + 2\frac{\delta u}{u} - 2\frac{\delta v_x^0}{u}\right),$$

причем для вариаций скорости произведена замена $\delta v_x \to \delta v_x - \delta v_x^0$, учитывающая возможную случайную скорость перемещений δv_x^0 среды перед фронтом.

Все термодинамические функции за фронтом удобно рассматривать как функции давления и энтропии. Соответственно любое малое искажение фронта сопровождается возмущениями в газе за фронтом двух типов — энтропийным и звуковым. В последнем виде движения амплитуды скорости и давления связаны обычным соотношением для звука (в квазиклассическом приближении). Что касается возмущений плотности, то эта величина равна сумме возмущений, обусловленных указанными двумя видами движений, и здесь удобно не разделять изменение плотности на два слагаемых. Других независимых мод собственных колебаний, в частности «поверхностных», аналогичных тем, что имеют место при тангенциальном разрыве в случае ударного фронта, не существует. Действительно, если искать решение для таких мод в виде δp, $\delta v_{x,y} \sim \sim \exp(\varkappa x + iky - i\omega t)$ в области $x < 0$, т. е. за фронтом, то из линеаризованных уравнений гидродинамики следует $(\varkappa v - i\omega)\delta v_x = -\varkappa\delta p/\rho$; $(\omega + i\varkappa v)\delta v_y = k\delta p/\rho$. При этом если $\delta p \neq 0$, то $\delta v_y \neq 0$, что противоречит непрерывности тангенциальной компоненты скорости на фронте: впереди фронта может находиться лишь невозмущенный газ, условие же $\delta p = 0$, $\delta v_x \neq 0$ не выполняется при вещественном $\varkappa$.

Рассмотрим падение на фронт, навстречу ему звуковой волны с относительными изменениями плотности и скорости соответственно $\delta\rho_0/\rho_0 = \delta v_0/c_0 \sim \exp(-ik_x x + i\omega t)$. Если среда изэнтропична, т. е. $p_0 \sim \rho_0^\gamma$, то в согласии с квазиклассическим приближением амплитуда $\delta\rho_0 \sim \rho_0^{-(\nu-1)}$, где $\nu = (3\gamma - 1)/4$, что согласуется также с законом сохранения потока звуковой энергии $\rho_0 c_0 \delta v_0^2 = \text{const}$ [12]. Преломленная на фронте сильной ударной волны звуковая волна с точностью до величин M^{-1} распространяется перпендикулярно фронту даже при наклонном падении [13]. Это означает, что при слабом искривлении фронта в квазиклассическом приближении $\delta p = -\rho c \delta v_x$. Подставив это выражение в последнее уравнение системы (1.3) и разрешив ее относительно возмущений скорости фронта, получим приближенно (пренебрегая величинами порядка M^{-1})

$$\delta u \equiv \dot{\xi} - \xi du/dX = -\lambda_0 u \delta\rho_0/\rho_0.$$

Интегрирование этого уравнения в принятом приближении дает смещение фронта как функцию координаты невозмущенного фронта

(1.4)
$$\xi(X) = \xi_0 \frac{u}{u_0} + \frac{\lambda_0 \delta v_{00}}{ik_x c_{00}} \left[\left(\frac{\rho_{00}}{\rho_0}\right)^\nu \exp\left\{-ik_x(X - X_0) + i\omega \int_{X_0}^{X} \frac{dx}{u(x)}\right\} - \frac{u}{u_0} \right],$$

где $u = u(X)$; $\rho_0 = \rho_0(X)$; $\rho_{00} = \rho_0(X_0)$; $\delta v_{00} = \delta v_0(X_0)$; ξ_0 — начальное смещение фронта. В отсутствие звуковой волны спонтанные смещения и искривления фронта нарастают со временем по закону $\xi \sim u$ [5, 6]. Например, при распространении в среде с экспоненциально-убывающей плотностью $X \sim \ln \rho_0$; $\xi \sim \rho_0^{-\lambda_0}$. Падение на фронт звуковой волны вызывает дополнительные смещения фронта колебательного характера, нарастающие быстрее спонтанных, при $\gamma = 5/3$; $\lambda_0 = 0{,}2$; $\nu = 1$. В качестве возмущений могут быть выбраны отклонения от постоянной плотности (при этом $\delta u = \dot{\xi}$). В этом случае применение формул (1.3) непосредственно приводит к зависимости Чизнела — Уизема ($u \sim \rho_0^{-\lambda_0}$). Так как этот вывод основан на применении квазиклассического приближения, то это, по-видимому, указывает на относительно малую роль длинноволновых возмущений.

Рассмотрим движение фронта в однородной в среднем слаботурбулизованной среде, так что движения среды перед фронтом могут быть представлены в виде суперпозиции хаотически распределенных звуковых волн. Смещение фронта в поле одной из волн определяется по формуле (1.4)

$$\xi(y, t) = -\frac{\lambda_0}{\cos(k, x)}[\Delta r(y, X) - \Delta r(y, X_0)], \tag{1.5}$$

где Δr — смещение частиц газа в волне звука. Введем в рассмотрение смещение $\xi_s = \Delta r/\cos(k, x)$, проекция которого на направление волнового вектора равна действительному смещению частиц. Умножив соотношение (1.5) на $\xi^*(y', t')$, положив $\Delta r(X(t_0)) = 0$ и произведя усреднение по ансамблю волн, получим

$$\overline{\xi(y', t')\,\xi(y, t)} = \lambda_0^2[K(y' - y; X(t') - X(t)) - K(y' - y; X(t_0) - X(t))],$$

где $K(y, x) = \overline{\xi_s^*(y, t)\,\xi_s(0, 0)}$ — корреляционная функция смещений фронта.

Для вычисления смещения во втором приближении, т. е. нелинейной поправки ξ_2, при варьировании граничных условий (1.2) следует по-прежнему положить $\delta p = -\rho c \delta v_2$, а также учесть, что $\delta u = \dot{\xi}_2 - \xi_2\, du/dX - (\xi_1^2/2)\, d^2u/dX^2$. При этом получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\xi_2}{dX} - \xi_2\frac{d\ln u}{dX} - \frac{\xi_0^2 u}{2u_0^2}\frac{d^2u}{dX^2} + \theta^2(1 - \lambda_0),$$

для случая экспоненциальной зависимости плотности

$$\rho_0 \sim \exp(-X/l), \quad \xi_2 = \frac{\lambda_0\xi_0^2}{2l}\left(e^{2z} - e^z\right) + \theta^2\left(\lambda_0^{-1} - 1\right)\left(e^z - 1\right), \quad z = \lambda_0 X/l,$$

причем $\xi_2 < \xi_1$, если $\lambda_0\xi_0 < l$ (это неравенство выполнено при $\xi_0 \leqslant l$).

Если в первом приближении нарастание смещений фронта от его равновесного положения происходит симметрично относительно отстающих и опережающих смещений, то при учете нелинейных поправок возникает асимметрия: опережение происходит относительно быстрее, чем отставание элементов фронта, и этот эффект тем существеннее, чем больше амплитуда смещений и кривизна фронта.

2. Рассмотрим движение среды с произвольным уравнением состояния. В этом случае удобно несколько изменить процедуру варьирования граничных условий. Продифференцировав первое из уравнений системы (1.1) и воспользовавшись первым началом термодинамики, находим уравнение, связывающее приращения давления и плотности на адиабате Гюгонио,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_H = \frac{c^2[1 - \Gamma(p - p_0)/2\rho c^2]}{1 - \Gamma(\rho - \rho_0)/2\rho_0}, \quad \Gamma = \frac{(\partial p/\partial T)_\rho}{\rho C_V},$$

где Γ — постоянная Грюнайзена, $c^2 = (\partial p/\partial \rho)_S$. Аналогичным путем, воспользовавшись остальными уравнениями системы (1.1), получим

$$(\partial\rho/\partial v)_H = 2j[1 + (j^2/\rho^2)(\partial\rho/\partial p)_H]^{-1}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим движение сильной ударной волны, когда давлением газа перед фронтом можно пренебречь. При этом вариация давления газа за фронтом равна $\delta p = (\partial p/\partial v)_H \delta v + (\partial p/\partial \rho_0)\delta\rho_0$. Фигурирующую здесь производную при фиксированной скорости газа можно определить из системы (1.1) $(\partial p/\partial \rho_0)_v = j^2\rho_0^{-2}\left[1 - \left(\partial\rho^{-1}/\partial\rho_0^{-1}\right)_v\right]$. С другой стороны, как и прежде,

$\delta p = -\rho c \delta v$. Прямое варьирование второго из равенств (1.2) дает $\delta p = \rho_0 u_n \delta v + \rho_0 v \delta u_n + v u_n \delta \rho_0$, где $u_n = u \cos\theta$ — нормальная к поверхности фронта скорость его перемещения. Приравнивая все три вариации давления, находим окончательно

$$\frac{\delta u_n}{u_n} = -\frac{\delta\rho_0}{\rho_0}\left[1 - \frac{u_n(\rho c + \rho_0 u)}{v(\rho c + (\partial p/\partial v)_H)}\left(1 - \frac{\partial\rho^{-1}}{\partial\rho_0^{-1}}\right)\right]. \tag{2.2}$$

Полученная формула есть, очевидно, обобщение формулы Чизнела — Уизема не только на случай произвольного уравнения состояния, но и для фронта, движущегося под произвольным углом к направлению убывания плотности.

В однородной по плотности среде вариация $\delta\rho_0$ должна быть положена равной нулю, а в силу однородности уравнений для вариаций все остальные вариации также должны быть равны нулю, за исключением случая, когда знаменатель в квадратной скобке (2.2) обращается в нуль, т. е. $\rho c + (\partial p/\partial v)_H = 0$. С помощью соотношения (2.1) указанное условие может быть преобразовано к виду

$$f(m) = 1 + m - am^2(1 - m)/(1 - am^2) = 0,$$

где $a = (\Gamma/2)(\rho/\rho_0 - 1)$; $m = |u - v|/c$ — число Маха за фронтом.

Для волн сжатия при выполнении неравенства $0 < m < 1$ [14] это условие может быть выполнено, если $a > 1$. Для идеального газа $a = 1$, $f > 0$, так что фронт устойчив. Условие перехода функции $f(m)$ через нуль для нестабильности фронта в однофазной среде было получено, но несколько иным путем в работе [8]. Это условие выполняется лишь для специального вида адиабаты Гюгонио.

Поступила 10 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. **Броуд Г.** Расчеты взрывов на ЭВМ. Сер. Новое в зарубежной науке.— Сб. пер. Механика, 1975, вып. 3.
3. **Шкловский И. С.** Сверхновые звезды. М., «Наука», 1966.
4. **Войтенко А. Е., Соболев О. П.** Градиентное ускорение ударной волны.— ПМТФ, 1968, № 2.
5. **Гуревич Л. Э., Румянцев А. А.** Распространение ударных волн в среде убывающей плотности.— ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 4.
6. **Калмыков Ю. К., Румянцев А. А.** Распространение МГД ударных волн в среде убывающей плотности.— ПМТФ, 1972, № 3.
7. **Дьяков С. П.** Устойчивость ударной волны.— ЖЭТФ, 1954, т. 27, с. 288.
8. **Swan G. W., Fowles G. R.** Shock wave stability.—«Phys. Fluids», 1975, vol. 27, N 1.
9. **Whitham G. B.** Propagation of shock waves through non-uniform flow.— «J. Fluid Mech.», 1958, N 4, p. 337.
10. **Румянцев А. А.** О распространении ударной волны в неоднородной среде.— ЖТФ, 1972, т. 42, вып. 12.
11. **Курант Г., Фридрихс К.** Сверхзвуковые течения и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
12. **Гуревич Л. Э., Румянцев А. А.** К теории кривой блеска сверхновых звезд.— «Астроном. журн.», 1970, т. 47, вып. 5.
13. **Глатман Р. А.** Взаимодействие ударных волн с малыми возмущениями.— ЖТФ, 1973, т. 43, вып. 4.
14. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., «Наука», 1953.