УДК 532.516

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ СОСТАВНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ

В. Е. Епихин, Г. М. Сисоев, В. Я. Шкадов

(Москва)

Рассматривается стационарное осесимметричное течение закрученных капиллярных струй, состоящих из несмешивающихся жидкостей. Составные капиллярные струи находят применение в ряде технологических процессов. Примером может служить получение теплоизолирующей минеральной ваты центробежно-валковым способом, в котором формирующиеся струи расплава покрываются слоем клеящего вещества. Практическое применение течений составных струй обусловило их экспериментальное и теоретическое изучение [1, 2]. В данной работе для расчета течения на начальном участке формирования струи применяется численный метод коллокаций [3—6].

1. Вводится цилиндрическая система координат r, θ, z с осью z, направленной вдоль оси симметрии струи, и началом координат, расположенным в центре выходного отверстия. В качестве характерных величин выбираются радиус выходного отверстия R_* и скорость $U_* = Q/(\pi R_*^2)$ (Q — объемный расход струи). В приближении пограничного слоя стационарное осесимметричное течение струи описывается следующей системой уравнений и граничных условий [2, 3]:

(1.1) $$\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{V_i}{y} = 0, \quad i = 1, 2;$$

(1.2) $$U_i \frac{\partial U_i}{\partial x} + V_i \frac{\partial U_i}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Fr}} + \frac{\alpha_i}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_i}{\partial y} \right) + F_i, \quad i = 1, 2,$$

$$F_1 = \frac{1}{\mathrm{We}} \left(\frac{1}{H_1^2} \frac{dH_1}{dx} + \frac{\gamma}{H_2^2} \frac{dH_2}{dx} \right), \quad F_2 = \frac{\gamma}{\lambda \mathrm{We} H_2^2} \frac{dH_2}{dx};$$

(1.3) $$U_i \frac{\partial W_i}{\partial x} + V_i \frac{\partial W_i}{\partial y} + \frac{V_i W_i}{y} = \frac{\alpha_i}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial W_i}{\partial y} - \frac{W_i}{y^2} \right), \quad i = 1, 2;$$

(1.4) $$y = 0: \ \frac{\partial U_1}{\partial y} = V_1 = W_1 = 0;$$

(1.5) $$y = H_1: \ U_1 \frac{dH_1}{dx} = V_1, \ U_1 = U_2, \ V_1 = V_2, \ W_1 = W_2, \ \frac{\partial U_1}{\partial y} = \alpha\lambda \frac{\partial U_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{W_1}{H_1} = \alpha\lambda \left(\frac{\partial W_2}{\partial y} - \frac{W_2}{H_1} \right);$$

(1.6) $$y = H_2: \ U_2 \frac{dH_2}{dx} = V_2, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y} - \frac{W_2}{H_2} = 0,$$

где $x = z/R_*$; $y = r/R_*$; H_1, H_2 — радиусы поверхностей раздела и струи соответственно; U_i, V_i, W_i — осевая, радиальная и азимутальная компоненты скорости, индекс $i = 1$ отвечает внутренней жидкости, $i = 2$ — внешней; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \alpha$. В качестве безразмерных параметров используются величины $\alpha = \nu_2/\nu_1$, $\lambda = \rho_2/\rho_1$, $\gamma = \sigma_2/\sigma_1$ (ν_1, ν_2, ρ_1, ρ_2 — кинематические коэффициенты вязкости и плотности внутренней и внешней жидкостей, σ_1, σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения на границе раздела и поверхности струи) и $\mathrm{Re} = U_* R_*/\nu_1$, $\mathrm{We} = \rho_1 U_*^2 R_*/\sigma_1$, $\mathrm{Fr} = U_*^2/(gR_*)$ (g — ускорение силы тяжести). Здесь (1.1)— уравнение неразрывности; (1.2), (1.3)— уравнения движения для осевой и азимутальной компонент скорости; (1.4) выражает регулярность решения на оси струи; (1.5), (1.6) включают кинематические соотношения и условия непрерывности касательных напряжений на границе раздела и на поверхности струи, а также равенство компонент скорости при $y = H_1$. Предполагается, что распределение давления в поперечном сечении постоянно для каждой жидкости; это условие выполняется в случае, когда азимутальная скорость мала по сравнению с осевой. Выбор характерных величин обеспечивает единичный безразмерный расход струи.

Течение струи рассматривается как задача Коши с формулируемыми ниже условиями при $x = 0$. Для численного решения вводятся поверхности тока $y = h_n(x)$, $n = 1, \ldots, N$, причем $h_1 = 0$, $h_M = H_1$, $h_N = H_2$, и значения компонент скорости на них $u_n(x) = U_1(x, h_n(x))$, $w_n(x) = W_1(x, h_n(x))$, $n = 1, \ldots, M$, $u_n(x) = U_2(x, h_n(x))$, $w_n(x) = W_2(x, h_n(x))$, $n = M + 1, \ldots, N$. Для переменных h_n, u_n, w_n из (1.1)—(1.6) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4]

$$\frac{dh_1}{dx} = 0, \quad \frac{dh_n}{dx} = \frac{1}{2h_n u_n + h_{n-1}(u_{n-1} - u_n)}\Big\{[h_n(u_n - u_{n-1}) + \tag{1.7}$$

$$+ 2h_{n-1}u_{n-1}]\frac{dh_{n-1}}{dx} - (h_n - h_{n-1})\left(h_n\frac{du_n}{dx} + h_{n-1}\frac{du_{n-1}}{dx}\right)\Big\}, \quad n = 2, \ldots, N,$$

$$\frac{du_n}{dx} = \frac{1}{u_n}\left[\frac{1}{\mathrm{Fr}} + \frac{1}{\mathrm{We}}\left(\frac{1}{h_M^2}\frac{dh_M}{dx} + \frac{\gamma}{h_N^2}\frac{dh_N}{dx}\right) + T_{1n}\right], \quad n = 1, \ldots, M,$$

$$\frac{du_n}{dx} = \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{\mathrm{Fr}} + \frac{\gamma}{\lambda \mathrm{We} h_N^2}\frac{dh_N}{dx} + \alpha T_{2n}\right), \quad n = M + 1, \ldots, N,$$

$$\frac{dw_n}{dx} = \alpha_k S_{kn} - \frac{w_n}{h_n}\frac{dh_n}{dx}, \quad S_{kn} = \frac{1}{u_n \mathrm{Re}}\left(\left.\frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2}\right|_{y=h_n} + \frac{1}{h_n}\left.\frac{\partial W_k}{\partial y}\right|_{y=h_n} - \frac{w_n}{h_n^2}\right),$$

$$T_{kn} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\left.\frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2}\right|_{y=h_n} + \frac{1}{h_n}\left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=h_n}\right), \quad k = 1\colon n = 2, \ldots, M,$$

$$k = 2\colon n = M + 1, \ldots, N, \quad T_{11} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left.\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right|_{y=h_1}, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0,$$

выражение для T_{11} получено с помощью разложения функции U_1 в ряд Тейлора вблизи оси струи.

Аналогично [5] для вычисления входящих в (1.7) производных по y применяется тау-аппроксимация [6] с использованием смещенных полиномов Чебышева первого рода $\varphi_k(\eta)$, определяемых формулами [7] $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2\eta - 1$, $\varphi_k = 2\varphi_2\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$ При этом для компонент скорости, например осевой, строятся две аппроксимирующие функции:

$$\Psi_1 = \sum_{k=1}^{M+2} a_k\varphi_k\left(\frac{y}{h_M}\right), \quad \Psi_2 = \sum_{k=1}^{N-M+3} a_{M+2+k}\varphi_k\left(\frac{y - h_M}{h_N - h_M}\right),$$

коэффициенты разложения которых a_k ($k = 1, \ldots, N + 5$) являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{M+2} a_k\varphi_k\left(\frac{h_n}{h_M}\right) = u_n, \quad n = 1, \ldots, M, \quad \sum_{k=1}^{N-M+3} a_{M+2+k}\varphi_k\left(\frac{h_n - h_M}{h_N - h_M}\right) = u_n, \tag{1.8}$$

$$n = M, \ldots, N;$$

$$\sum_{k=1}^{M+2} a_k\varphi_k'(0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N-M+3} a_{M+2+k}\varphi_k'(1) = 0; \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{h_M}\sum_{k=1}^{M+2} a_k\varphi_k'(1) - \frac{\alpha\lambda}{h_N - h_M}\sum_{k=1}^{N-M+3} a_{M+2+k}\varphi_k'(0) = 0; \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{h_M^2}\sum_{k=1}^{M+2} a_k\left[\varphi_k''(1) + \varphi_k'(1)\right] - \frac{\alpha}{h_N - h_M}\sum_{k=1}^{N-M+3} a_{M+2+k}\times \tag{1.11}$$

$$\times\left[\frac{1}{h_N - h_M}\varphi_k''(0) + \frac{1}{h_M}\varphi_k'(0)\right] + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{We}}\left(\frac{1}{h_M^2}\frac{dh_M}{dx} + \frac{\lambda - 1}{\lambda}\frac{\gamma}{h_N^2}\frac{dh_N}{dx}\right) = 0,$$

где (1.8) отвечает равенству функций Ψ_1, Ψ_2 значениям осевой скорости на поверхностях тока; (1.9)— аппроксимация граничных условий на оси и поверхности струи; (1.10)— аппроксимация непрерывности касательного напряжения на поверхности раздела; (1.11) выражает согласование уравнений движения жидкостей на поверхности раздела.

После определения значений a_k $(k = 1, \ldots, N + 5)$ можно вычислить коэффициенты разложения в ряды по полиномам Чебышева производных по y функций Ψ_1, Ψ_2 и далее определить значения этих производных на поверхностях тока для подстановки в (1.7) [5].

Для реализации данного алгоритма необходимо вычислить значения dh_M/dx, dh_N/dx, входящие в (1.8)—(1.11). С этой целью из (1.7) получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$(1.12) \qquad b_n \frac{dh_{n-1}}{dx} + \frac{dh_n}{dx} + c_n \frac{dh_M}{dx} + d_n \frac{dh_N}{dx} = e_n, \quad n = 1, \ldots, N,$$

$b_1 = 0$; $c_k = 0$ $(k = M + 1, \ldots, N)$; коэффициенты в (1.12) зависят от значений производных осевой компоненты по y на поверхностях тока. Из (1.8)—(1.12) следует система двух неявных линейных алгебраических уравнений для определения dh_M/dx, dh_N/dx. Отметим, что решение (1.12) проводится методом прогонки [8].

Отличие алгоритма вычисления производных азимутальной скорости от описанного состоит в использовании $(M + 1)$-го полинома для аппроксимации скорости внутренней жидкости; кроме того, условие согласования уравнений на поверхности раздела не содержит значений dh_M/dx, dh_N/dx.

К уравнениям (1.7) необходимо добавить начальные условия

$$h_n(0) = \frac{n-1}{M-1} H_1(0), \quad u_n(0) = U_{10}(h_n), \quad w_n(0) = W_{10}(h_n), \quad n = 1, \ldots, M,$$

$$h_n(0) = H_1(0) + [1 - H_1(0)] \frac{n-M}{N-M}, \quad u_n(0) = U_{20}(h_n), \quad w_n(0) = W_{20}(h_n),$$
$$n = M + 1, \ldots, N,$$

где U_{10}, U_{20}, W_{10}, W_{20} — заданные функции; $H_1(0)$— начальный радиус поверхности раздела. Интегрирование уравнений (1.7) производится методом Адамса — Бэшфорта второго порядка точности [6].

2. Вследствие действия вязких сил независимо от вида начальных условий с увеличением x происходит формирование профиля осевой скорости, близкого к постоянному; для закрученного течения зависимость азимутальной скорости от радиуса приближается к линейной. В случаях $\mathrm{Fr} = \infty$ и $\mathrm{Fr} \neq \infty$, $\sqrt{q_1} = \lambda/[\gamma(1 - \lambda)]$ задача (1.1)—(1.6) имеет решение

$$(2.1) \qquad H_1 = H_2 \sqrt{q_1}, \quad U_i = \frac{1}{H_2^2}, \quad V_i = \frac{y}{H_2^3} \frac{dH_2}{dx}, \quad W_i = \omega y, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\omega = \omega_a H_{2a}^2 / H_2^2$; $q_1 = 2 \int\limits_0^{H_1(0)} y U_{10} dy$; H_{2a}, ω_a — радиус струи и ее уг-

Номер расчета	$Q \cdot 10^6$, м³/с	$R_* \cdot 10^4$, м	U_*, м/с	Re	We	Fr	ε_2	t_1	t_2	h	x_a
1	0,0628	1	2	200	20	∞	3	0	0	0,5	40
2	0,0628	0,5	8	400	160	∞	3	0	0	0,5	80
3	0,0628	0,2	50	1000	2500	∞	3	0	0	0,5	200
4	0,0628	0,5	8	400	160	∞	2	0	0	0,5	85
5	0,0628	0,5	8	400	160	∞	3	0	—0,05	0,5	100
6	0,0628	0,5	8	400	160	∞	3	—0,05	—0,05	0,5	80
7	0,0628	0,5	8	400	160	40	3	0	0	0,5	55
8	0,0628	0,5	8	400	160	∞	3	0	0	0,25	125
9	0,0628	0,5	8	400	160	∞	3	0	0	0,75	80
10	6,28	10	2	2000	200	∞	3	0	0	0,5	400
11	6,28	8	3,12	2500	391	∞	3	0	0	0,5	500
12	6,28	6	5,56	3340	928	∞	3	0	0	0,5	660

ловая скорость вращения как твердого тела при некотором значении $x = x_a$; решение (2.1) справедливо при $x \geqslant x_a$. Зависимость $H_2(x)$ определяется из условия $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_2^4} - \frac{1}{H_{2a}^4}\right) + \frac{\gamma}{\lambda\,\mathrm{We}}\left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_{2a}}\right) - \frac{x - x_a}{\mathrm{Fr}} = 0.$

Длина участка формирования равномерного решения зависит от параметров Re, We, Fr, α, λ, γ, расхода q_1, начальных профилей компонент скорости. При изучении зависимости x_a от параметров рассматривался случай

$$U_{i0} = 1{,}5\beta_i(y^4 - 2y^2) + \varepsilon_i,\ i = 1,\ 2,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + 1{,}5\beta_2 h^2(h^2 - 2)(1 - \alpha\lambda),$$

$$\beta_1 = \beta_2\alpha\lambda, \quad \beta_2 = \frac{\varepsilon_2 - 1}{1 - (1 - \alpha\lambda)\, h^4\,(h^2 - 1{,}5)},$$

$$W_{10} = t_1 y + 2\alpha t_2\,[4\,(\lambda - 1)\,h + 3 - 4\lambda]\,y^2 + \frac{\alpha t_1}{h}\,[(4 - 3\lambda)\,h + 3\,(\lambda - 1)]\,y^3,$$

$$W_{20} = \Big\{t_1 + 2t_2\,[4\alpha\,(\lambda - 1)\,h + (3 - 4\lambda)\,\alpha + 1]\,h + t_2\Big[\frac{3\alpha\,(\lambda - 1)}{h} + \alpha\,(4 - 3\lambda) - 1\Big]\,h^2\Big\}\,y - 2t_2 y^2 + t_2 y^3,$$

где $h = H_1(0)$; вид начальной осевой скорости определяется параметром ε_2, азимутальной — параметрами t_1, t_2. В таблице для струи, внутренней жидкостью которой является вода, внешней — бензин и для которой $\alpha = 0{,}709$, $\lambda = 0{,}752$, $\gamma = 1{,}5$, даются значения параметров и вычисленные соответствующие длины участка формирования равномерного решения x_a. В качестве критерия при вычислении x_a выбрано условие $|1 - f| < 0{,}05$. Здесь $f = u_n/U_{1m}$ $(n = 1, \ldots, M)$, $w_n/(\omega_1 h_n)$ $(n = 2, \ldots, M)$, u_n/U_{2m}, $w_n/(\omega_2 h_n)$ $(n = M, \ldots, N)$, $U_{\min}/U_{\max}$, $\omega_{\min}/\omega_{\max}$, $U_{1m} = \frac{2}{H_1^2}\int\limits_0^{H_1} yU_1 dy$, $U_{2m} = \frac{2}{H_2^2 - H_1^2}\int\limits_{H_1}^{H_2} yU_2 dy$ — средние значения осевой скорости для внутренней и внешней жидкостей, $\omega_1 = w_M/h_M$, $\omega_2 = w_N/h_N$ — угловые скорости вращения жидкости на поверхностях раздела и струи, $U_{\min}$ и $U_{\max}$, $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ — минимальные и максимальные значения U_{1m}, U_{2m} и ω_1, ω_2 соответственно. Вычисление x_a проведено с точностью $\Delta x_a = 5$ для расчетов 1, 2, 4, 6—9 и $\Delta x_a = 20$ для расчетов 3, 5, 10—12.

На рис. 1 для расчета 5 показаны зависимости H_1, H_2, U_{1m}, U_{2m}, которым соответствуют кривые *1—4*. Для этого же расчета на рис. 2, 3 приводятся профили компонент скорости, причем на рис. 2 показана осевая компонента при $x = 0$; 20; 60 (линии *1—3*), на рис. 3 — азимутальная при $x = 0$; 20; 90 (кривые *1—3*); в обоих случаях профили во внутренней жидкости обозначаются сплошной линией, во внешней — штриховой.

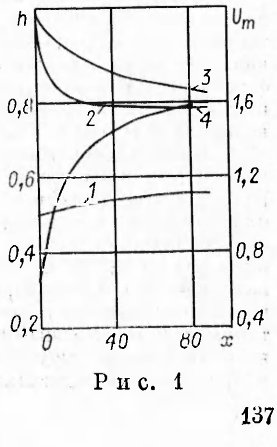

Рис. 1

Таким образом, предложенный метод расчета течений составных струй позволяет, кроме знания x_a, получить характеристики течения в промежуточных сечениях и их предельные значения, дающие возможность рассмотреть в дальнейшем устойчивость данного течения.

В заключение отметим, что метод обобщается на случай многослойной струи, однако увеличивающееся при этом число неявных линейных алгебраических уравнений для определения производных по x от ординат поверхностей раздела вызывает необходимость многократного проведе-

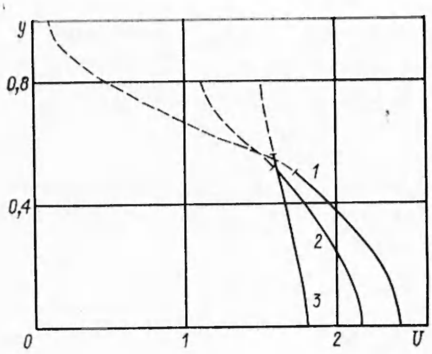

Рис. 2

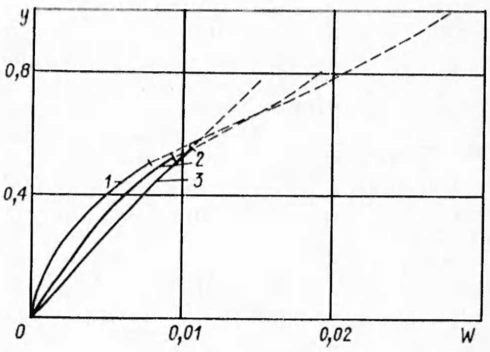

Рис. 3

ния аппроксимационного алгоритма при фиксированном значении x; при этом происходит существенное увеличение времени расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hertz C. H., Hermanrud B.** A liquid compound jet // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 131.— P. 271.
2. **Radev S., Gospodinov P.** Numerical treatment of the steady flow of a liquid compound jet // Intern. J. Multiphase Flow.— 1986.— V. 12, N 6.
3. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— М.: Изд-во МГУ, 1973.
4. **Епихин В. Е., Шкадов В. Я.** Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 6.
5. **Сисоев Г. М., Тальдрик А. Ф., Шкадов В. Я.** Течение пленки вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска // Инж.-физ. журн.— 1986.— Т. 51, № 4.
6. **Gottlieb D., Orszag S. A.** Numerical analysis of spectral methods: theory and applications.— Philadelphia, 1977.
7. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.— М.: Наука, 1983.
8. **Калиткин Н. Н.** Численные методы.— М.: Наука, 1978.

Поступила 9/XI 1987 г.

УДК 532.516 : 772.96

ИССЛЕДОВАНИЕ СТИМУЛИРОВАННОЙ ЛОКАЛЬНЫМ ОБЛУЧЕНИЕМ И ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ТОНКОМ СЛОЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В. В. Низовцев

(Москва)

Капиллярная конвекция в жидкостях малой вязкости наблюдается при перепадах в поверхностном натяжении порядка 0,1 мН/м. Она проявляется при многих технологических процессах. В слое сохнущего лакокрасочного покрытия или стекловидной эмали, а также при экстракции в системах жидкость — жидкость или ректификации многокомпонентных смесей возникает конвекция, приводящая к формированию рельефа на границе раздела фаз [1—4]. Конвекцию инициируют флуктуационно возникающие градиенты поверхностного натяжения.

Высокая чувствительность жидкостей к сдвиговым напряжениям была использована в решениях таких технических задач, как разделение примесей [5], получение рельефных фотографических изображений [6, 7], осаждение вещества в заданном месте подложки [8] или поверхностное легирование металлов [9]. Перечисленные технические решения основаны на капиллярной конвекции, управляемой термическим действием излучения [10, 11]. Несмотря на широкую область возможного применения вынужденной капиллярной конвекции, в литературе практически отсутствуют количественные данные по конвекции при действии излучения и ее сопоставлению с спонтанными конвективными процессами. Ниже изложены результаты изучения капиллярно-конвективной неустойчивости слоя жидкости в режиме естественного испарения и при локальном действии лазерного излучения малой мощности.