

ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В МОДЕЛИ ТРЕЩИНЫ

УДК 539.375

ЛЕОНОВА — ПАНАСЮКА — ДАГДЕЙЛА

С. А. Назаров

Государственная морская академия им. адм. С. О. Макарова,
199026 Санкт-Петербург

В данной работе вычисляются несколько обычных инвариантных интегралов и интегралов высших порядков, в которых фигурируют производные полей смещений и напряжений. Дуга интегрирования имеет концы на берегах трещины и охватывает ее вершину вместе с концевой зоной. По значениям интегралов восстанавливаются параметры концевой зоны — ее длина, интенсивность сил сцепления (классические интегралы $J_1 = J$ и $J_7 = M$ связываются только с энергетическими характеристиками). Описывается подход к вычислению инвариантных интегралов, основанный на их общих свойствах и устраняющий громоздкие выкладки.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — плоское изотропное тело с трещинами, берега которых включены в границу $\partial\Omega$. Зафиксируем какую-либо (прямолинейную) трещину M и свяжем с ней систему декартовых координат так, чтобы

$$M = \{x : x_2 = 0, \quad x_1 \in (-a, 0)\}. \quad (1.1)$$

Пусть Ξ — окрестность точки $x = 0$, Γ — простой контур, соединяющий внутри $\Xi \setminus M$ берега M^+ и M^- трещины (1.1), в Ξ отсутствуют массовые силы, берега трещины свободны от напряжений, но в соответствии с моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла [1, 2] в устье $M_l = \{x \in M : x_1 \geq -l\}$ действуют силы сцепления интенсивностью q , причем $M_l \subset \Xi$. Иными словами, вектор смещений $u = (u_1, u_2)$ удовлетворяет соотношениям

$$L(\nabla)u(x) \equiv \mu \nabla \cdot \nabla u(x) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u(x) = 0, \quad x \in \Xi \setminus M; \quad (1.2)$$

$$\sigma_{12}(u; x) = 0, \quad x \in M^\pm \cap \Xi; \quad (1.3)$$

$$\sigma_{22}(u; x) = 0, \quad x \in M^\pm \cap \Xi, \quad x_1 < -l; \quad (1.4)$$

$$\sigma_{22}(u; x) = q, \quad x \in M^\pm \cap \Xi, \quad x_1 > -l. \quad (1.5)$$

Здесь $\nabla = \text{grad}$; точкой обозначено скалярное произведение (т. е. $\nabla \cdot \nabla = \Delta$ — оператор Лапласа и $\nabla \cdot = \text{div}$); λ и μ — коэффициенты Ламе; $\sigma_{ij}(u)$ — декартовы компоненты тензора напряжений $\sigma(u)$:

$$\sigma_{ij}(u) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{i,j} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (1.6)$$

Как обычно, длина $l > 0$ зоны действия сил сцепления устанавливается (автоматически, в согласии с постулатами рассматриваемой модели) такой, что напряжения (1.6) остаются ограниченными вплоть до вершины трещины, т. е. аннулируются коэффициенты интенсивности напряжений. Устье трещины мало ($l \ll a$), и далее считается, что концы дуги Γ не попадают на M_l .

Цель данной работы — определение всевозможных характеристик устья трещины по значениям различных инвариантных интегралов, вычисленных на контуре Γ , удаленном от вершины O , по решению задачи (1.2)–(1.5).

2. Инвариантные интегралы первого порядка. В [3, 4] был предложен не зависящий от пути интеграл

$$J_1(u; \Gamma) = \int_{\Gamma} \left[W(u; x) \cos(n, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) \right] ds, \quad (2.1)$$

в котором ds — элемент длины дуги; $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор нормали (внешний по отношению к области, ограничиваемой Γ), а $n_1 = \cos(n, x_1)$ — его направляющий косинус; $\sigma^{(n)}$ — вектор нормальных напряжений с компонентами $\sigma_i^{(n)} = n_1 \sigma_{1i} + n_2 \sigma_{2i}$; $W(u)$ — плотность интеграла упругой энергии; $W(u; x) = W(u, u; x)$;

$$W(u, v; x) = \frac{1}{2\mu} \sum_{i,j=1}^2 \left[\sigma_{ij}(u; x) \sigma_{ij}(v; x) - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{ii}(u; x) \sigma_{jj}(v; x) \right]. \quad (2.2)$$

В [5, 6] предложен еще один инвариантный интеграл

$$J_r(u; \Gamma) = \int_{\Gamma} \left\{ W(u; x) x \cdot n(x) - \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) \right\} ds. \quad (2.3)$$

Известно, что (при выполнении уравнения (1.2) и краевых условий (1.3), (1.4) вблизи Γ) интегралы (2.1) и (2.3) совпадают соответственно с интегралами

$$I_1(u; \Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ u(x) \cdot \sigma^{(n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}; x \right) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) \right\} ds; \quad (2.4)$$

$$I_r(u; \Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ u(x) \cdot \sigma^{(n)}(Du; x) - Du(x) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) \right\} ds. \quad (2.5)$$

В (2.5) D — скалярный дифференциальный оператор:

$$D = x \cdot \nabla = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2.6)$$

Подчеркнем, что при названных условиях инвариантность интегралов (2.4) и (2.5) сомнений не вызывает — достаточно вспомнить тождество Бетти (формулу Грина) и заметить, что в силу (1.2)–(1.4)

$$L(\nabla) \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \text{ на } \Xi \setminus M, \quad \sigma_{i2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \text{ на } (M^{\pm} \setminus M_i^{\pm}) \cap \Xi, \\ L(\nabla) Du = (D + 2) L(\nabla) u \text{ на } \Xi \setminus M, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{i2}(Du) = (D + 1) \sigma_{i2}(u) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 1 \right) \sigma_{i2}(u) \text{ на } (M^{\pm} \setminus M_i^{\pm}) \cap \Xi, \quad i = 1, 2.$$

Для интегралов (2.1) и (2.4) упомянутый факт проверен, например, в [7] и [8, § 7.3]. Не имея точной ссылки, установим здесь совпадение интегралов (2.2) и (2.5). Пусть χ — срезающая функция, гладкая в $\Xi \setminus M$, равная единице вблизи Γ и заведомо аннулирующаяся там, где нарушаются соотношения (1.2)–(1.4), Π — область, лежащая внутри Γ и ограниченная дугой Γ , другой подобной дугой Γ' (на ней $\chi = 0$) и отрезками m^{\pm} берегов M^{\pm} ; положим $m = m^+ \cup m^-$. Несколько раз интегрируя по частям, получим

$$2I_r(u; \Gamma) = 2I_r(\chi u; \Gamma) = \int_{\Pi} \{ \chi u \cdot LD(\chi u) - D(\chi u) \cdot L(\chi u) \} dx -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_m \left\{ \chi u \cdot \sigma^{(n)}(D(\chi u)) - D(\chi u) \cdot \sigma^{(n)}(\chi u) \right\} ds = \int_{\Pi} \left\{ \chi u \cdot (D+2)L(\chi u) - D(\chi u) \cdot L(\chi u) \right\} dx - \\
 & - \int_m \left\{ \chi u \cdot \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 1 \right) \sigma^{(n)}(\chi u) - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\chi u) \cdot \sigma^{(n)}(\chi u) \right\} dx_1 = \\
 & = -2 \int_{\Pi} D(\chi u) \cdot L(\chi u) dx + 2 \int_m x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\chi u) \cdot \sigma^{(n)}(\chi u) dx_1 = \\
 & = 4 \int_{\Pi} W(D(\chi u), \chi u) dx - 2 \int_{\Gamma} Du \cdot \sigma^{(n)}(u) ds = 2 \int_{\Pi} (D+2)W(\chi u, \chi u) dx - 2 \int_{\Gamma} Du \cdot \sigma^{(n)}(u) ds = \\
 & = 2 \int_{\Gamma} (x \cdot n) W(u, u) dx - 2 \int_{\Gamma} Du \cdot \sigma^{(n)}(u) ds = 2J_r(u; \Gamma). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

В этих преобразованиях были учтены равенства (2.7) и то, что $L(\chi u) = 0$ на $\Gamma \cup \Gamma'$ и $\sigma^{(n)}(\chi u) = 0$ на концах отрезков m^{\pm} . Кроме того, применялось соотношение $x \cdot n = 0$ на m , означающее, что при «переброске» D интегралов по берегам M^{\pm} не возникает.

Вычислим интегралы (2.1), (2.4). Замкнем дугу Γ отрезками γ^+ и γ^- берегов трещины, оканчивающимися в вершине $x = 0$. Так как в вершине напряжения не имеют сингулярностей, ввиду инвариантности интегралов имеем

$$\begin{aligned}
 J_1(u; \Gamma) &= I_1(u; \Gamma) = -I_1(u; \gamma^+) - I_1(u; \gamma^-) = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \left\{ u(x) \cdot \sigma^{(n)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}; x\right) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) \right\} dx. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

При замыкании дуги Γ считаем, что на новой части контура направление нормали наследуется — именно поэтому после второго знака равенства в (2.9) появился минус. Мы придерживаемся этого соглашения на протяжении всей статьи.

На первый взгляд кажется, что в силу (1.3)–(1.5) уменьшаемое в фигурных скобках в (2.9) исчезает и правая часть (2.9) совпадает с

$$\frac{1}{2} \sum_{\pm} \mp \int_{-l}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) q dx_1 = \frac{q}{2} [u_2(-l, +0) - u_2(-l, -0)].$$

Однако это неверно, поскольку из-за скачка функции $x_1 \mapsto \sigma_{22}(\partial u / \partial x_1; x_1, \pm 0)$ в точке $x_1 = -l$ величина $\sigma_{22}(\partial u / \partial x_1; x_1, \pm 0)$ включает в себя обобщенную функцию $q\delta(x_1 + l)$, пропорциональную δ -функции Дирака. В результате при учете пропущенного сингулярного члена находим

$$J_1(u; \Gamma) = I_1(u; \Gamma) = q[u_2(-l, +0) - u_2(-l, -0)]. \tag{2.10}$$

Из тех же соображений и равенств (2.7) получим следующую цепочку соотношений для интегралов (2.3), (2.5):

$$\begin{aligned}
 J_r(u; \Gamma) &= I_r(u; \Gamma) = -I_r(u; \gamma^+) - I_r(u; \gamma^-) = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \left\{ u(x) \cdot (D+1)\sigma^{(n)}(u; x) - Du(x) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) \right\} ds =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \pm q \left\{ u_2(-l, \pm 0) l + \int_{-l}^0 \left[u_2(x_1, \pm 0) - x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) \right] dx_1 \right\} = \\
&= -\sum_{\pm} \pm q \left\{ u_2(-l, \pm 0) l + \int_{-l}^0 u_2(x_1, \pm 0) dx_1 \right\}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

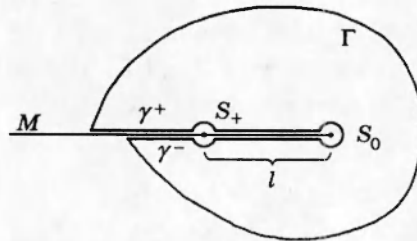
Строгое доказательство формул (2.10) и (2.11), основанное на анализе полей смещений вблизи точек $Q^{\pm} = (-l, \pm 0)$, дается в п. 3.

Величина (2.10) совпадает со скоростью s высвобождения энергии при смещении края устья за счет подрастания трещины или уменьшения нагрузки (см., например, [9]). Сумма последних интегралов по $x_1 \in (-l, 0)$ из (2.11) является работой $A(u)$ сил сцепления на смещениях u . Все это вполне соответствует общей концепции толкования инвариантных интегралов (см. [3–6] и др.; вероятнее всего, формулы (2.10), (2.11) известны, но точных ссылок автор не знает). Однако, помимо $A(u)$, в (2.11) присутствует слагаемое $-ls$ (ср. с (2.10)), которое при желании можно интерпретировать как энергию, затраченную на образование устья. Таким образом,

$$A(u) = J_r(u; \Gamma) + lJ_1(u; \Gamma). \quad (2.12)$$

Равенство (2.12) подчеркивает необходимость вычисления параметра l .

3. Асимптотические представления смещений вблизи Q^{\pm} . В п. 2 мы несколько вольно обращались с обобщенными функциями, сосредоточенными в Q^{\pm} . С целью придать нашим действиям необходимую строгость сначала выясним асимптотику решения u около Q^{\pm} , а затем заменим интегрирование по отрезкам γ^{\pm} интегрированием по составным дугам γ_{δ}^{\pm} , изображенным на рисунке, и найдем предел при $\delta \rightarrow +0$ (в этом разделе окружность с центром 0 не востребована; см. далее комментарий к (5.5)).



Пусть $y = (y_1, y_2)$ и (ρ, θ) — декартовы и полярные координаты с центром Q^+ ,

$$y_1 = x_1 + l = \rho \cos \theta, \quad y_2 = x_2 = \rho \sin \theta. \quad (3.1)$$

Рассмотрим поле смещений w с компонентами

$$\begin{aligned}
w_1(y) &= (4\mu\pi)^{-1} q \{ (1 - \varkappa) y_1 \theta - (1 + \varkappa) y_2 \ln \rho - y_2 - 2\pi y_1 \}, \\
w_2(y) &= (4\mu\pi)^{-1} q \{ (1 - \varkappa) y_2 \theta + (1 + \varkappa) y_1 \ln \rho - y_1 + 2\pi y_2 \} \\
(\varkappa = 3 - 4\nu = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1}, \quad \nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1}).
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$\sigma_{12}(w; y_1, +0) = 0, \quad y_1 \in (-\infty, +\infty); \quad \sigma_{22}(w; y_1, +0) = \begin{cases} 0, & y_1 \in (-\infty, 0), \\ q, & y_1 \in (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3)$$

Поэтому при помощи поля w из (3.2) можно компенсировать скачок правой части в краевых

условиях (1.4), (1.5), а разность $R = u - w$ оказывается гладкой вблизи Q^+ и раскладывается в ряд Тейлора:

$$R(y) = u(x) - w(y) = R^0(y) + R^1(y) + R^2(y) + O(\rho^3), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Здесь R^k — векторный полином, удовлетворяющий однородной системе Ламе и условиям $\sigma_{i2}(R^k; y_1, 0) = 0$, $i = 1, 2$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \partial_1 w_1(y) &= (4\mu\pi)^{-1} q \{ (1 - \varkappa) \theta - 2y_1 y_2 \rho^{-2} - 2\pi \}, \\ \partial_1 w_2(y) &= (4\mu\pi)^{-1} q \{ (1 + \varkappa) \ln \rho - 2y_2^2 \rho^{-2} + \varkappa \}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, поле $\partial_1 w$ лишь жестким поступательным смещением отличается от классического решения задачи о нагружении полуплоскости нормальной сосредоточенной силой (см., например, [10, § 10.9]).

Теперь рассмотрим интеграл по полуокружности радиусом δ , возникающий при интегрировании вдоль γ_δ^+ :

$$A(X, Y) = \delta \int_0^\pi \left\{ Y(y) \cdot \sigma^{(\rho)}(X; y) - X(y) \cdot \sigma^{(\rho)}(Y; y) \right\} \Big|_{\rho=\delta} d\theta; \quad (3.6)$$

$$\sigma_i^{(\rho)}(X) = \sigma_{i1}(X) \cos \theta + \sigma_{i2}(X) \sin \theta, \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Пусть $X = \partial_1 w$ и $Y = e^1$ или $Y = e^2$, где e^i — орт оси x_i . Подставляя в (3.6) напряжения, вычисленные в соответствии с (1.6), (3.7) и (3.5), находим

$$A(\partial_1 w, e^2) = q, \quad A(\partial_1 w, e^1) = 0. \quad (3.8)$$

Равенства (3.8) подтверждают факт, отмеченный после (3.5).

Все выкладки годятся и для точки Q^- . Поэтому, пользуясь инвариантностью (2.1) и (2.4), переходим к интегрированию по γ_δ^\pm (обращаем внимание на необходимость следить за направлением нормали) и устремляем затем δ к нулю. В результате получим равенства (2.10). Те же соображения обосновывают формальные преобразования (2.11) (см. также п. 4, где указываются приемы, облегчающие вычисления).

4. Уточнение асимптотических формул. В Ξ по полю смещений u построим два других поля:

$$U(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \quad V(x) = Du(x) - u(x). \quad (4.1)$$

В силу (1.2)–(1.5) и (2.7) U и V удовлетворяют однородной системе (1.2), а напряжения $\sigma_{i2}(U)$ и $\sigma_{i2}(V)$ аннулируются на M^\pm всюду, кроме, быть может, точек Q^\pm . Как и ранее, ограничимся рассмотрением верхнего берега M^\pm . Асимптотическое представление для U вытекает непосредственно из (3.4):

$$U(x) = \partial_1 w(y) + \partial_1 R^1(y) + \partial_2 R^2(y) + O(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Для того чтобы написать аналогичную формулу для V , перейдем в (2.6) к координатам (3.1) и получим

$$D = x \cdot \nabla_x = -l\partial_1 + y \cdot \nabla_y = -l\partial_1 + D^{(l)}. \quad (4.3)$$

Ясно, что $D^{(l)}R_k = kR_k$. Кроме того, из (3.2) выводим

$$D^{(l)}w(y) = w(y) + \omega(y), \quad \omega(y) = Nq(y_1 e^2 - y_2 e^1), \quad N = (1 + \varkappa)/(4\pi\mu). \quad (4.4)$$

Итак, в силу (4.1), (4.3), (4.4) имеем

$$\begin{aligned} V(x) &= -l\partial_1 w(y) + T^0(y) + T^1(y) + O(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0, \\ T^0(y) &= -l\partial_1 R^1(y), \quad T^1(y) = -l\partial_1 R^2(y) + \omega(y) \end{aligned} \quad (4.5)$$

(T^k) — векторный полином степени k .

Формулы, подобные (4.2), (4.4) и (4.5), могут быть написаны и для $x_2 < 0$, но полиномы R^k и T^k окажутся, вообще говоря, другими. Во избежание громоздких обозначений не снабжаем R^k , T^k и w индексами \pm , различающими берега трещины. Вместо этого будем писать $R^k(x_1, \pm 0)$, выделяя следы полиномов на M^\pm (иными словами, под R^k и T^k подразумеваются кусочно-полиномиальные вектор-функции).

Вычислим интегралы $J_1(U; \Gamma)$, $J_1(V; \Gamma)$ и т. п., которые в соответствии с [11] назовем инвариантными интегралами высших порядков (в них фигурируют производные поля u). С целью упростить выкладки укажем несколько свойств формы A из (3.6); при этом всюду считается, что X и Y — решения однородной задачи в полуплоскости (w не является таковым, а $\partial_1 w$ и R^k , T^k подходят). Во-первых, форма A антисимметрическая, т. е.

$$A(X, Y) = -A(Y, X). \quad (4.6)$$

Во-вторых, в силу формулы Бетти выражение (3.6) не зависит от ρ . В-третьих, если $X(y) = \rho^\tau \Phi(\theta, \ln \rho)$, $Y(y) = \rho^\varkappa \Psi(\theta, \ln \rho)$ (зависимость от θ гладкая, от $\ln \rho$ полиномиальная, $\tau, \varkappa \in \mathbb{R}$), то $A(X, Y)$ может отличаться от нуля лишь в случае $\tau + \varkappa = -1$ (это заключение получается предельным переходом $\delta \rightarrow +0$ или $\delta \rightarrow +\infty$ в случаях $\tau + \varkappa > -1$ и $\tau + \varkappa < -1$ соответственно). В-четвертых,

$$A(\partial_1 X, Y) = -A(X, \partial_1 Y). \quad (4.7)$$

Формула (4.7) установлена в [7] (см. также [8, § 7.4]); она получается «переброской» производной $\partial_1 = \partial/\partial y_1$ после перехода к двумерному интегралу (ср. с (2.8)).

Укажем асимптотику полей u и U , V около вершины трещины. Пусть (r, φ) — полярные координаты, $r = |x|$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Поскольку используется модель Леонова — Панасюка — Дагдейла, то коэффициенты интенсивности напряжений равны нулю и

$$u(x) = \Lambda(x) + r^{3/2} \{k_1 \Phi^{3,1}(\varphi) + k_2 \Phi^{3,2}(\varphi)\} + O(r^2). \quad (4.8)$$

При этом

$$U(x) = \partial_1 \Lambda(0) + (3/2)r^{1/2} \{k_1 \Phi^{1,1}(\varphi) + k_2 \Phi^{1,2}(\varphi)\} + O(r^1); \quad (4.9)$$

$$V(x) = -\Lambda(0) + (1/2)r^{3/2} \{k_1 \Phi^{3,1}(\varphi) + k_2 \Phi^{3,2}(\varphi)\} + O(r^2). \quad (4.10)$$

Здесь Λ — линейная функция; k_1 и k_2 — коэффициенты при младших сингулярностях решения; $\Phi^{m,j}$ — векторы со следующими полярными компонентами:

$$\Phi_r^{m,1}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \left\{ (m-2) \cos \frac{1}{2}(m+2)\varphi + (2\varkappa - m) \cos \frac{1}{2}(2-m)\varphi \right\},$$

$$\Phi_\varphi^{m,1}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \left\{ (-m+2) \sin \frac{1}{2}(m+2)\varphi - (2\varkappa + m) \sin \frac{1}{2}(2-m)\varphi \right\};$$

$$\Phi_r^{m,2}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \left\{ (m+2) \sin \frac{1}{2}(m+2)\varphi - (2\varkappa - m) \sin \frac{1}{2}(2-m)\varphi \right\},$$

$$\Phi_\varphi^{m,2}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \left\{ (m+2) \cos \frac{1}{2}(m+2)\varphi - (2\varkappa + m) \cos \frac{1}{2}(2-m)\varphi \right\}.$$

Отметим, что (4.9), (4.10) получаются из (4.8) простым дифференцированием. Второе слагаемое в (4.9) такое же, как у трещины с полностью свободными берегами, т. е. $3k_1/2$ и $3k_2/2$ — коэффициенты интенсивности напряжений, порожденных полем смещений U . Отметим, что рассматриваемая модель относится к теории трещин нормального разрыва, в которой $k_2 = 0$, однако присутствие второго слагаемого в фигурных скобках не приносит дополнительных осложнений, и для общности (мнимой) оставляем k_2 .

5. Инвариантные интегралы высших порядков. Вычислим интеграл $J_1(U; \Gamma)$, для которого ввиду сингулярности напряжений $\sigma_{ij}(U)$ вершина трещины требует отдельной обработки. Впрочем, результат известен (см. [3, 4] и др.): интеграл $J_1(U; \cdot)$, вычисленный по разомкнутой окружности $S_0 = \{x : r = \delta, \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, равен

$$\frac{1 + \varkappa}{4\mu} \left[\left(\frac{3}{2} k_1 \right)^2 + \left(\frac{3}{2} k_2 \right)^2 \right] = \frac{9}{16} \frac{1 + \varkappa}{\mu} (k_1^2 + k_2^2). \quad (5.1)$$

Найдем интегралы по полуокружностям $S_{\pm} = \{x : \rho = \delta, \pm\theta \in (0, \pi)\}$; для определенности рассматриваем верхнюю. Согласно (2.4), (3.6) и (4.2),

$$\begin{aligned} -2J_1(U; S_+) &= 2I_1(U; S_+) = A(\partial_1 U, U) = \\ &= A(\partial_1^2 w + \partial_1^2 R^2, \partial_1 w + \partial_1 R^1 + \partial_1 R^2) + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Благодаря второму свойству формы A остаток $O(\delta)$ можно не писать. Определяя порядки однородностей вектор-функций, фигурирующих справа в (5.2), и применяя третье свойство, исключим «лишние» члены и при помощи (4.6), (4.7) получим

$$-2J_1(U; S_+) = A(\partial_1^2 w, \partial_1 R^2) - A(\partial_1 w, \partial_1^2 R^2) = -2A(\partial_1 w, \partial_1^2 R^2). \quad (5.3)$$

Поскольку R^2 — квадратичный полином, то при учете (3.8)

$$A(\partial_1 w, \partial_1^2 R^2) = -q \partial_1^2 R_2^2(-l, +0). \quad (5.4)$$

Итак, заменяя интегрирование по Γ интегрированием по дугам S_{\pm} , S_0 и по соединяющим их концам отрезкам берегов трещины (на этих участках интеграл $J_1(U; \cdot)$ аннулируется), согласно (5.1), (5.3), (5.4), имеем

$$J_1(U; \Gamma) = \frac{9}{4} \pi N (k_1^2 + k_2^2) - q \mathbf{R}; \quad (5.5)$$

$$\mathbf{R} = \partial_1^2 R_2^2(-l, +0) - \partial_1^2 R_2^2(-l, -0). \quad (5.6)$$

Вклад вершины трещины в остальные три интеграла, рассматриваемые здесь, нулевой (поскольку соответствующие подынтегральные выражения остаются ограниченными при $r \rightarrow 0$). Верны формулы

$$J_1(V; \Gamma) = -2lNq^2 + l^2q\mathbf{R}; \quad (5.7)$$

$$J_r(U; \Gamma) = Nq^2 - lq\mathbf{R}; \quad (5.8)$$

$$J_r(V; \Gamma) = 3l^2Nq^2 - l^3q\mathbf{R}. \quad (5.9)$$

Укажем выкладки, приводящие к этим ответам. Действуя аналогично предыдущему и обращаясь к (4.5), (4.4), получим в случае $J_1(V; \Gamma)$ следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} -2J_1(V; S_+) &= A(-l\partial_1^2 w + \partial_1 T^1, -l\partial_1 w + T^0 + T^1) + O(\delta) = \\ &= -lA(\partial_1^2 w, T^1) - lA(\partial_1 T^1, \partial_1 w) = 2lA(\partial_1 w, \partial_1 T^1) = \\ &= 2lq\partial_1 T_2^1(-l, +0) = -2l^2q\partial_1^2 R_2^2(-l, +0) + 2lNq^2. \end{aligned}$$

Вычислим еще два интеграла. Заметим, что в силу (3.5), (4.3) $D^{(l)}\partial_1 w(y) = Nqe^2$. Теперь, принимая во внимание (3.8), (4.3), а также (4.2) или (4.5), имеем

$$\begin{aligned} -2J_r(U; S_+) &= A(-l\partial_1^2 w - l\partial_1^2 R^2 + D^{(l)}\partial_1 w + \partial_1 R^2, \partial_1 w + \partial_1 R^1 + \partial_1 R^2) + O(\delta) = \\ &= -lA(\partial_1^2 w, \partial_1 R^2) - lA(\partial_1^2 R^2, \partial_1 w) + A(D^{(l)}\partial_1 w, \partial_1 w) = \\ &= 2lA(\partial_1 w, \partial_1^2 R^2) - NqA(\partial_1 w, e^2) = 2lq\partial_1^2 R_2^2(-l, +0) - Nq^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2J_r(V; S_+) &= A(l^2\partial_1^2 w - l\partial_1 T^1 - lD^{(l)}\partial_1 w + T^1, -l\partial_1 w + T^0 + T^1) + O(\delta) = \\ &= l^2A(\partial_1^2 w, T^1) + l^2A(\partial_1 T^1, \partial_1 w) + l^2NqA(e^2, \partial_1 w) = \\ &= -2l^2A(\partial_1 w, \partial_1 T^1) - l^2Nq^2 = 2l^3\partial_1^2 R_2^2(-l, +0) - 3l^2Nq^2. \end{aligned}$$

Здесь неоднократно применялись свойства формы (3.6), перечисленные в п. 4. Осталось повторить преобразования для нижней полуокружности S_- и совершить обычные действия по замене пути интегрирования.

6. Определение характеристик устья трещины. Пользуясь (5.7)–(5.9), составим квадратное уравнение для нахождения длины:

$$l^2 J_r(U; \Gamma) + 2lJ_1(V; \Gamma) + J_r(V; \Gamma) = 0. \quad (6.1)$$

После определения l из (6.1) интенсивность сил сцепления выражается, например, равенством

$$q = l^{-1} \{ N^{-1} [J_r(V; \Gamma) + lJ_1(V; \Gamma)] \}^{1/2}. \quad (6.2)$$

Теперь формулы (2.10) и (6.2) доставляют раскрытие $u_2(-l, +0) - u_2(-l, -0)$ устья трещины. Кроме того, легко найти и работу (2.12) сил сцепления. Отметим, что в соответствии с (4.3)

$$J_r(u; \Gamma) + lJ_1(u; \Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ u \cdot \sigma^{(n)}(D^{(l)}u) - D^{(l)}u \cdot \sigma^{(n)}(u) \} ds, \quad (6.3)$$

т. е. сумма (6.3) есть инвариантный интеграл (2.2) (или (2.5)), сосчитанный в системе координат y , связанной с концом устья трещины (избежать определения l не удастся). Подобная (6.3) комбинация фигурирует и в (6.2).

Употребляя одно из равенств (5.7)–(5.9), можно найти разность (5.6), а затем при помощи (5.5) — сумму квадратов коэффициентов k_i из (4.8). Однако автор не знает физического истолкования этих величин как характеристик устья трещины. В равной мере сказанное относится и к коэффициентам при младших членах разложений (4.8), и к скачкам полиномов R^3, R^4, \dots из формулы Тейлора (3.4) — все они отыскиваются посредством интегрирования дифференцирований $\partial_1 = \partial_1 / \partial x_1$ и $D = x \cdot \nabla$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01069).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
2. **Dugdale D. S.** Yielding of sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V. 8, N 2. P. 100–104.

3. **Черепанов Г. П.** Распространение трещин в сплошной среде // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. С. 476–488.
4. **Rice J. R.** A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. 1968. V. 35, N 2. P. 379–386.
5. **Knowles J. K., Sternberg E.** On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 44, N 3. P. 187–211.
6. **Budiansky B., Rice J. R.** Conservation laws and energy-release rates // J. Appl. Mech. 1973. V. 40, N 1. P. 210–211.
7. **Назаров С. А.** Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Т. 1. С. 17–31.
8. **Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.** Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
9. **Назаров С. А., Ромашев Ю. А.** Энергетический баланс и устойчивость развития трещин в рамках деформационного критерия разрушения // Физико-химическая механика материалов. 1988. № 6. С. 44–49.
10. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
11. **Назаров С. А., Полякова О. Р.** Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 104–119.

*Поступила в редакцию 11/VII 1995 г.,
в окончательном варианте — 19/III 1996 г.*
