3. **Цвелодуб О. Ю.** Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 4.
4. **Демехин Е. А.** Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.
5. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободными поверхностями: Сб. науч. тр.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР.— 1985.
6. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде.— Новосибирск, 1988.— (Препр./ИТ СО АН СССР; 188—88).

г. Новосибирск *Поступила 25/VII 1988 г., в окончательном варианте — 28/II 1989 г.*

УДК 532.5

О. С. Рыжов, И. В. Савенков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Концепция свободного взаимодействия пограничного слоя [1—3] оказалась весьма плодотворной в различных областях механики жидкости и газа [4, 5], в том числе в теории гидродинамической устойчивости [6, 7]. Она описывает структуру волн Толлмина — Шлихтинга в пределе больших чисел Рейнольдса и позволяет решить ряд новых задач о восприимчивости вязкого пристеночного подслоя по отношению к трехмерным возмущениям, генерируемым локализованным в пространстве источником [8, 9].

Как известно, однако, теория свободного взаимодействия в своем классическом виде предсказывает устойчивость прямых волн, распространяющихся в направлении набегающего потока, при условии, что его скорость сверхзвуковая. С другой стороны, предложенные к настоящему времени уравнения для трансзвукового диапазона скоростей оказались неприменимыми к решению задач об устойчивости вязких течений, хотя возникновение отрыва с их помощью устанавливается правильно [10]. Очевидно, требуется дополнительный анализ исходной системы уравнений Навье — Стокса в указанном диапазоне с целью сохранить члены, определяющие потерю устойчивости пограничного слоя. Такой анализ излагается ниже.

1. Уравнения движения. Рассмотрим обтекание плоской пластинки равномерным потоком сжимаемого газа со скоростью U^*_∞, мало отличающейся от скорости $a_\infty{}^*$ распространения звуковых волн. Допустим, что на расстоянии L^* от ее передней кромки имеется локальная неоднородность (шероховатость), течение в окрестности которой соответствует режиму свободного взаимодействия [1—3]. Пусть $\nu_\infty{}^*$ — кинематическая вязкость газа. Введем число Рейнольдса $R = U_\infty{}^*L^*/\nu_\infty{}^* \to \infty$ и выразим через него малый параметр $\varepsilon = R^{-1/8}$. Положим $\delta = (\mathrm{M}_\infty{}^2 - 1)/K_\infty{}'$, $K_\infty{}' = \mathrm{const}$ и в дальнейшем считаем δ вторым малым параметром, фиксируя тем самым околозвуковой характер набегающего потока с числом Маха M_∞, близким к 1. Задача состоит в установлении такой связи между ε и δ, при которой получающиеся в результате приближенные уравнения были способны описать устойчивость пограничного слоя и развитие в нем самовозбуждающихся колебаний.

В режиме свободного взаимодействия время t^* и пространственные координаты x^*, y^* нормируются следующим образом [1—3]:

$$t^* = (L^*/U^*{}_\infty)\varepsilon^2\delta^{-1/4}\beta^{-1}t', \tag{1.1}$$
$$x^* = L^*(1 + \varepsilon^3\delta^{-3/8}x'),\quad y^* = L^*\varepsilon^5\delta^{-1/8}y',$$

где дополнительный параметр β определяется масштабом частоты, а компоненты u^*, v^* и давление p^* раскладываются в асимптотические последовательности

$$u^* = U_\infty{}^*[\varepsilon\delta^{-1/8}u'(t',\ x',\ y') + \ldots], \tag{1.2}$$
$$v^* = U^*_\infty[\varepsilon^3\delta^{1/8}v'(t',x',y') + \ldots],\quad p^* = p^*_\infty + \rho^*_\infty U^{*2}_\infty[\varepsilon^2\delta^{-1/4}p'(t',x',y') + \ldots].$$

Поскольку давление поперек пограничного слоя не изменяется, отношение $T_w{}^*/T_\infty{}^*$ температуры $T_w{}^*$ стенки к температуре $T_\infty{}^*$ набегающего потока обратно пропорционально отношению $\rho_w{}^*/\rho_\infty{}^*$ аналогичных значений плотности ρ^*. С учетом этого обстоятельства уравнения для нижней пристеночной области течения приобретают вид

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} = 0, \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{T_w^*}{T_\infty^*}\right)^{-1}\left(\beta\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + C\frac{T_w^*}{T_\infty^*}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}.$$

В отличие от классических уравнений Прандтля градиент давления здесь неизвестен заранее и вычисляется вместе с полем скоростей. Для простоты пластинка принята термически изолированной, буквой C обозначена постоянная в законе Чепмена $\lambda_w{}^*/\lambda_\infty{}^* = CT_w{}^*/T_\infty{}^*$, связывающем первый коэффициент вязкости $\lambda^* = \nu^*\rho^*$ с температурой.

Во внешней области свободного взаимодействия эффекты вязкости и теплопроводности в первом приближении пренебрежимо малы, в силу чего течение в ней безвихревое. Поперечную координату в этой области нормируем посредством $y^* = L^*\varepsilon^3\delta^{-7/8}y'_1$, а для потенциала φ^* напишем разложение

$$\varphi^* = U_\infty{}^*L^*[x' + \varepsilon^5\delta^{-5/8}\varphi_1{}'(t', x', y') + \ldots]. \tag{1.4}$$

Ограничив дальнейший анализ неравенством $\varepsilon\delta^{-1/8} \ll 1$ и отбросив в исходных уравнениях Навье — Стокса заведомо малые члены, имеем

$$2\beta\frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial t'\partial x'} + \varepsilon^{-1}\delta^{1/8}\left(\delta K'_\infty + 2\varepsilon^2\delta^{-1/4}\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x'}\right)\frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial x'^2} + \varepsilon^{-1}\delta^{9/8}\frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial y_1'^2} = 0. \tag{1.5}$$

Попытка сохранить здесь все слагаемые ведет к оценкам $\delta \sim \varepsilon^{8/5}$ и $\beta \sim \varepsilon^{4/5}$, но тогда исчезает член с $\partial u'/\partial t'$, входящий в левую часть последнего из уравнений (1.3). Формулируемая в результате асимптотическая теория нестационарных трансзвуковых течений правильно предсказывает отрыв пограничного слоя, но непригодна для изучения его устойчивости, поскольку ведущая роль в развитии волновых процессов принадлежит в этом случае внешней области, где поле скоростей потенциально [10].

Альтернативный подход определяется равенством $\beta = 1$. Отсюда следует $\delta \sim \varepsilon^{8/9}$, что вызывает необходимость пренебречь нелинейным членом $(\partial\varphi'_1/\partial x')(\partial^2\varphi'_1/\partial x'^2)$ в уравнении (1.5), учет которого составляет сердцевину теории стационарного движения газа в околозвуковом диапазоне скоростей, если влияние диссипативных факторов (вязкости и теплопроводности) полагается несущественным. Выбрав для простоты $\delta = \varepsilon^{8/9}$, в пределе $\varepsilon \to 0$ запишем линейное уравнение

$$2\frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial t'\partial x'} + K'_\infty\frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial y'^2} = 0 \tag{1.6}$$

с параметром $K'_\infty = (M_\infty{}^2 - 1)/\varepsilon^{8/9}$.

Хотя основной толще пограничного слоя в теории свободного взаимодействия отводится пассивная роль, она используется в процедуре сращивания решений для вязкого пристеночного подслоя и потенциальной области потока. Предельный переход, в котором $y'_1 \to 0$, а $y' \to \infty$, дает

$$\frac{\partial\varphi_1'(t', x', 0)}{\partial x'} = -p'(t', x'), \quad \frac{\partial\varphi_1'(t', x', 0)}{\partial y_1'} = -\frac{\partial A'(t', x')}{\partial x'}, \tag{1.7}$$

$$u' - \lambda C^{-1/2}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)y' \to \lambda C^{-1/2}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)A' \text{ при } y' \to \infty.$$

Здесь функция $A'(t', x')$ имеет смысл мгновенного смещения линий тока в промежуточной области течения, постоянная $\lambda = 0{,}3321$ характеризует безразмерное трение в решении Блазиуса для невозмущенного пограничного слоя.

Опираясь на групповые свойства уравнений (1.3), (1.6) и условий сращивания (1.7), исключим содержащиеся в них константы C, λ и отношение $T_w{}^*/T_\infty{}^*$. С этой целью совершим аффинное преобразование

(1.8) $t' = 2^{-2/9}C^{2/9}\lambda^{-14/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{8/9}t$, $x' = 2^{-3/9}C^{1/3}\lambda^{-4/3}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{4/3}x$,

$$y' = 2^{-1/9}C^{11/18}\lambda^{-7/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{13/9}y,\quad y_1' = 2^{-7/9}C^{5/18}\lambda^{-13/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{10/9}y_1$$

независимых переменных (1.1) и поперечной координаты y'_1 для потенциальной части потока. Что касается искомых функций, входящих в (1.2), (1.4), и толщины вытеснения A' из (1.7), преобразования для них гласят

(1.9) $u' = 2^{-1/9}C^{1/9}\lambda^{2/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{4/9}u$, $v' = 2^{1/9}C^{7/18}\lambda^{7/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{5/9}v$,

$$p' = 2^{-2/9}C^{2/9}\lambda^{4/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{-1/9}p,$$

$$A' = 2^{-1/9}C^{11/18}\lambda^{-7/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{13/9}A,\quad \varphi'_1 = 2^{-5/9}C^{5/9}\lambda^{-8/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{11/9}\varphi_1.$$

В результате система уравнений

(1.10) $$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0,\quad \partial p/\partial y = 0,$$

$$\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y = -\partial p/\partial x + \partial^2 u/\partial y^2,$$

управляющая течением в вязком пристеночном подслое, вместе с предельными условиями

(1.11) $$u \to y,\ p \to 0 \text{ при } x \to -\infty,\ u - y \to A(t, x) \text{ при } y \to \infty$$

приобретает канонический вид, не зависящий от исходных параметров задачи. Подобие внешнего поля скоростей, потенциал φ_1 которого удовлетворяет уравнению

(1.12) $$\partial^2\varphi_1/(\partial t\partial x) + K_\infty\partial^2\varphi_1/\partial x^2 - \partial^2\varphi_1/\partial y_1{}^2 = 0,$$

определяется единственным отличным от ± 1 коэффициентом

(1.13) $$K_\infty = 2^{-8/9}C^{-1/9}\lambda^{-2/9}(T_w{}^*/T_\infty{}^*)^{-4/9}(M_\infty{}^2 - 1)/\varepsilon^{8/9},$$

поскольку краевые условия для него записываются как

(1.14) $$\frac{\partial\varphi_1(t, x, 0)}{\partial x} = -p(t, x);\quad \frac{\partial\varphi_1(t, x, 0)}{\partial y_1} = -\frac{\partial A(t, x)}{\partial x}.$$

2. Задача на собственные значения. Начнем с внутренних волн в рассматриваемой механической системе, состоящей из вязкого пристеночного подслоя и потенциального течения. С этой целью предельные соотношения (1.11) для системы уравнений (1.10) дополним условиями

(2.1) $$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0$$

прилипания газа к поверхности пластинки. В результате получается замкнутая задача, куда входит также уравнение (1.12) вместе с краевыми условиями (1.14), содержащими неизвестную заранее функцию $A(t, x)$.

Выделим в решении часть $u = y$, $v = p = A = \varphi_1 = 0$, описывающую сдвиговый поток у пластинки, а наложенные на него колебания будем считать пропорциональными амплитудному параметру a. Далее, как обычно, положим

(2.2) $$(u - y,\ v,\ p,\ A,\ \varphi_1) = a(u_0,\ v_0,\ p_0,\ A_0,\ \varphi_0)\exp(\omega t + ikx).$$

Подставляя (2.2) в уравнения для вязкого пристеночного подслоя и переходя к пределу по $a \to 0$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование которой с учетом (2.1) дает [6,7]

$$\Phi(\Omega) = (ik)^{1/3}p_0/A_0,$$

$$\Phi = \frac{d\mathrm{Ai}(\Omega)}{d\zeta}\left[\int_\Omega^\infty \mathrm{Ai}(\zeta)\,d\zeta\right]^{-1},\quad \Omega = \omega(ik)^{-2/3}$$

($\mathrm{Ai}(\zeta)$— функция Эйри, экспоненциально затухающая в секторе $-\pi/3 < \arg\zeta < \pi/3$).

Отношение p_0/A_0 устанавливается из решения задачи (1.12), (1.14) для верхней потенциальной области течения, оно выражает связь между избыточным давлением и толщиной вытеснения в трансзвуковом диапазоне скоростей. Легко видеть, что $p_0/A_0 = k^2/\lambda(\omega, k)$; $\lambda = \sqrt{ik(\omega + ikK_\infty)}$, причем $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ в силу требования о вырождении возмущений при $y_1 \to \infty$, $x = \mathrm{const}$.

Специфика рассматриваемого диапазона состоит в том, что члены с производными по времени входят как в систему (1.10) для вязкого пристеночного подслоя, так и в уравнение (1.12), которое управляет развитием внешних потенциальных колебаний. Структура возникающих волн формируется в результате взаимодействия двух существенно нестационарных полей, из которых только нижнее вихревое. Давление не только индуцируется ростом или уменьшением толщины вытеснения и, в свою очередь, активно влияет на ее изменения, но служит также решающим фактором в передаче сигналов во внешней области. Это обстоятельство находит свое отражение в том, что условие свободного взаимодействия, как и правая часть вытекающего из него дисперсионного соотношения

$$\Phi(\Omega) = Q(\omega, k), \quad Q = -(ik)^{7/3}/\lambda(\omega, k) \tag{2.3}$$

явно зависит от частоты ω. Подобная ситуация не встречалась ранее в асимптотическом анализе, опирающемся на многослойное деление зоны возмущенного движения вязкой жидкости, включая до- и сверхзвуковой пограничные слои [6, 7].

3. Дисперсионное соотношение. Начнем с замечания, что при любом $k \to 0$ все решения Ω дисперсионного соотношения можно фиксировать посредством $\Omega \to \Omega_n^{(0)}$ ($\Omega_n^{(0)}$ — n-й корень производной $d\mathrm{Ai}(\Omega)/d\zeta$). Следовательно, дисперсионное соотношение определяет счетный набор дисперсионных кривых $\omega_n = (ik)^{2/3}\Omega_n$, при этом в пределе малых волновых чисел они ведут себя как аналогичные кривые для до- и сверхзвукового пограничных слоев [6, 7].

Пусть теперь k в правой части (2.3) принимает действительные значения, причем в силу симметрии этого соотношения достаточно ограничиться полуосью $k > 0$. Чтобы найти частоту нейтральных колебаний газа с постоянной во времени амплитудой, положим $\omega = -i\omega_0$, где ω_0 — вещественное число. Подразумевая под $D = \omega_0 - kK_\infty$, из равенства $\arg Q(-i\omega_0, k) = \begin{cases} \pi/6 & \text{при } D > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } D < 0 \end{cases}$ заключаем сразу, что дисперсионное соотношение в указанном случае допускает единственное решение, удовлетворяющее системе

$$\omega_0 k^{-2/3} = \omega'_* (k'_*)^{-2/3}, \quad k^{7/3}/\sqrt{k(\omega_0 - kK_\infty)} = (k'_*)^{4/3}$$

($\omega'_* = 2{,}298$ и $k'_* = 1{,}0005$ — соответственно частота и волновое число нейтральных колебаний пограничного слоя в несжимаемой жидкости [6, 7]). Асимптотики решения $\omega_0 = \omega_*(K_\infty)$, $k = k_*(K_\infty)$ этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega_* = \omega'_* |K_\infty|^{1/4}, \quad k_* = k'_* |K_\infty|^{3/8} \quad \text{при } K_\infty \to -\infty, \\ &\omega_* = k_* K_\infty, \quad k_* = k'_* \left(\omega'_*/(k'_* K_\infty)\right)^3 \quad \text{при } K_\infty \to \infty. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Дальнейший анализ (2.3) базируется на итерационном методе Ньютона, при помощи которого вычислялись корни $\Omega_n(k)$; в качестве начального приближения для них при $k \ll 1$ выбирались величины $\Omega_n^{(0)}$. Все корни Ω_n, начиная со второго, дают устойчивые колебания: $\mathrm{Re}\,\omega_n(k) \leqslant 0$ для любых вещественных k и $n \geqslant 2$. Первый же корень Ω_1 порождает дисперсионную кривую $\omega_1(k)$, которая при $k = k_*$ пересекает отрицательную мнимую полуось в точке $\omega_1 = -i\omega_*$, соответствующей нейтральным пульса-

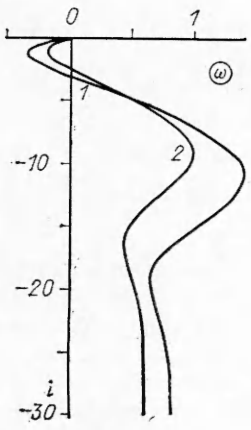

Рис. 1

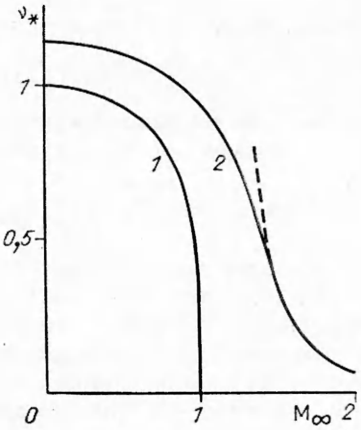

Рис. 2

циям. Возмущения становятся неустойчивыми при $k > k_*$, когда $\operatorname{Re}\omega_1(k) > 0$. Траектории этого корня в комплексной плоскости ω показаны на рис. 1 для $K_\infty = -1$ (*1*) и 1 (*2*).

В качественном отношении ход обеих кривых напоминает тот, какой получается для пограничного слоя в несжимаемой жидкости [6, 7], однако есть и существенное различие. В самом деле, инкремент $\operatorname{Re}\omega_1$, характеризующий усиление волн Толлмина — Шлихтинга в несжимаемой жидкости, при $k \to \infty$ стремится к постоянному значению $\sqrt{2}/2$ согласно асимптотике

$$\omega_1 = -ik^2 + (\sqrt{2}/2)(1 - i) + \ldots \tag{3.2}$$

Асимптотика же первого корня дисперсионного соотношения (2.3), справедливого в трансзвуковом диапазоне скоростей, гласит:

$$\omega_1 = -i(k^{5/3} + (1/3)K_\infty k + (1/3)K^2_\infty k^{1/3}) + (\sqrt{2}/3)(1 - i)k^{1/6} + \ldots \tag{3.3}$$

при условии, что $k \to \infty$, а величина K_∞ фиксирована. Как следует отсюда, инкремент $\operatorname{Re}\omega_1 \to \infty$ как $\sqrt{2}k^{1/6}/3$, хотя его рост при умеренных k проявляется слабо и не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на вид кривых, изображенных на рис. 1.

Диктуемое асимптотиками (3.2) и (3.3) предельное поведение $\operatorname{Re}\omega_1$ противоречит известному факту, что при $k \to \infty$ должен осуществляться переход к устойчивым колебаниям с экспоненциально убывающей амплитудой, хотя для несжимаемого пограничного слоя это противоречие выражено менее отчетливо. Переход связан с существованием второй пары критических значений частоты и волнового числа, соответствующих верхней ветви кривой нейтральной устойчивости. Для несжимаемой жидкости асимптотический анализ волн, принадлежащих окрестности этой ветви, выполнен в [11, 12]. Он базируется на более сложной структуре возмущений, ведущей к перенормировке как независимых переменных, так и искомых функций. Последнее обстоятельство позволяет установить масштабы упомянутой второй пары критических значений частоты и волнового числа, вычислить эти величины [13] и продолжить формулу (3.2) в окрестность верхней ветви нейтральной кривой при помощи метода сращивания асимптотических разложений. Аналогичный анализ требуется проделать для трансзвукового диапазона скоростей, но развитие неустойчивых пульсаций с характерными временами и длинами, задаваемыми соотношениями (1.1), будет определяться ярко выраженным максимумом $\operatorname{Re}\omega_1$ при $k \sim 3 \div 4$ (см. рис. 1).

Оценим в заключение диапазон чисел Маха, в котором применима изложенная теория. Пусть ν^* — частота в исходной системе единиц измерения, а ν — безразмерная частота, нормированная посредством

$$\nu = \left(\nu^* L^* / U_\infty^*\right) \varepsilon^2 C^{1/4} \lambda^{-3/2} \left(T_w^* / T_\infty^*\right) \omega_*'^{-1}.$$

Последняя удобна тем, что ее значение ν_* для нейтральных колебаний, распространяющихся в дозвуковом пограничном слое с $M_\infty < 1$, будет [6, 7]

$$\nu_* = \left(1 - M_\infty^2\right)^{1/4}. \tag{3.4}$$

Как показывает простая проверка, эта величина совпадает в силу преобразования (1.8) для времени с предписываемым первой из формул (3.1) пределом ω_*, к которому стремится при $K_\infty \to -\infty$ рассматривавшаяся выше частота ω_0. Из определения (1.13) видно, что $K_\infty \to -\infty$, когда разность $1 - M_\infty^2$ положительна и фиксирована, а параметр $\varepsilon \to 0$. Таким образом, критическая частота колебаний, распространяющихся в трансзвуковом потоке, с уменьшением K_∞ сопрягается с критической частотой, вычисленной для дозвуковых течений. Вспоминая аффинные преобразования (1.9), можно убедиться, что аналогичное утверждение справедливо по отношению к компонентам вектора возмущенной скорости и избыточному давлению. Иными словами, смешанная производная $\partial^2\varphi_1/\partial t \partial x$ в уравнении (1.12) становится пренебрежимо малой, если $K_\infty \to -\infty$.

Что касается скорости выхода частоты ν_* на свои предельные значения, то она оценивается следующим образом. В трансзвуковом диапазоне скоростей

$$\nu_* = \Delta\omega_*(K_\infty), \quad K_\infty = \left(M_\infty^2 - 1\right)/\Delta^4, \tag{3.5}$$

$$\Delta = [4\varepsilon^2 C^{1/4} \lambda^{1/2} (T_w^*/T_\infty^*)]^{1/9}.$$

Параметр ε слабо меняется при варьировании R, в интересующем нас диапазоне чисел Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода можно считать $\varepsilon \approx 0{,}2$. Отношение T_w^*/T_∞^* для термически изолированной пластинки подчиняется закону Крокко [14]

$$T_w^*/T_\infty^* = 1 + [(\varkappa - 1)/2] M_\infty^2,$$

т. е. $T_w^*/T_\infty^* \to (\varkappa + 1)/2$ при $M_\infty \to 1$ ($\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона). Положим, что пластинка обтекается воздухом с $T_\infty^* = 293$ K. Тогда $\varkappa = 1{,}4$, а $C \approx 0{,}79$; в результате получим $\Delta \approx 0{,}778$. Число Маха M_∞ пробегает значения от 0 до 2 при изменении параметра подобия K_∞ в интервале $-2{,}73 \leqslant K_\infty \leqslant 8{,}19$, отсюда видно, что достичь предела $K_\infty \to -\infty$ в практических условиях невозможно.

Кривые, изображающие зависимости (3.4) и (3.5), помечены на рис. 2 цифрами *1* и *2* соответственно. Хотя с уменьшением M_∞ они сближаются друг с другом, из-за конечной величины ε отличие между ними при $M_\infty = 0$ составляет около 14 %. Выход критической частоты колебаний в трансзвуковом диапазоне скоростей на свою дозвуковую асимптотику совершается медленно. Напротив, выход на асимптотику $\nu_* = \Delta^9 \left(\omega_*'/k_*'\right)^2 / \left(M_\infty^2 - 1\right)$, которая устанавливается второй из формул (3.1) для сверхзвукового пограничного слоя и показана на рис. 2 пунктиром, происходит весьма быстро. Уже при $M_\infty = 1{,}5$ кривая *2* практически сливается с этим пунктиром.

Наиболее существенный результат развитой теории состоит в непрерывном переходе критической частоты (так же, как и остальных зависимостей) через пороговое значение $M_\infty = 1$. Область ее применимости охватывает, таким образом, широкий диапазон дозвуковых и умеренных сверхзвуковых скоростей. Дополнительный источник ошибок вносится в теорию при вычислении частоты ω_*' нейтральных колебаний пограничного слоя в несжимаемой жидкости по предельному значению, когда $R \to \infty$. Этот источник следует иметь в виду, сопоставляя предсказания асимптотической теории с данными измерений в аэродинамических трубах [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейланд В. Я.** К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1969.— № 4.
2. **Stewartson K., Williams P. G.** Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1969.— V. 312, N 1509.
3. **Messiter A. F.** Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math.— 1970.— V. 18, N 1.
4. **Smith F. T.** Steady and unsteady boundary-layer separation // Annual Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, Calif., 1986.— V. 18.
5. **Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.** Асимптотическая теория отрывных течений.— М.: Наука, 1987.
6. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 6.
7. **Ryzhov O. S., Terent'ev E. D.** Vortex spots in the boundary layer // Fluid Dynam. Trans.— Warszawa, 1987.— V. 13.
8. **Рыжов О. С., Савенков И. В.** Асимптотическая теория волнового пакета на пластинке // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 5.
9. **Рыжов О. С., Савенков И. В.** Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничном слое на пластинке // ЖВММФ.— 1988.— Т. 28, № 4.
10. **Ryzhov O. S.** Asymptotic methods in transonic flow theory // Proc. IUTAM Symp. Transsonicum III, Göttingen, 1988.— Berlin et al.: Springer, 1989.
11. **Жук В. И., Рыжов О. С.** Об асимптотике решений уравнения Орра — Зоммерфельда, задающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 6.
12. **Жук В. И.** Об асимптотике решений уравнения Орра — Зоммерфельда в областях, примыкающих к двум ветвям нейтральной кривой // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 4.
13. **Bodonyi R. J., Smith F. T.** The upper branch stability of the Blasius boundary layer, including non-parallel flow effect // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1981.— V. 375, N 1760.
14. **Stewartson K.** The theory of laminar boundary layers in compressible fluids.— Oxford: Clarendon Press, 1964.
15. **Козлов В. В., Рыжов О. С.** Восприимчивость пограничного слоя: асимптотическая теория и эксперимент // Сообщения по прикладной математике.— М.: ВЦ АН СССР, 1988.

г. Москва *Поступила 8/VI 1989 г.*

УДК 532.526

Г. И. Бурдэ

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассматривается один из случаев, когда решение уравнения Фокнера — Скэн и его осесимметричного аналога получается в замкнутой форме.

1. Для стационарного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости со степенным распределением скорости на внешней границе слоя $U = cx^m$ при задании выражений для компонент скорости u и v в виде

$$u = cx^m f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\nu c\alpha}\, x^\nu \left(f + \frac{\gamma}{\alpha}\eta f'\right), \tag{1.1}$$

$$\eta = \sqrt{\alpha c/\nu}\, y x^\nu, \ \alpha = (m+1)/2, \ \gamma = (m-1)/2$$

приходим к известному уравнению Фокнера—Скэн [1]

$$f''' + ff'' = \beta(f'^2 - 1), \ \beta = 2m/(m+1) \tag{1.2}$$

при граничных условиях

$$f = f_0, \ f' = 0(\eta = 0), \ f' = 1(\eta = \infty), \tag{1.3}$$