Для случая малых времен релаксации ($\tau \ll 1/\omega$), используя $i\omega\delta\rho + \rho^0 \operatorname{div} \delta u = 0$, получим из (3.2)

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi, S} \delta\rho - \left(c_\infty^2 - c_0^2\right) \tau^0 \operatorname{div} \delta u. \tag{3.4}$$

Для давления получили формулу с объемной вязкостью.

Эффективная объемная кинематическая вязкость выражается формулой (с учетом (1.5) при $M = \text{const}$)

$$\nu = \tau^0 \left(c_\infty^2 - c_0^2\right) = -\frac{\tau^0}{\rho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho, S} = \tau^0 M. \tag{3.5}$$

Отметим, что формула для давления (3.4) с объемной вязкостью (3.5) справедлива только для достаточно медленных по сравнению с временем релаксации τ процессов. Следовательно, для быстроиротекающих процессов модель с вязкостью Навье — Стокса, определяемой по (3.5), неприменима.

Существенным обстоятельством является также и то, что система уравнений (1.2) с релаксацией плотности является гиперболической (все процессы имеют конечную скорость распространения).

Поступила 1 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Доровский В. Н., Искольдский А. М., Роменский Е. И.** Динамика импульсного нагрева металла током и электрический взрыв проводников. Препринт № 174. Новосибирск: ИАЭ СО АН СССР, 1982.
2. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
3. **Паташинский А. З., Шумило Б. И.** Теория релаксации метастабильных состояний.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, № 4.
4. **Дамаск А., Динс Дж.** Точечные дефекты в металлах. М.: Мир, 1966.
5. **Крафтмахер Я. А.** Экспериментальное исследование теплоемкости металлов при высоких температурах (образование вакансий и фазовые переходы второго рода). Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Свердловск: Ин-т физики металлов АН СССР, 1967.
6. **Киттель Ч.** Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
7. **Новик А., Берри Б.** Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975.
8. **Каримходжаев И., Мартынюк М. М.** Осциллографическое исследование электрического взрыва меди и золота.— ПМТФ, 1974, № 3.
9. **Мандельштам Л. П., Леонтович М. А.** К теории поглощения звука в жидкостях.— ЖЭТФ, 1937, № 7.

УДК 539.374

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИСЛОКАЦИОННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Ю. И. ФАДЕЕНКО

(*Киев*)

В исследованиях динамической пластичности часто используется простейшая модель теории дислокаций, включающая уравнение Орована

$$\dot{\gamma} = bNv, \tag{1а}$$

закон движения дислокаций

$$v = v(\tau) \tag{1б}$$

и уравнение кинетики дислокаций

$$N = N(\gamma), \tag{1в}$$

где γ — сдвиговая деформация; τ — касательное напряжение; N — плотность дислокаций; v — скорость их скольжения; b — абсолютная величина вектора Бюргерса. При этом предполагается, что все дислокации подвижны и скользят с одинаковыми скоростями. Уравнение (1в) обычно записывают в виде $N = N_0 + A\gamma^s$, где s — величина порядка единицы, а в качестве закона движения используют либо закон вязкого трения

$$\tau b = Bv, \tag{2а}$$

либо эмпирическую формулу Тэйлора [1]

$$v = v_0 \exp(-\tau_0/\tau) \tag{2б}$$

(B — коэффициент вязкого трения).

Эта простейшая модель отвечает условиям надбарьерного скольжения при однородном хаотическом распределении дислокаций и может применяться при описании малых деформаций металлов с невысокой начальной плотностью дислокаций. Однако она не учитывает того обстоятельства, что однородное распределение быстро теряет устойчивость и уже при относительно небольших деформациях дислокации организуются в те или иные неоднородные структуры (полосы скольжения, клубки, жгуты, ячейки и т. п.), после чего характер движения дислокаций резко изменяется и допущение об одинаковой скорости движения всех дислокаций становится неприменимым. В большинстве металлов, особенно в ГЦК-металлах (алюминий, медь, никель), быстро формируется ячеистая структура. При последующем деформировании эволюция ячеистой структуры проходит две стадии. На первой стадии размер ячеек λ уменьшается с возрастанием N в соответствии с эмпирической формулой Холта:

$$\lambda(N) = K/\sqrt{N}, \tag{3}$$

где $K = 15 \ldots 20$ [2]. На второй стадии размер ячеек остается постоянным.

Пластическое деформирование сопровождается размножением дислокаций и увеличением N, вследствие чего металл упрочняется. Как для однородного распределения, так и для ячеистых структур деформационное упрочнение описывается приближенной зависимостью

$$Y = Y_0 + \alpha Gb\sqrt{N}, \tag{4}$$

где Y — предел текучести на сдвиг; G — модуль сдвига. Величины коэффициентов α для однородного распределения и ячеистой структуры несколько различны и к тому же слабо меняются от металла к металлу, но в первом приближении можно положить $\alpha = 0{,}5$. При $\tau < Y$ почти все дислокации прочно удерживаются стенками ячеек. При $\tau > Y$ отдельные дислокации отрываются со стенок и движутся во внутренних объемах ячеек до столкновения со стенками. Обычно τ даже и при высокоскоростном деформировании ненамного превышает Y, так что ячеечный каркас остается устойчивым. Простейшее кинетическое уравнение для этого случая может быть записано в виде

$$dN/dt = m\dot{\gamma}/b\lambda - \dot{\gamma}Nh/b, \tag{5}$$

где λ/m — средняя длина кинетического пробега дислокаций; h — эффективное сечение аннигиляции при столкновениях дислокаций противоположных знаков. Интегрирование (5) с учетом (3) дает

$$\sqrt{N} = (m/Kh)[1 - \exp(-\gamma h/2b)]. \tag{6}$$

Первая стадия завершается при некотором γ_1 и $\sqrt{N_1} = K/\lambda_1$. При $\gamma > \gamma_1$ следует интегрировать (5) с постоянным λ, что приводит к

$$N = m/h\lambda_1 + (N_1 - m/h\lambda_1)\exp[-(\gamma - \gamma_1)h/b]. \tag{7}$$

По экспериментальным данным для ячеистых структур в меди, приведенным в [3], можно заключить, что $m = 1{,}25$ и $h = 0{,}6\ b$. Столь малая величина эффективного h требует пояснения. Сечение аннигиляции для однородного распределения составляет около $10b$ [4], но для неоднородных структур с разделенными дислокациями противоположных знаков h следует принимать равным удвоенному произведению этой величины на вероятность встречи с дислокацией противоположного знака при захвате стенкой. Для меди эта вероятность оказывается порядка 0,03, что свидетельствует о довольно высокой степени упорядоченности разделения и корреляции положений источников и стоков дислокаций в ячеистой структуре. Величина h может меняться в процессе деформирования, если последнее сопровождается заметным изменением упорядоченности стенок ячеек.

Соотношения (6), (7) в принципе решают вопрос о конкретном виде кинетического уравнения (1в) для ячеистой структуры. Трудность состоит в том, что в настоящее время еще недостаточно данных о конкретных значениях точек смены режима γ_1 для различных металлов и зависимости их от режима деформирования. Например, при медленном деформировании меди $K = 16$, $\lambda_1 = 2$ мкм и $\gamma_1 = 0{,}05$. Но при ударно-волновом упрочнении меди ячейки в ней измельчаются до 0,15 мкм [5]. Судя по сильной зависимости положения перехода от температуры деформирования и температуры плавления металла, это явление определяется термоактивированным переползанием дислокаций. Если это верно, то в условиях высокоскоростного деформирования переползанием дислокаций можно было бы пренебречь, используя (6) до деформаций, по крайней мере, порядка 0,2 ... 0,4.

Для ячеистой структуры плотность подвижных дислокаций n отличается от средней плотности N, так что (1а) следует использовать в форме $\dot{\gamma} = bnv$, и возникает проблема определения n. Применим для этой цели термодинамический подход, предполагая, что из всевозможных режимов, обеспечивающих заданную скорость деформирования, отбирается тот, который минимизирует сопротивление деформированию. Термодинамический подход в такой форме впервые был использован в [6], в результате чего удалось, в частности, качественно объяснить эмпирическую формулу (3).

Итак, предполагаем, что при $\tau > Y$ внутренние объемы ячеек заполняются подвижными дислокациями с плотностью n. В результате уменьшается вклад в τ ячеечного каркаса, определяемый величиной $(N - n)$, но появляются соответствующий вклад подвижных дислокаций и вязкостная составляющая. Подвижные дислокации во внутренних объемах ячеек не воспринимают напряжения, приложенного к ячеечному каркасу, и для них напряжение взаимозапирания определяется только величиной n. Для закона движения (2а)

$$\tau = Y_0 + \alpha Gb(\sqrt{N-n} + \sqrt{n}) + \dot{\gamma}B/nb^2. \tag{8}$$

Применяя к (8) условие

$$d\tau/dn\big|_{\dot{\gamma},N=\text{const}} = 0,$$

получаем

$$\frac{\alpha Gb}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{N-n}}\right) - \frac{\dot{\gamma}B}{n^2b^2} = 0. \tag{9а}$$

Аналогично для закона движения (2б)

$$\frac{\alpha Gb}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{N-n}}\right) + \frac{nY_0}{\ln^2\left(\dot{\gamma}/bnv_0\right)} = 0. \tag{9б}$$

Таким образом, при деформировании в режиме ячеистой структуры вместо системы (1) следует использовать кинетическое уравнение (6) (или (7)) и уравнения (8), (9), из которых путем исключения n определяется значение $\dot{\gamma}$, соответствующее текущим значениям τ, N. Использование уравнений (9) в численных исследованиях не представляет особых затруднений. Эти уравнения применимы до тех пор, пока n не превышает некоторой критической доли N, т. е. пока ячеистая структура устойчива. В частности, при $n \ll N$ получаем оценку

$$n \simeq (2\dot{\gamma}B/\alpha Gb^3)^{2/3}.$$

Поступила 10 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Taylor J. W.** Dislocation dynamics and dynamic yielding.— J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, N 10.
2. **Holt D. L.** Dislocation cell formation in metals.— J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, N 8.
3. **Beukel van den, A.** Dislocation production in cold worked copper.— Scripta Met., 1979, vol. 13, N 1.
4. **Владимиров В. И., Кусов А. А.** Оценка радиуса аннигиляции дислокаций.— ФТТ, 1981, т. 23, № 4.
5. **Murr L. E.** Work hardening and the pressure dependence of dislocation density and arrangements in shock loaded nickel and copper.— Scripta Met., 1978, vol. 12, N 2.
6. **Ханнанов Ш. Х.** Термодинамический подход в дислокационной теории ползучести.— ФММ, 1979, т. 47, № 1.

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ВИНТОВОЙ ДИСЛОКАЦИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

Л. М. ЗУБОВ, С. И. МОИСЕЕНКО

(*Ростов-на-Дону*)

Исследуются закономерности распространения волн в бесконечном полом круговом цилиндре с начальными напряжениями, обусловленными наличием в цилиндре винтовой дислокации. Начальное напряженное состояние, в котором боковые поверхности цилиндра свободны от нагрузки, определяется из точного решения задачи о винтовой дислокации при конечных деформациях. Это решение найдено для произвольного изотропного нелинейно-упругого несжимаемого (в том числе неоднородного по радиальной координате) материала. Составлены уравнения малых колебаний относительно описанного состояния равновесия. Эти уравнения допускают решения в виде диспергирующих волн, распространяющихся вдоль оси цилиндра. Построение дисперсионного соотношения сводится к решению однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое выполнено численным методом. В числовых примерах используется модель материала с упругим потенциалом в форме Муни.

Начальное состояние. Изохорическая деформация сдвига и растяжения цилиндрической панели задается соотношениями [1]

$$\lambda\left(r^2 - r_0^2\right) = \rho^2 - \rho_0^2,\ \theta = \varphi,\ z = \alpha\varphi + \lambda\zeta, \tag{1}$$