10. **Ахатов И. Ш., Вайнштейн П. Б.** Нестационарные режимы горения пористых порохов // ФГВ.— 1983.— № 3.
11. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент.— М.: Наука, 1982.
12. **Казаков Ю. В., Киселев С. П., Федоров А. В., Фомин В. М.** Распространение разрывов в смесях // Всесоюз. семинар «Современные проблемы и математические методы теории фильтрации». Тез. докл.— М., 1984.
13. **Stewart H. B., Wendroff B.** Two-phase flows: models and methods // J. Comput. Phys.— 1984.— V. 56, N 3.
14. **Ершов А. П.** Об уравнениях механики двухфазных сред // ПМТФ.— 1983.— № 6.
15. **Кларк Дж., Макчесни М.** Динамика реальных газов.— М.: Мир, 1967.
16. **Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М.** Анализ распространения слабых возмущений в газовзвесях // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности/Под ред. В. М. Фомина.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
17. **Курант Р.** Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.

Поступила 7/IV 1986 г.

УДК 539.3

КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. В. Кузнецов

(Новосибирск)

В [1] дается определение канонического вида симметричного тензора, согласно которому он принимает простейшую (диагональную) форму в главных осях. В настоящей работе определяется симметричный тензор, приводящий квадратичную форму потенциальной энергии в единице объема изотропного упругого тела к каноническому виду. Показывается, что такое приведение можно осуществить надлежащим выбором двух констант в форме, аналогичной обобщенному закону Гука.

Напряженно-деформированное состояние в элементарном объеме упругого тела характеризуется тензором напряжений σ_{ij} и тензором деформаций ε_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 3)$, компоненты которых связаны соотношениями упругости

$$\sigma_{ij} = b_{ijkm}\varepsilon_{km}. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем b_{ijkm} — тензор упругих постоянных и по повторяющимся дважды индексам производится суммирование. В изотропном упругом теле

$$b_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}), \tag{2}$$

λ, μ — постоянные Ламэ; δ_{ij} — символ Кронекера.

Определим канонический тензор s_{ij} как тензор, компоненты которого связаны с компонентами тензора деформаций теми же соотношениями, что и компоненты тензора напряжений с компонентами канонического тензора, т. е.

$$s_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km}; \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkm}s_{km}. \tag{4}$$

Причем положим, что для коэффициентов c_{ijkm} выполняются свойства симметрии относительно перестановки индексов i и j, k и m, а также пар ij и km. Из сравнения соотношений (3), (4) и (1) можно прийти к заключению, что если канонический тензор существует, то он обладает некоторыми интересными свойствами двойственности. С одной стороны, согласно (3), s_{ij} могут рассматриваться как некоторые «напряжения», а с другой, согласно (4),— как некоторые «деформации». Для того чтобы σ_{ij} оставался действительным тензором напряжений, постоянные c_{ijkm} должны быть связаны условием

$$c_{ijkm}c_{kmrs} = b_{ijrs}. \tag{5}$$

Следовательно, нахождение канонического тензора связано с определением постоянных c_{ijkm}. Предположим, что коэффициенты c_{ijkm} могут быть найдены в форме коэффициентов b_{ijkm} (2), удовлетворяющих названным выше свойствам симметрии:

$$c_{ijkm} = \lambda_* \delta_{ij}\delta_{km} + \mu_* (\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}). \tag{6}$$

Здесь λ_*, μ_* — неизвестные неотрицательные константы. Подставляя формы (2), (6) в условие (5), имеем

$$\begin{gathered}[\lambda_*\delta_{ij}\delta_{km} + \mu_* (\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})][\lambda_*\delta_{km}\delta_{rs} + \mu_* (\delta_{kr}\delta_{ms} + \delta_{ks}\delta_{mr})] = \\ = \lambda\delta_{ij}\delta_{rs} + \mu (\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}).\end{gathered} \tag{7}$$

С учетом тождеств $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$, $\delta_{ik}\delta_{km} = \delta_{im}$, $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ соотношение (7) приведем к виду

$$\left(3\lambda_*^2 + 4\lambda_*\mu_* - \lambda\right)\delta_{ij}\delta_{rs} + \left(2\mu_*^2 - \mu\right)(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}) = 0,$$

откуда получаем два уравнения для определения λ_*, μ_*:

$$3\lambda_*^2 + 4\lambda_*\mu_* - \lambda = 0, \quad 2\mu_*^2 - \mu = 0. \tag{8}$$

По принятому условию ограничиваемся неотрицательными решениями уравнений (8)

$$\lambda_* = \lambda/\left[(2\mu + 3\lambda)^{1/2} + (2\mu)^{1/2}\right], \quad \mu_* = (\mu/2)^{1/2}. \tag{9}$$

Здесь $(2\mu + 3\lambda)$ — модуль объемного расширения. Следовательно, если определить коэффициенты c_{ijkm} соотношениями (6), (9), то тензор s_{ij} будет обладать свойствами (3), (4). Кроме того, как это вытекает из (2), (6), все три тензора ε_{ij}, s_{ij}, σ_{ij} соосные.

Запишем через тензор s_{ij} потенциальную энергию деформации Π_* в единице объема упругого тела: $\Pi_* = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkm}s_{km}\varepsilon_{ij}$. Но, согласно (3) и свойствам симметрии коэффициентов c_{ijkm},

$$\Pi_* = \frac{1}{2}(c_{kmij}\varepsilon_{ij})\, s_{km} = \frac{1}{2} s_{km}^2. \tag{10}$$

Таким образом, потенциальная энергия в единице объема упругого тела записывается через сумму квадратов компонентов канонического тензора с множителем 1/2, т. е. оказывается приведенной к каноническому виду [2]. Собственно с этим свойством приведения связано название тензора s_{ij}. Ввиду свойств симметрии $s_{ij} = s_{ji}$ выражение (10) содержит квадраты шести независимых компонентов. Заметим, что обычно [3—6] для доказательства положительной определенности потенциальной энергии используется приведение к сумме квадратов семи величин; возможность приведения к сумме квадратов шести следует из теории квадратичных форм [2]. Поскольку потенциальная энергия в единице объема — квадратичный инвариант, она может быть записана через первый I_1 и второй I_2 инварианты канонического тензора: $\Pi_* = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2$.

Ввиду отмеченных особенностей тензора s_{ij} естественно предположить наличие у него определенных энергетических свойств. Из них отметим свойства «взаимности»

$$\partial\Pi_*/\partial\varepsilon_{ij} = c_{ijkm}s_{km}, \quad \partial\Pi_*/\partial s_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km},$$
$$\partial\Pi_*/\partial s_{ij} = \overset{-1}{c}_{ijkm}\sigma_{km}, \quad \partial\Pi_*/\partial\sigma_{ij} = \overset{-1}{c}_{ijkm}s_{km},$$

где $\overset{-1}{c}_{ijkm}$ — коэффициенты, обратные к c_{ijkm} в соотношениях (3), (4), т. е. $\varepsilon_{ij} = \overset{-1}{c}_{ijkm}s_{km}$, $s_{ij} = \overset{-1}{c}_{ijkm}\sigma_{km}$.

При одноосном растяжении среды (коэффициент Пуассона $\nu = 0$) с отличными от нуля компонентами ε_{11}, s_{11}, σ_{11} имеют место соотношения $s_{11} = E^{1/2}\varepsilon_{11} = E^{-1/2}\sigma_{11}$, $\Pi_* = \frac{1}{2} s_{11}^2$ (E — модуль упругости). Размерность компонент s_{ij}, как видно, равна квадратному корню из размерности напряжения. Какого-либо определенного физического смысла компоненты s_{ij} не имеют, однако они являются мерами интенсивности напряженно-деформированного состояния, сумма квадратов которых пропорциональна накопленной энергии в единице объема. Благодаря однородности выражения энергии в терминах s_{ij} его удобно применять при алгоритмизации операций, связанных с варьированием энергии в прямых вариационных методах [7—9]. Например, канонические формы потенциальной энергии в теории оболочек, аналогичные вышеприведенным, применялись для получения матрицы жесткости изгибных конечных элементов и расчетов геометрически нелинейных деформированных состояний упругих тонких тел в [10]. В таких случаях рассматривается зависимость s_{ij} от дискретных параметров q_k ($k = 1, \ldots, n$), которые выступают в качестве неизвестных в задаче упругого равновесия, т. е. $s_{ij} = s_{ij}(q_1, \ldots, q_n)$. При линейной зависимости s_{ij} от q_k потенциальная энергия в единице объема записывается в виде

$$\Pi_* = \frac{1}{2} k_{rp} q_r q_p, \quad k_{rp} = \frac{\partial s_{ij} \partial s_{ij}}{\partial q_r \partial q_p}.$$

Здесь k_{rp} — коэффициенты симметричной матрицы жесткости [8].

Автор выражает признательность А. Л. Гольденвейзеру за обсуждение родственных вопросов в теории упругих оболочек и В. В. Кабанову за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Грин А., Адкинс Дж.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.
2. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1967.
3. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
4. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости.— М.: Наука, 1975.
5. **Ляв А.** Математическая теория упругости.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.
6. **Новожилов В. В.** Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
7. **Лейбензон Л. С.** Вариационные методы решения задач теории упругости.— М.; Л.: Гостехиздат, 1943.
8. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.
9. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1983.
10. **Кузнецов В. В.** Элементарный анализ геометрии поверхностей и метод конечных элементов в механике упругих оболочек при произвольных перемещениях.— М., 1984.— Деп. ВИМИ 1.11.84, № Д06203.

Поступила 26/VI 1986 г.

УДК 539.376 + 539.538

О ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. М. Александров, А. В. Манжиров

(Москва)

Исследуются двумерные интегральные уравнения, возникающие в контактных задачах для тел со сложными свойствами, задачах износа упругих и вязкоупругих тел. Предлагаются методы решения, основанные на изучении неклассических спектральных свойств интегральных операторов. Обсуждаются области их эффективного применения. Теоретические результаты иллюстрируются прикладным примером.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)q(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{A}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \tag{1.1}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{L}_i) f(t) = f(t) - \int_1^t f(\tau) K_i(t, \tau)\, d\tau \quad (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{A} f_1(x) = \int_{-1}^{1} f_1(\xi) k(\xi, x)\, d\xi, \quad k(\xi, x) = k(-\xi, -x)$$