ПМТФ, № 3, 1966

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

Л. Д. Иванов

(Мелекесс)

Рассмотрен один из вариантов доказательства теоремы о полноте собственных функций в интервалах изменения угловой переменной (— 1.1) и (0.1). Полученные результаты могут быть использованы при определении критического размера плоского реактора и при решении задачи Милна в многогрупповом приближении.

Вопрос о полноте собственных функций системы многогрупповых уравнений переноса обсуждался в работах [1,2]. Однако способ регуляризации системы сингулярных интегральных уравнений, использованный при доказательстве теоремы, слишком сложен. Ниже излагается более простое доказательство полноты.

1. Собственные функции и собственные значения. При изложении этого раздела будем следовать результатам работы [3]. Одной из основных задач теории переноса является нахождение пространственно-энергетического распределения нейтронов, которое приближенно описывается системой линеаризованных уравнений Больцмана в предположении ступенчатой зависимости полного макроскопического сечения взаимодействия от энергии.

Систему многогрупповых уравнений переноса запишем в форме

$$\mu \frac{\partial \varphi_i(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_i \varphi_i(x, \mu) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_{-1}^{+1} \varphi_j(x, \mu')\, d\mu' \qquad (i-1, \ldots, N) \tag{1.1}$$

Здесь σ_i — полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтрона с веществом, μ — проекция единичного вектора скорости нейтрона на ось x

$$C_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma^{j \to i} + \nu_f \sigma_f^{\,j} \alpha^i)$$

$\sigma^{j \to i} \nu_f$, $\sigma_f^{\,j}$, α^i — сечение неупругого и упругого рассеяния, число вторичных нейтронов, сечение деления в группе и спектр нейтронов деления.

Сделав замену переменных $t = \mu / \sigma_i$ и обозначив $\psi_i(x, t) = \sigma_i \varphi_i(x, t/\sigma_i)$, получим

$$t \frac{\partial \psi_i(x, t)}{\partial x} + \psi_i(x, t) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_{-\vartheta_j}^{\vartheta_j} \psi_j(x, t')\, dt' \qquad \left(\vartheta_j = \frac{1}{\sigma_j}\right) \tag{1.2}$$

Решение системы будем искать в виде

$$\psi_i(x, t) = \exp(-x/\nu)\, \Phi_i(\nu, t) \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.2), найдем

$$(\nu - t)\, \Phi_i(\nu, t) = \nu H_i(\nu), \qquad H_i(\nu) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \int_{-\vartheta_j}^{\vartheta_j} \Phi_j(\nu, t')\, dt' \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что

$$\Phi_i(\nu, t) = \frac{\nu H_i(\nu)}{\nu - t} + \lambda_i(\nu)\,\delta(\nu - t) \tag{1.5}$$

Пользуясь определением функций $H_i(\nu)$, отсюда получим

$$\sum_{j=1}^{N} [\delta_{ij} - \nu c_{ij} f_j(\nu)]\, H_j(\nu) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\lambda_j(\nu)\,\chi_j(\nu)$$

$$f_j(\nu) = \int_{-\vartheta_j}^{\vartheta_j} \frac{dt}{\nu - t}, \qquad \chi_j(\nu) = \int_{-\vartheta_j}^{\vartheta_j} \delta(\nu - t)\, dt \tag{1.6}$$

$\chi_j(\nu) = 1$, если $\nu \in (-\vartheta_j, \vartheta_j)$; $\chi_j(\nu) = 0$, если $\nu \notin (-\vartheta_j, \vartheta_j)$

Если $\nu \notin -\vartheta_0, \vartheta_0$, где $\vartheta_0 = 1 / \sigma_0$, $\sigma_0 = \min(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, то правая часть в выражении (1.6) обращается в нуль.

Из условия разрешимости системы

$$\sum_{j=1}^{N} [\delta_{ij} - \nu c_{ij} f_j(\nu)]\, H_j(\nu) = 0 \tag{1.7}$$

получим характеристическое уравнение

$$\Omega(\nu) \equiv \det\, [\delta_{ij} - \nu c_{ij}\, f_j(\nu)] = 0 \tag{1.8}$$

для определения собственных значений ν_s. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\Phi_i(\nu_s, t) = \frac{\nu_s H_i(\nu_s)}{\nu_s - t} \tag{1.9}$$

Полное число корней характеристического уравнения может быть вычислено при помощи принципа аргумента

$$2M = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\ln\Omega(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\Omega^+(\vartheta_0)}{\Omega^-(\vartheta_0)} - \ln\frac{\Omega^+(-\vartheta_0)}{\Omega^-(-\vartheta_0)}\right] \tag{1.10}$$

Здесь $\Omega^{\pm}(\nu)$ – предельные значения кусочно-голоморфной функции $\Omega(z)$; контур C охватывает разрез вдоль действительной оси $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$. Сплошной спектр собственных значений расположен в интервале $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$. Соответствующие собственные функции даются выражением (1.5). Покажем, что собственные функции (1.5) и (1.9) образуют полную систему.

2. Теорема 2.1. Система произвольных функций $F_i(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера при $|t| \leqslant 1 / \sigma_0 = \vartheta_0$, однозначно может быть представлена в форме

$$F_i(t) = \sum_{s=1}^{2M} A_s \Phi_i(\nu_s, t) + \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{\nu H_i(\nu)\, d\nu}{\nu - t} + \lambda_i(t) \qquad (t \in (-\vartheta_0, \vartheta_0)) \tag{2.1}$$

Другими словами, система сингулярных интегральных уравнений (2.1) позволяет единственным образом определить $2M$ постоянных A_s и N функций $H_i(\nu)$.

Доказательство. Исключая $\lambda_i(t)$ при помощи соотношения (1.7), получим

$$\sum_{j=1}^{N}[\delta_{ij}-\nu c_{ij}f_j(\nu)]H_j(\nu)+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\chi_j(\nu)\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\frac{\nu' H_j(\nu')\,d\nu'}{\nu'-\nu}=\nu\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\chi_j(\nu)F_j'(\nu) \qquad (2.2)$$

$$\left(F_j'(\nu)=F_j(\nu)-\sum_{s=1}^{2M}A_s\Phi_i(\nu_s,\nu)\right)$$

Рассмотрим функцию

$$N_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\frac{\nu H_j(\nu)\,d\nu}{\nu-z} \qquad \left(\vartheta_0=\frac{1}{\sigma_0}\right)$$

Эта функция аналитическая в плоскости с разрезом вдоль действительной оси от $-\vartheta_0$ до ϑ_0, исчезает на бесконечности; ее предельные значения определяются формулой Племеля — Сохоцкого

$$N_j^{\pm}(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\frac{\nu' H_j(\nu')\,d\nu'}{\nu'-\nu}\pm\frac{1}{2}\nu H_j(\nu)$$

Отсюда следует, что

$$N_j^{+}(\nu)-N_j^{-}(\nu)=\nu H_j(\nu)$$

$$N_j^{+}(\nu)+N_j^{-}(\nu)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\frac{\nu' H_j(\nu')\,d\nu'}{\nu'-\nu} \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.2) в (2.3), приходим к граничной задаче

$$\sum_{j=1}^{N}[\Omega_{ij}^{+}(\nu)N_j^{+}(\nu)-\Omega_{ij}^{-}(\nu)N_j^{-}(\nu)]=\nu\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\chi_j(\nu)F_j'(\nu) \qquad (2.4)$$

Отсюда по формуле Племеля — Сохоцкого получим

$$\sum_{j=1}^{N}\Omega_{ij}(z)N_j(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\frac{\nu\chi_j(\nu)F_j'(\nu)\,d\nu}{\nu-z}+P_i^{(k)}(z) \qquad (2.5)$$

Здесь $P_i^{(k)}(z)$ — произвольный полином. Так как $\lim\Omega_{ij}(z)=\mathrm{const}$ при $z\to\infty$, то исчезающие на бесконечности функции $N_j(z)$ будут решением системы (2.5) при $P_i^{(k)}(z)=0$. Решение системы существует, если

$$\sum_{i,\,j=1}^{N}c_{ij}H_i^{\circ}(\nu_l)\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\frac{\nu\chi_j(\nu)F_j'(\nu)\,d\nu}{\nu-\nu_l}=0 \qquad (l=1,2,3,\ldots,2M) \qquad (2.6)$$

Здесь $\overset{\circ}{H}_i(\nu_l)$ — решения однородной системы, союзной с (2.5). Из системы (2.6) определяются $2M$ постоянных A_s. Функции $\lambda_i(t)$ могут быть найдены при помощи соотношения (1.7). Теорема доказана.

Фукс и Коллатц [3], а затем Желязны [4] показали, что проблемы определения критического размера и альбедо плоского слоя сводятся к граничной задаче типа (2.4).

При решении задачи Милна ситуация меняется. В этом случае граничные функции распределения $F_i(t)$ заданы в интервале $(0, \vartheta_0)$, и при решении граничной задачи (2.4) нельзя воспользоваться формулой Племеля — Сохоцкого, так как функции $N_j(z)$ и матричные элементы $\Omega_{ij}(z)$ будут аналитичны в разных областях. Поэтому необходимо рассматривать задачу сопряжения

$$N_k^+(\nu) - \sum_{j=1}^{N} G_{kj} N_j^-(\nu) = g_k(\nu)$$

$$G_{kj}(\nu) = \sum_{i=1}^{N} [\Omega_{ki}^{-1}(\nu)]^+ \Omega_{ij}^-(\nu), \quad g_k(\nu) = \sum_{i,\, j=1}^{N} [\Omega_{ki}^{-1}(\nu)]^+ c_{ij}\chi_j(\nu) F_j'(\nu)$$

Однако пока неизвестен эффективный способ ее решения.

Если рассматривать замедление быстрых нейтронов на легких и средних ядрах, то матрицы (c_{ij}) и (Ω_{ij}) будут треугольными. В этом случае задача сопряжения может быть решена довольно просто.

3. Теорема 3.1. Система произвольных функций $F_i(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера при $0 \leqslant t \leqslant 1 / \sigma_0 = \vartheta_0$, однозначно может быть представлена в форме

$$F_i(t) = \sum_{s=1}^{M} A_s \Phi_i(\nu_s, t) + \int_0^{\vartheta_0} \frac{\nu H_i(\nu)}{\nu - t} d\nu + \lambda_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{3.1}$$

Доказательство. Повторяя предыдущие рассуждения, сведем (3.1) к граничной задаче

$$N_i^+(\nu)\, G_{ii}(\nu) - N_i^-(\nu) = \frac{\nu}{\Omega_{ii}^-(\nu)} \sum_{j=1}^{i} c_{ij}\chi_j(\nu) F_i'(\nu) \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{3.2}$$

$$G_{ii}(\nu) = \frac{\Omega_{ii}^+(\nu)}{\Omega_{ii}^-(\nu)}\, F_j', \qquad (\nu) = F_j(\nu) - \sum_{s=1}^{M} A_s \Phi_j(\nu_s, \nu) \tag{3.3}$$

Здесь $N_j^{\pm}(\nu)$ — предельные значения кусочно-голоморфной функции

$$N_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\vartheta_0} \frac{\nu H_j(\nu)\, d\nu}{\nu - z}, \qquad \lim_{z\to\infty} N_j(z) = 0 \tag{3.4}$$

Так как (c_{ij}) — треугольная матрица, то число корней характеристического уравнения (1.8) равно

$$2M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \left[\ln \frac{\Omega_{ij}^+(\vartheta_0)}{\Omega_{ij}^-(\vartheta_0)} - \ln \frac{\Omega_{ij}^+(-\vartheta_0)}{\Omega_{ij}^-(-\vartheta_0)} \right]$$

Отсюда, используя соотношение $\Omega_{ij}^{\pm}(-\nu) = \Omega_{ij}^{\mp}(\nu)$, получим

$$2M = \frac{1}{\pi i} \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} \ln \frac{\Omega_{ij}^+(\vartheta_0)}{\Omega_{ij}^-(\vartheta_0)} \qquad \left(\vartheta_0 = \frac{1}{\sigma_0}\right) \tag{3.5}$$

Индекс задачи сопряжения равен сумме частных индексов [5]

$$\varkappa = \sum_{m=1}^{N} \varkappa_m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i,\, m=1}^{N} \delta_{mi} \left[\ln \frac{\Omega_{im}^+(0)}{\Omega_{im}^-(0)} - \ln \frac{\Omega_{im}^+(\vartheta_0)}{\Omega_{im}^-(\vartheta_0)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i,\, m=1}^{N} \delta_{mi} \ln \frac{\Omega_{im}^+(\vartheta_0)}{\Omega_{im}^-(\vartheta_0)} = -M \tag{3.6}$$

Сравнивая (3.5) и (3.6), легко убедиться, что все частные индексы отрицательны. Поэтому исчезающее на бесконечности решение задачи (3.2) дается выражением

$$N_m(z) = \frac{1}{2\pi i X_{mm}(z)} \int\limits_0^{\vartheta_0} \frac{X_{mm}^-(\nu)}{\Omega_{mm}^-(\nu)} \Big\{ \nu \sum_{j=1}^{m} c_{mj}\chi_j(\nu) F_j'(\nu) - \sum_{j=1}^{m-1} [\Omega_{mj}^+(\nu) N_j^+(\nu) - \Omega_{mj}^-(\nu) N_j^-(\nu)] \Big\} \frac{d\nu}{\nu - z} \tag{3.7}$$

при условии

$$\int\limits_0^{\vartheta_0} \nu^{k_m} \frac{X_{mm}^-(\nu)}{\Omega_{mm}^-(\nu)} \Big\{ \nu \sum_{j=1}^{m} c_{mj}\chi_j(\nu) F_j'(\nu) - \sum_{j=1}^{m-1} [\Omega_{mj}^+(\nu) N_j^+(\nu) - \Omega_{mj}^-(\nu) N_j^-(\nu)] \Big\} d\nu = 0 \qquad (k_m = 0, 1, \ldots, \varkappa_m - 1) \tag{3.8}$$

Здесь $X_{mm}(z)$ — решение однородной задачи сопряжения

$$X_{mm}^+(\nu) = G_{mm}(\nu) X_{mm}^-(\nu)$$

Следовательно, общее число дополнительных условий, из которых определяются постоянные A_s, равно полному индексу задачи сопряжения.

Полагая $m = 1$, найдем функцию $N_1(z)$. Подставляя ее во второе уравнение системы (3.7), определим $N_2(z)$ и т. д.

При помощи соотношения (2.3) легко определить $H_i(\nu)$. Функции $\lambda_i(\nu)$ связаны с $H_i(\nu)$ соотношением (1.7).

Полученные результаты легко обобщаются на случай анизотропного рассеяния.

Автор благодарит С. М. Фейнберга за советы и внимание к работе.

Поступила 10 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Zelazny R., Kuszell A. Two-Group Neutron Transport Theory. Ann. Phys., 1961, vol. 16, p. 81.
2. Żelazny R., Kuszell A. Multi-Group Neutron Transport Theory. Phys. Fast. and Interm. Reactors II, 54 Vienna, 1962.
3. Fuchs K., Collatz S. On the Problem of the Energy-Dependet Isotropic Transsport Equation for a Plane Slab. Kernenergie 6/7, 386, 1964.
4. Żelazny R. Eigenfunction Expansion Method in Neutron Transport Theory. Nucleonika, 1964, vol. 7—8, p. 563.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.