

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ К ОПИСАНИЮ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕТАЛЛАХ И ПЕРЕСЧЕТУ ДАННЫХ РЕЛАКСАЦИИ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

Г. С. Воротников, Л. Х. Паперник

(Москва)

Исследуется возможность описания процессов релаксации и ползучести в металлах, а также возможность непосредственного пересчета данных одного вида испытаний на другой в рамках теории наследственной ползучести, основанной на применении нелинейного интегрального уравнения Ю. Н. Работнова [1].

Зависимость между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ в одномерном случае имеет вид [1]

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (1)$$

Здесь $\varphi(\varepsilon)$ — функция деформации, вообще говоря, нелинейная; $K(t - \tau) > 0$ — монотонно убывающая функция влияния; λ — числовой коэффициент.

Уравнение (1) представляет собой достаточно общий вид связи напряжения и деформации. В частности, если $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$, то уравнение (1) примет вид обычного линейного наследственного закона деформирования

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

В случае ползучести при $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$ уравнение (1) примет вид

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma_0 [1 + G(t)] \quad \left(G(t) = \int_0^t K(\tau) d\tau \right) \quad (3)$$

В координатах σ, ε при различных уровнях начального напряжения $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \dots$ соотношение (3) изображается в виде пучка подобных кривых при фиксированных временах $t_1, t_2, \dots$. Таким образом, применимость уравнения (1) обоснована при подобии изохронных кривых ползучести.

Функция $1 + \lambda G(t)$ дает коэффициенты подобия при фиксированных t . При $t = 0$ получается кривая мгновенного деформирования $\sigma = \varphi(\varepsilon)$. Закон релаксации при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ будет выражаться уравнением

$$\sigma(t) = \sigma_0 [1 - \lambda R(t)] \quad (4)$$

Здесь $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0)$ и $R(t)$ — интеграл резольвентного ядра. Наиболее употребительны применительно к металлам степенные ядра At^α (A — числовой коэффициент; $-1 < \alpha < 0$). Поскольку параметр α отрицателен, то уравнение (3) обладает интегрируемой особенностью в нуле. Наличие этой особенности вызвано поведением материала в момент нагружения.

Примем

$$K(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

Здесь $\Gamma(\alpha + 1)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда резольвентой будет $\mathcal{J}$ -функция Ю. Н. Работнова [1]

$$\mathcal{J}_\alpha(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n (t - \tau)^{(\alpha+1)n}}{\Gamma[(\alpha+1)(n+1)]} \quad (5)$$

В [1, 2] приведены многочисленные свойства этой функции и рассмотрена возможность ее применения в качестве ядра интегральных операторов в задачах линейной теории ползучести и релаксации.

Ниже излагается попытка применения аппарата этих функций к изучению релаксации и ползучести металлов в рамках нелинейного закона (1).

Из формулы (4) следует, что кривые релаксации для различных начальных напряжений σ_0 должны быть подобны. Во многих случаях это подтверждается опытом.

В рассматриваемом случае уравнения (3) и (4) примут соответственно следующий вид:

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma_0 \left[1 + \frac{\lambda t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right] \quad (6)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[1 + \lambda \int_0^t \mathcal{J}_\alpha(-\lambda, t - \tau) d\tau \right] \quad (\lambda > 0) \quad (7)$$

К задаче определения параметров α , λ и функции $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ можно подойти с двух сторон.

По набору кривых ползучести можно построить семейство изохронных кривых и определить параметры α и λ уравнения (6) и затем построить кривую мгновенного состояния $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ [3]. Теоретические кривые релаксации строятся по уравнению (7) с полученными значениями констант α и λ .

С другой стороны, можно определить необходимые характеристики по уравнению (7) путем обработки кривых релаксации. В работе выбран именно этот путь.

В работе [4] рассмотрен метод определения характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов при помощи ЭЦВМ. Этот метод можно применить к случаю нелинейного поведения материала для определения характеристик релаксации.

Сущность метода состоит в следующем. Вместо того чтобы аппроксимировать кривую релаксации при помощи уравнения (7), преобразуем кривую релаксации численно по Лапласу — Карсону, и полученное таким образом изображение кривой релаксации будем аппроксимировать изображением уравнения (7), имеющим вид

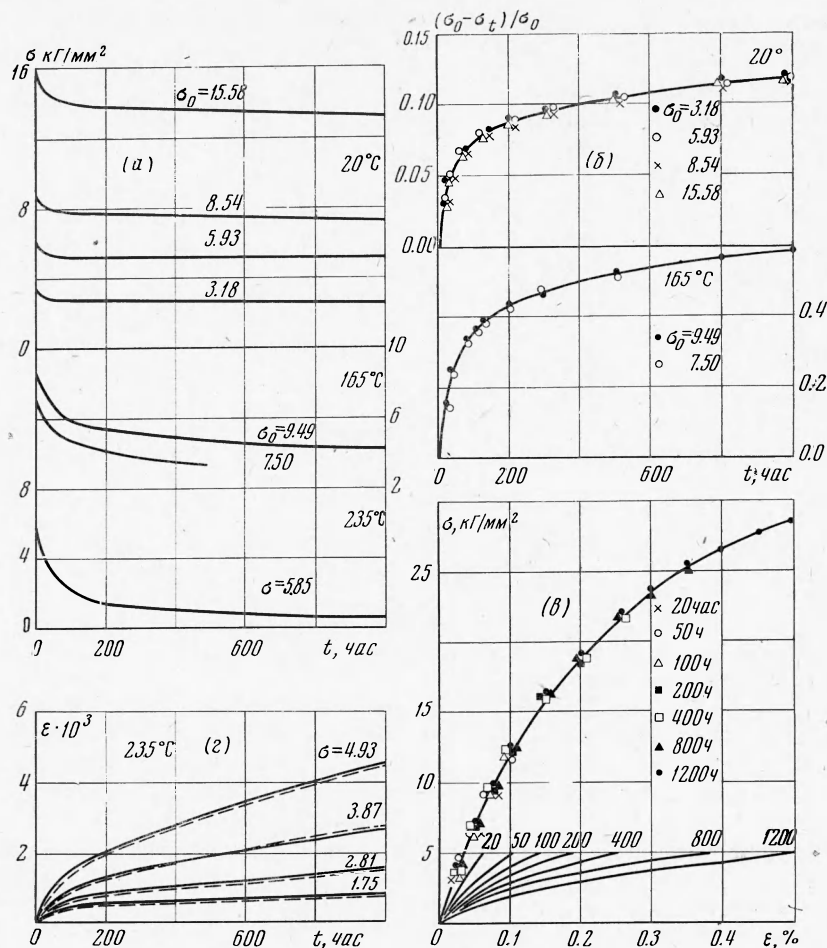
$$\sigma(p) = \sigma_0 \left[1 - \frac{\lambda}{p^{\alpha+1} + \lambda} \right], \quad \sigma(p) = p \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt \quad (8)$$

Здесь $p > 0$ — параметр преобразования.

Затем к полученному изображению применялся квадратичный метод нахождения оптимальных параметров (обобщение на нелинейный случай метода наименьших квадратов) и определялись характеристики релаксации без перехода к оригиналам.

Метод определения характеристик реализован в качестве программы на ЭЦВМ «Минск-2».

Исследовались кривые релаксации напряжений меди, приведенные в [5] для температур 20, 165, 235°С (фигура, а).₁



Прежде всего была проверена гипотеза о подобии кривых релаксации. Для этого кривые релаксации представлялись в координатах $(\sigma_0 - \sigma_t) / \sigma_0, t$ (фигура, б). В результате были получены данные, хорошо соответствующие сделанным предположениям. Затем каждая кривая подвергалась обработке на ЭЦВМ. Приводим результаты этой обработки для указанных значений

$T = 20$				$T = 165$		$T = 235$
$\sigma = 15.58$	8.54	5.93	3.18	9.50	7.50	5.85
$\alpha = -0.748$	-0.812	-0.861	-0.765	-0.683	-0.627	-0.5015
$\lambda = 0.421$	0.386	0.379	0.405	0.147	0.158	0.1312

Средние значения параметров релаксации в уравнении (7) следующие:

$\alpha = -0.80,$	$\lambda = 0.398$	при 20°C
$\alpha = -0.65,$	$\lambda = 0.157$	при 165°C
$\alpha = -0.50,$	$\lambda = 0.131$	при 235°C

При сделанных предположениях параметры α и λ уравнения (6), описывающего процесс ползучести меди при соответствующих температурах, будут иметь те же значения, и при наличии кривой мгновенного состояния $\sigma = \varphi(\epsilon)$ можно построить семейство изохронных кривых при фиксированных t , а затем по ним и кривые ползучести меди.

Так как в [5] не указаны значения постоянных деформаций ϵ_0 , при которых проводились опыты на релаксацию, то выявить характер нелинейности и построить кривые мгновенного растяжения из данных по релаксации нельзя. Однако поскольку в нашем

распоряжении имеются кривые ползучести при соответствующих температурах, то по полученным для этих температур значениям параметров α и λ можно построить кривые мгновенного нагружения $\sigma = \varphi(\epsilon)$.

Проиллюстрируем это на примере построения для 235°C . Для этого сначала построим изохронные кривые ползучести для меди при 235°C в координатах σ, ϵ при различных уровнях начального напряжения. Они изображены на фигуре, ϵ в виде пучка подобных кривых при фиксированных временах, указанных на графике. Подобие изохронных кривых ползучести подтверждает обоснованность применения уравнения (1) для решения поставленной задачи.

Далее, по формуле (6) строилась кривая мгновенного нагружения путем экстраполяции с каждой изохронной кривой ползучести при полученных $\alpha = -0.50$ и $\lambda = -0.1312$. Задаваясь разными значениями σ , получим значения $\varphi(\epsilon)$, соответствующие фиксированному времени $t_1 = 20 \text{ час}$. Затем такие же вычисления проводятся для другого фиксированного $t_2 = 50 \text{ час}$ и т. д. Полученные таким образом значения $\varphi(\epsilon)$ и построенная по ним усредненная кривая представлены на фигуре, ϵ . Эта кривая и принимается за кривую мгновенного нагружения $\sigma = \varphi(\epsilon)$, отражающую характер нелинейности материала. Малый разброс значений, соответствующих различным изохронным кривым в данном случае, служит доказательством обоснованности использования найденных значений параметров α и λ для описания ползучести.

По полученной кривой мгновенного нагружения можно провести построение кривых ползучести для любого $\sigma = \text{const}$. Подставляя в (6) значения σ_0 , соответствующие реальным кривым и используя график $\sigma = \varphi(\epsilon)$, построим кривые ползучести. На фигуре, ϵ они нанесены пунктиром. Сплошными линиями нанесены экспериментальные кривые. Соответствие между расчетными и экспериментальными данными вполне удовлетворительное. В дальнейшем полученную кривую $\sigma = \varphi(\epsilon)$ можно аппроксимировать какой-либо аналитической зависимостью, например, степенной.

Результат проведенных расчетов указывает на то, что применение нелинейных наследственных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами к описанию релаксации напряжений в некоторых металлах и предсказанию ползучести из данных релаксации приводит к положительным результатам.

Авторы выражают благодарность Ю. Н. Работнову за внимание к работе, а также В. А. Коминару, сделавшему ряд ценных замечаний.

Поступила 22 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М., «Наука», 1969.
3. Goldhoff R. M. The application of Rabotnov's creep parameter. Proc. Amer. Soc. Testing Materials, 1961, vol. 61.
4. Звонов Е. Н., Малинин Н. И., Паперник Л. Х., Цейтлин Б. М. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ. МТТ, № 5, 1968.
5. Davis E. A. Creep and relaxation of oxygen-free copper. J. Appl. Mech., 1943, vol. 10, No. 2.