УДК 534.2

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАПРЯЖЕННОМ ТРИКЛИННОМ СЛОЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ МЕЖДУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ УПРУГИМ И НЕОДНОРОДНЫМ ПОРИСТО-УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

П. Малла Редди, М. Венугопал*, Г. Раджита

Университет Какатии, Варангал, Индия
* Государственный колледж Какатии, Варангал, Индия
E-mails: mperati@yahoo.com, venukva@yahoo.com, rajitha.akshu@gmail.com

Исследуется распространение сдвиговых волн в первоначально напряженном триклинном слое, расположенном между двумя полупространствами. Верхнее полупространство полагается трансверсально-изотропным упругим, нижнее — неоднородным изотропным пористо-упругим. Для нижнего полупространства задача сводится к дифференциальному уравнению Уиттекера. Для слоя и полупространств построены частотные уравнения. Исследованы зависимости фазовой скорости от начального напряжения, пористости и неоднородности материала.

Ключевые слова: сдвиговая волна, триклинный слой, трансверсально-изотропное полупространство, неоднородность, пористо-упругое полупространство, начальное напряжение, пористость, фазовая скорость.

DOI: 10.15372/PMTF20220209

Введение. Недра земли состоят из слоев, структура и температура которых различны. Бóльшая часть информации о недрах земли и причинах землетрясений получена на основе исследований сейсмических волн расширения (P-волн) и сдвиговых волн (SH-волн). Волны расширения вызывают изменение материальных объемов, в то время как сдвиговые волны вызывают изменение формы материальных объемов. Результаты изучения горизонтально поляризованной сдвиговой волны (SH-волны) используются в сейсмологии, гражданском строительстве, механике горных пород и геофизике. Исследованию дисперсии SH-волн в упругих твердых телах посвящено большое количество работ. В [1] приведен обзор работ, в которых изучалось распространение сейсмических волн. В [2] получено точное решение уравнения распространения SH-волны в неоднородных средах. В работе [3] изучено распространение сейсмических волн в анизотропных слоях, в [4] — распространение упругих волн в трансверсально-изотропных средах. Исследование дисперсии, отражения и преломления волн в триклинных и моноклинных слоях земной ко-

Работа выполнена при финансовой поддержке Департамента науки и технологий, Фонда модернизации научно-технической инфраструктуры, Университета Какатии (грант N SR/FST/MSI-101/2014), а также Комиссии по грантам университетов при правительстве Индии (грант N F.15-1/2015-17/PDFWM-2015-17-TEL-34525 (SA-II)).

© Малла Редди П., Венугопал М., Раджита Г., 2022

ры при наличии в них неравномерностей, вязкости и гофрированной границы проведено в работах [5–9]. При изучении процесса распространения SH-волн использовались метод преобразования Фурье, метод конечных разностей, методы, основанные на использовании функции Грина [10–12]. В работах [13–15] исследовалось влияние неоднородности вязкости и коэффициента песчаности на процесс распространения SH-волны. Дисперсия SH-волны в магнитоупругом анизотропном слое земной коры, расположенном над нерегулярным неоднородным полупространством, изучалась в [16]. В работах [17, 18] исследовалось распространение SH-волны в слоистой среде, расположенной между двумя упругими полупространствами и двумя анизотропными слоями, с учетом наличия гофрированной границы, вязкости, неоднородности материала и гравитационных сил. Рассеяние сейсмических волн в триклинной среде изучалось в работах [19, 20]. Во многих работах исследовалось распространение SH-волн в пористо-упругих твердых телах в рамках теории Био [21, 22]. В работе [23] изучалось распространение SH-волн в пористом слое неравномерной толщины, в [24] — распространение SH-волн в пористо-упругой среде, расположенной между двумя упругими полупространствами. Распространение волн сдвига в магнитопористо-упругой диссипативной изотропной среде, расположенной между двумя пористо-упругими полупространствами, исследовалось в работе [25]. В [26] изучалось распространение сдвиговой волны в магнитопористо-упругой среде, расположенной между самоупрочняющейся пористо-упругой средой и пористо-упругим полупространством.

Нижние слои земной поверхности пропитаны жидкостью. Поры содержат отложения углеводородов, таких как газ и нефть. Характеристики распространения волн в анизотропных и изотропных средах существенно различны. Исследование распространения SH-волн в триклинной среде, расположенной между полубесконечным трансверсально-изотропным и пористо-упругим полупространствами, имеет большое значение при решении геофизических задач, его результаты могут быть использованы при разведке месторождений углеводородов, горных кристаллов и металлов в недрах земли.

В данной работе исследуется процесс распространения SH-волны в триклинной среде, расположенной между трансверсально-изотропным полупространством и изначально напряженным неоднородным пористо-упругим полупространством.

1. Постановка и решение задачи. Рассматривается процесс распространения SH-волны в заключенном между двумя полупространствами триклинном слое, в котором действует начальное напряжение P_1. Верхнее полупространство является трансверсально-изотропным упругим, нижнее — неоднородным пористо-упругим, в котором действует начальное напряжение P_2 (рис. 1). Таким образом расположены слои в земной коре. Вводится трехмерная система координат, начало которой расположено на границе раздела триклинного слоя и нижнего полупространства. Ось x параллельна слою, и ее направление совпадает с направлением распространения волны, ось z направлена вниз. Толщина триклинного слоя $(-H < z < 0)$ равна H. В верхнем полупространстве координата z изменяется в интервале $-\infty < z < -H$, в нижнем полупространстве — в интервале $z > 0$.

1.1. *Распространение волн в трансверсально-изотропном упругом верхнем полупространстве* $(-\infty < z < -H)$. Рассмотрим горизонтально поляризованную сдвиговую волну в верхней половине пространства, распространяющуюся в направлении оси x. При этом смещения точек среды происходят в направлении оси y. В этом случае выражения для компонент вектора смещения записываются следующим образом:

$$u_1 = w_1 = 0, \qquad v_1 = v_1(x, z, t).$$

Волновое уравнение имеет вид [22]

$$N_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + L_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

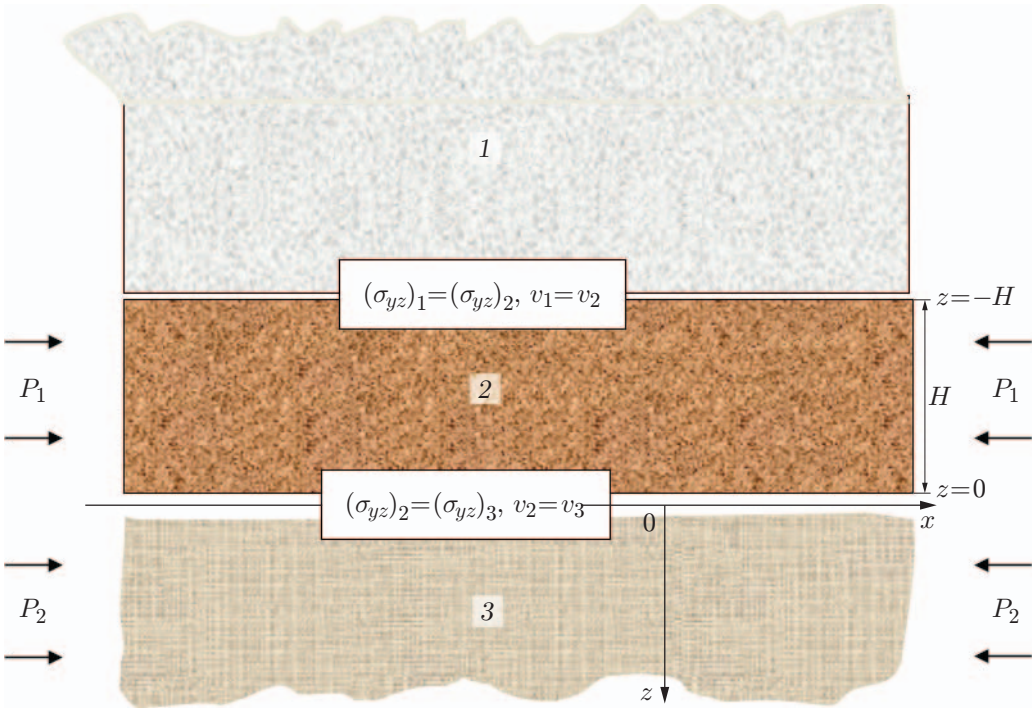

Рис. 1. Геометрия задачи:
1 — трансверсально-изотропное полупространство, *2* — триклинный слой, *3* — гетерогенное пористо-упругое полупространство

где N_1, L_1 — жесткости в направлении осей x, z соответственно; ρ_1 — плотность материала слоя.

Для SH-волны выражение для компоненты вектора смещения v_1 можно представить в виде

$$v_1(x,z,t) = f_1(z)\,\mathrm{e}^{i(kx-wt)}, \tag{1.2}$$

где k — волновое число; $w = ck$ — круговая частота; c — фазовая скорость; $f_1(z)$ — амплитуда. Подставляя (1.2) в (1.1) и решая полученное дифференциальное уравнение, находим амплитуду

$$f_1(z) = A_1\,\mathrm{e}^{S_1 z} + A_2\,\mathrm{e}^{-S_1 z}$$

($S_1 = \sqrt{N_1/L_1 - c^2/\beta_1^2}\,k$; $\beta_1 = \sqrt{L_1/\rho_1}$ — скорость сдвиговой волны, распространяющейся в верхнем полупространстве; A_1, A_2 — произвольные константы). Так как должно выполняться условие $f_1(z) \to 0$ при $z \to -\infty$, то

$$v_1(x,z,t) = A_1\,\mathrm{e}^{S_1 z}\,\mathrm{e}^{i(kx-wt)}\,. \tag{1.3}$$

1.2. *Распространение волн в триклинном слое* $(-H < z < 0)$. Пусть u_2, v_2, w_2 — компоненты вектора смещения в триклинном слое в направлениях осей x, y, z соответственно. Для анизотропного триклинного слоя соотношения между напряжениями и деформациями записываются в виде

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{6} C_{ij} e_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

где σ_i, e_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ — компоненты тензоров напряжения и деформации,

$$
\begin{gathered}
C_{ij} = C_{ji}, \quad \sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_2 = \sigma_{yy}, \quad \sigma_3 = \sigma_{zz}, \quad \sigma_4 = \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \\
\sigma_5 = \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_6 = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \\
e_1 = e_{xx}, \quad e_2 = e_{yy}, \quad e_3 = e_{zz}, \quad e_4 = e_{yz} = e_{zy}, \quad e_5 = e_{xz} = e_{zx}, \quad e_6 = e_{xy} = e_{yx}, \\
2e_{xy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}, \qquad 2e_{yz} = \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y}, \qquad 2e_{zx} = \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}.
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Для SH-волн, распространяющихся в направлении оси x со смещением точек среды в направлении оси y, выражения для компонент вектора смещения записываются в виде

$$
u_2 = w_2 = 0, \qquad v_2 = v_2(x, z, t). \tag{1.5}
$$

Из (1.4), (1.5) следует

$$
\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0.
$$

Уравнение движения в триклинном слое, находящемся под действием сжимающего напряжения P_1, в отсутствие массовых сил имеет следующий вид [2]:

$$
\frac{\partial\,(\sigma_6)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\sigma_4)}{\partial z} - \frac{P_1}{2}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \rho_2\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}. \tag{1.6}
$$

Из (1.4), (1.6) следует

$$
\Big(C_{66} - \frac{P_1}{2}\Big)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 2C_{46}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial z} + C_{44}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \rho_2\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}, \tag{1.7}
$$

где ρ_2 — плотность материала триклинного слоя; C_{44}, C_{46}, C_{66} — упругие константы материала триклинного слоя.

Решение уравнения (1.7) можно записать в следующем виде:

$$
v_2(x, z, t) = f_2(z)\,\mathrm{e}^{i(kx - wt)}\,. \tag{1.8}
$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получаем

$$
f_2(z) = \mathrm{e}^{-az/2}\,(A_3 \cos qz + A_4 \sin qz).
$$

Таким образом, выражение для смещения точек в SH-волне в триклинном слое имеет вид

$$
v_2(x, z, t) = \mathrm{e}^{-az/2}\,(A_3 \cos qz + A_4 \sin qz)\,\mathrm{e}^{i(kx - wt)}, \tag{1.9}
$$

где $q = \sqrt{b^2 - a^2/4}$; $a = 2ikC_{46}/C_{44}$; $b = \sqrt{P_1/(2C_{44}) - C_{66}/C_{44} + c^2/\beta_2^2}\,k$; $\beta_2 = \sqrt{C_{44}/\rho_2}$ — скорость сдвиговой волны в триклинном слое; A_3, A_4 — произвольные константы.

1.3. *Распространение волн в нижнем гетерогенном изотропном пористом упругом полупространстве* ($z > 0$). Пусть u_3, v_3, w_3 и U_3, V_3, W_3 — компоненты вектора смещения в твердом теле и жидкости соответственно. Компоненты векторов смещения точек в направлении оси y в SH-волне, распространяющейся вдоль направления оси x, записываются в следующем виде:

$$
u_3 = w_3 = 0, \quad v_3 = v_3(x, z, t), \quad U_3 = W_3 = 0, \quad V_3 = V_3(x, z, t).
$$

Уравнения движения для нижнего пористого упругого полупространства, находящегося под действием сжимающего напряжения P_2, имеют вид [21, 22]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\Big(N_3^*\,\frac{\partial v_3}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(N_3^*\,\frac{\partial v_3}{\partial z}\Big) - \frac{P_2^*}{2}\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = \rho_{11}^*\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \rho_{12}^*\,\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}, \\
\rho_{12}^*\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \rho_{22}^*\,\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} = 0,
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

где

$$N_3^* = N_3(1+\alpha z), \qquad \rho_{11}^* = \rho_{11}(1+\alpha z), \qquad \rho_{12}^* = \rho_{12}(1+\alpha z),$$
$$\rho_{22}^* = \rho_{22}(1+\alpha z), \qquad P_2^* = P_2(1+\alpha z), \tag{1.11}$$

N_3 — модуль сдвига; ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} — массовые коэффициенты; α — константа, имеющая размерность, обратную размерности длины.

Из (1.10), (1.11) следует

$$N_3(1+\alpha z)\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + N_3\alpha\,\frac{\partial v_3}{\partial z} + N_3(1+\alpha z)\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{P_2}{2}\,(1+\alpha z)\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = d_1(1+\alpha z)\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}, \tag{1.12}$$

где $d_1 = \rho_{11} - \rho_{12}^2/\rho_{22}$.

Для SH-волны решение уравнения (1.12) можно записать в виде

$$v_3(x,z,t) = f_3(z)\,\mathrm{e}^{i(kx-wt)}\,. \tag{1.13}$$

Из уравнений (1.12), (1.13) следует уравнение для функции $f_3(z)$

$$\frac{d^3 f_3(z)}{dz^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha z}\,\frac{df_3(z)}{dz} - k^2\Big(1 - \frac{P_2}{2N_3} - \frac{c^2}{\beta_3^2}\Big) f_3(z) = 0, \tag{1.14}$$

где $\beta_3 = \sqrt{N_3/d_1}$ — скорость сдвиговой волны в нижнем полупространстве. Используя безразмерные параметры $\gamma_{11} = \rho_{11}/\rho$, $\gamma_{12} = \rho_{12}/\rho$, $\gamma_{22} = \rho_{22}/\rho$ [21], выражение для β_3 можно записать в виде

$$\beta_3 = \sqrt{N_3/d_1} = \beta_0\sqrt{1/d},$$

где $\beta_0 = \sqrt{N_3/\rho}$; $\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$; $d = \gamma_{11} - \gamma_{12}^2/\gamma_{22}$ — параметр пористости.

Возможны следующие варианты изменения параметра d:

1) если нижнее полупространство не является пористым твердым телом, то $d \to 1$;

2) если нижнее полупространство представляет собой жидкость, то $d \to 0$;

3) если нижнее полупространство является пористо-упругим, то $0 < d < 1$.

В результате замены $f_3(z) = \varphi(z)/\sqrt{1+\alpha z}$ уравнение (1.14) принимает вид

$$\varphi''(z) + \Big[\frac{\alpha^2}{4(1+\alpha z)^2} - k^2\Big(1 - \frac{P_2}{2N_3} - \frac{c^2 d}{\beta_0^2}\Big)\Big]\varphi(z) = 0. \tag{1.15}$$

Переходя в уравнении (1.15) к новой независимой переменной $\eta = 2Fk(1+\alpha z)/\alpha$, получаем

$$\frac{d^2\varphi(\eta)}{d\eta^2} + \Big(\frac{1}{4\eta^2} + \frac{R}{\eta} - \frac{1}{4}\Big)\varphi(\eta) = 0, \tag{1.16}$$

где

$$R = \frac{k}{2F\alpha}\Big(\frac{c^2}{\beta_3^2} - 1 + \frac{P_2}{2N_3} + F^2\Big), \qquad F = \sqrt{1 - \frac{P_2}{2N_3} - \frac{c^2 d}{\beta_0^2}}\,.$$

Уравнение (1.16) является дифференциальным уравнением Уиттекера [27], решение которого имеет вид

$$\varphi(\eta) = A_5 W_{(R,0)}(\eta) + A_6 W_{(-R,0)}(\eta)$$

(A_5, A_6 — произвольные константы; $W_{(R,0)}(\eta)$, $W_{(-R,0)}(\eta)$ — функции Уиттекера).

Так как смещение должно обращаться в нуль при $z \to \infty$, то

$$\varphi(\eta) = A_5 W_{(R,0)}(\eta).$$

Следовательно,

$$f_3(z) = \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1+\alpha z}} = \frac{A_5 W_{(R,0)}(\eta)}{\sqrt{1+\alpha z}}\,;$$

$$v_3(x,z,t) = \frac{A_5 W_{(R,0)}(\eta)}{\sqrt{1+\alpha z}}\ \mathrm{e}^{i(kx-wt)}\,. \tag{1.17}$$

2. Граничные условия и частотное уравнение. На межслойных поверхностях задаются следующие граничные условия:

1) при $z = -H$ перемещения являются непрерывными, т. е. $v_1 = v_2$, напряжения также непрерывны: $(\sigma_{yz})_1 = (\sigma_{yz})_2$, следовательно

$$L_1\Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\Big)\Big|_{z=-H} = C_{44}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial z}\Big)\Big|_{z=-H}; \tag{2.1}$$

2) при $z = 0$ перемещения являются непрерывными, т. е. $v_2 = v_3$, напряжения также непрерывны: $(\sigma_{yz})_2 = (\sigma_{yz})_3$, следовательно,

$$C_{44}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial z}\Big)\Big|_{z=0} = N_3(1+\alpha z)\,\Big(\frac{\partial v_3}{\partial z}\Big)\Big|_{z=0}. \tag{2.2}$$

Подставляя выражения (1.3), (1.9), (1.17) в условия (2.1), (2.2), разлагая функцию Уиттекера и ее производную и сохраняя только линейные члены, получаем четыре уравнения для четырех неизвестных констант A_i $(i = 1,2,3,4)$. Из условия существования нетривиального решения этой системы следует соотношение

$$\mathrm{tg}\,(qH) = \frac{qC_{44}(L_1S_1X_1 - N_3X_2)}{X_1C_{44}^2b^2 + C_{46}X_1k^2 + N_3X_2S_1L_1}, \tag{2.3}$$

где

$$X_1 = \mathrm{e}^{-Fk/\alpha}\,\Big(\frac{\alpha}{8FK} - 1\Big), \qquad X_2 = \frac{-X_1(1+\alpha)}{2} - \mathrm{e}^{-Fk/\alpha}\,\frac{\alpha^2}{16F^2k^2}.$$

Соотношение (2.3) является частотным уравнением для SH-волны в триклинном слое.

Рассмотрим частные случаи частотного уравнения.

1. Если $N_1 = L_1$ (верхнее полупространство является изотропным и упругим) и $P_2 = 0$, $d \to 1$, $\alpha = 0$ (нижнее полупространство является однородным изотропным упругим и свободным от напряжений), то уравнение (2.3) принимает следующий вид:

$$\mathrm{tg}\,(qkH) = \frac{C_{44}q(N_1S_1 + N_3Fk)}{C_{44}^2b^2 + C_{46}k^2 - N_1N_3S_1Fk}\,. \tag{2.4}$$

2. Если помимо условий, указанных для случая 1, выполняется равенство $S_1 = 0$ (верхнее полупространство отсутствует), то частотное уравнение (2.4) сводится к следующему:

$$\mathrm{tg}\,\Big(\sqrt{\frac{P_1}{2C_{44}} + \frac{c^2}{\beta_2^2} + \frac{C_{46}^2}{C_{44}^2} - \frac{C_{66}}{C_{44}}}\,kH\Big) =$$

$$= \frac{N_3C_{44}\sqrt{P_1/(2C_{44}) + c^2/\beta_2^2 + C_{46}^2/C_{44}^2 - C_{66}/C_{44}}\,\sqrt{1 - c^2/\beta_3^2}}{C_{44}^2(P_1/(2C_{44}) + c^2/\beta_2^2 - C_{66}/C_{44}) + C_{46}}\,. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) представляет собой уравнение дисперсии для SH-волны в первоначально напряженном триклинном слое, находящемся над однородным упругим полупространством.

3. Если помимо условий, указанных для случая 2, выполняются равенства $P_1 = 0$, $C_{46} = 0$, $C_{44} = C_{66} = N_2$, то уравнение (2.5) сводится к следующему:

$$\operatorname{tg}\Big[\Big(\frac{c^2}{\beta_2^2} - 1\Big)^{1/2} kH\Big] = \frac{N_3}{N_2}\,\frac{(1 - c^2/\beta_3^2)^{1/2}}{(c^2/\beta_2^2 - 1)^{1/2}}\,. \tag{2.6}$$

Здесь $\beta_2 < c < \beta_3$; $\beta_2 = \sqrt{N_2/\rho_2}$; $\beta_3 = \sqrt{N_3/\rho_{11}}$.

Уравнение (2.6) представляет собой частотное уравнение для классической волны Лява, распространяющейся в однородном слое, расположенном над однородным полупространством [1].

3. Результаты численных расчетов. Зависимости фазовой скорости от волнового числа вычислялись методом деления отрезка пополам с использованием пакета MATLAB и приведены на рис. 2–5. Расчеты проводились с использованием следующих значений параметров: для верхнего трансверсально-изотропного полупространства (цинк) $N_1 = 6{,}7 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $L_1 = 3{,}96 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho_1 = 7140$ кг/м^3 [4]; для триклинного слоя (песчаник горного массива Вогезы) $C_{44} = 5{,}64 \cdot 10^9$ Н/м^2, $C_{46} = 0$, $C_{66} = 6{,}912 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho_2 = 2400$ кг/м^3 [8]; для нижнего анизотропного пористо-упругого полупространства (песчаник, насыщенный водой) $N_3 = 0{,}922 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho_{11} = 1{,}9032 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 0{,}268 \cdot 10^3$ кг/м^3 [25]. Остальные параметры задачи имели следующие значения: $P_1/(2C_{44}) = 0{,}75$, $P_2/(2N_3) = 0{,}2$, $d = 0{,}2$, $\alpha H = 15$.

На рис. 2 приведена зависимость фазовой скорости c_2/β_2 от волнового числа kH при различных начальных значениях напряжения $P_1/(2C_{44})$ в триклинном слое. Видно, что с увеличением начального напряжения и волнового числа фазовая скорость уменьшается.

На рис. 3 показана зависимость фазовой скорости от волнового числа при различных начальных значениях напряжения $P_2/(2N_3)$ в нижнем полупространстве. Из рис. 3 следует, что с увеличением начального напряжения $P_2/(2N_3)$ фазовая скорость уменьшается.

На рис. 4 представлена зависимость фазовой скорости от волнового числа для SH-волн при различных значениях пористости d. Видно, что фазовая скорость уменьшается с увеличением параметра пористости.

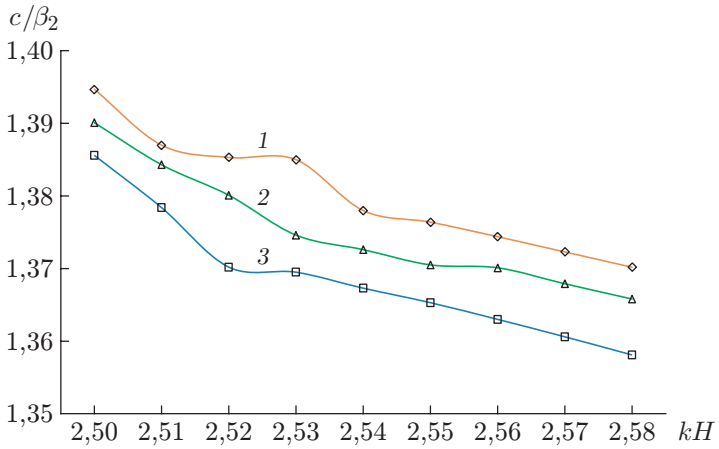

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от волнового числа при различных начальных значениях напряжения $P_1/(2C_{44})$ в триклинном слое:
1 — $P_1/(2C_{44}) = 0{,}71$, *2* — $P_1/(2C_{44}) = 0{,}73$, *3* — $P_1/(2C_{44}) = 0{,}75$

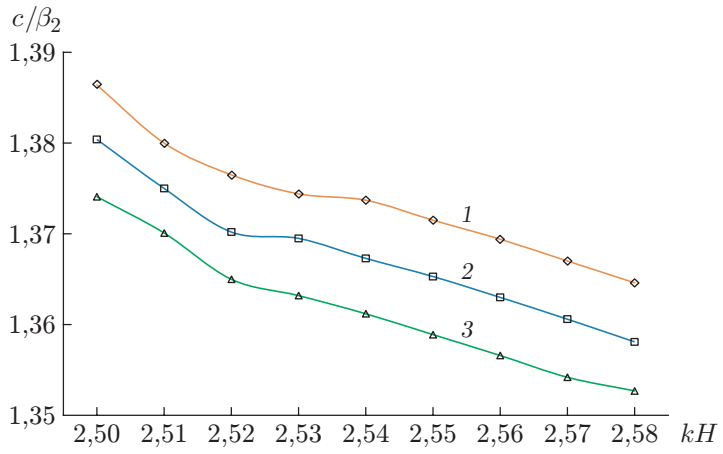

Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от волнового числа при различных начальных значениях напряжения $P_2/(2N_3)$ в нижнем полупространстве:
1 — $P_2/(2N_3) = 0{,}16$, *2* — $P_2/(2N_3) = 0{,}20$, *3* — $P_2/(2N_3) = 0{,}24$

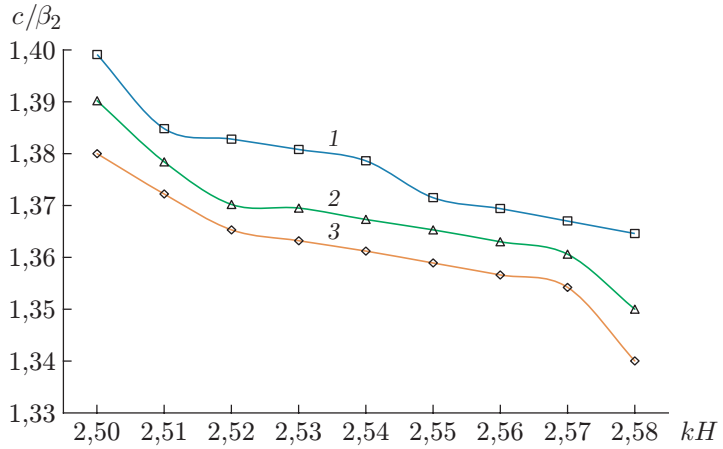

Рис. 4. Зависимость фазовой скорости от волнового числа для SH-волн при различных значениях пористости d:
1 — $d = 0{,}15$, *2* — $d = 0{,}20$, *3* — $d = 0{,}25$

На рис. 5 приведена зависимость фазовой скорости от волнового числа при различных значениях параметра неоднородности αH. Из рис. 5 следует, что с увеличением параметра неоднородности αH фазовая скорость уменьшается.

Заключение. В работе изучено распространение SH-волн в триклинном слое, расположенном между трансверсально-изотропным упругим полупространством и неоднородным пористо-упругим полупространством, при наличии в нем начального напряжения. Выражения для перемещений в слое и полупространствах получены в замкнутом виде. Решение для неоднородного пористо-упругого полупространства выражается через функции Уиттекера. Изучено влияние начального напряжения в триклинном слое, пористости и неоднородности полупространств на фазовую скорость волны. Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы. С увеличением безразмерного волнового числа фазовая скорость уменьшается. При наличии начальных напряжений и при увеличении параметра неоднородности фазовая скорость уменьшается, а при увеличении пористости — увеличивается. В отсутствие верхнего полупространства, начального

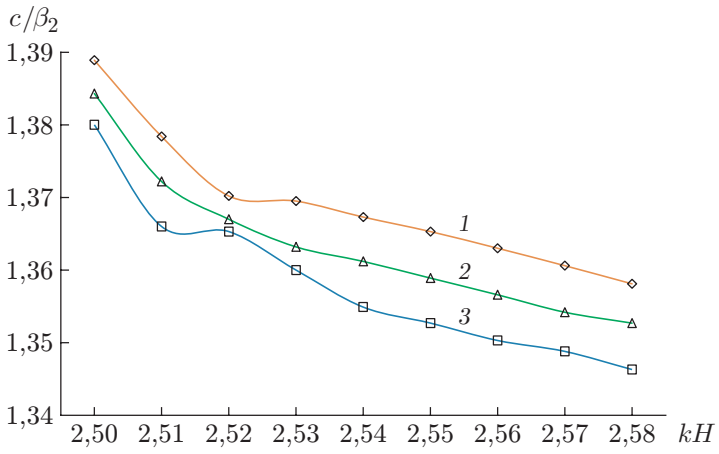

Рис. 5. Зависимость фазовой скорости от волнового числа при различных значениях параметра неоднородности αH:
1 — $\alpha H = 15{,}0$, *2* — $\alpha H = 15{,}5$, *3* — $\alpha H = 16{,}0$

напряжения и неоднородности материала дисперсионное соотношение совпадает с классическим соотношением для волн Лява.

Полученные результаты могут быть использованы при разведке месторождений кристаллов и минералов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ewing W. M.** Elastic waves in layered media / W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, F. Press. N. Y.: McGraw-Hill, 1957.
2. **Bhattacharya S. N.** Exact solution of SH-wave equation for inhomogeneous media // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1970. V. 60, N 6. P. 1847–1859.
3. **Keith C. M., Crampin S.** Seismic body waves in anisotropic media: Propagation through a layer // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1977. V. 49. P. 209–223.
4. **Payton R. G.** Elastic wave propagation in transversely isotropic media. Hague: Springer, 1983. (Mechanics of elastic and inelastic solids; V. 4).
5. **Chattopadhyay A., Pal A. K.** Dispersion curves of SH waves caused by irregularity in the prestressed internal stratum // Acta Geophys. Pol. 1983. V. 31, N 1. P. 37–49.
6. **Gupta S.** Reflection and transmission of SH-waves in laterally and vertically heterogeneous media at an irregular boundary // Geophys. Trans. 1987. V. 33, N 2. P. 89–111.
7. **Tomar S. K., Kumar R., Chopra A.** Reflection/refraction of SH waves at a corrugated interface between transversely isotropic and visco-elastic solid half-spaces // Acta Geophys. Pol. 2002. V. 50, N 2. P. 231–250.
8. **Chattopadhyay A.** Wave reflection and refraction in triclinic crystalline medium // Arch. Appl. Mech. 2004. V. 73. P. 568–579.
9. **Chattopadhyay A., Michel V.** A model for spherical SH wave propagation in self-reinforced linearly elastic media // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 75, N 2/3. P. 113–124.
10. **Chattopadhyay A., Gupta S., Sharma V. K., Kumari P.** Propagation of SH waves in an irregular monoclinic crustal layer // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78. P. 989–999.
11. **Pallavika, Kalyani V. K., Chakraborty S. K., Sinha A.** Finite difference modeling of SH-wave propagation in multilayered porous crust // J. Ind. Geophys. Union. 2008. V. 12, N 4. P. 165–172.

12. **Daros C. H.** Green's function for SH-waves in inhomogeneous anisotropic elastic solid with power-function velocity variation // Wave Motion. 2013. V. 50, N 2. P. 101–110.
13. **Sahu S. A., Saroj P. K., Dewangan N.** SH-waves in viscoelastic heterogeneous layer over half-space with self-weight // Arch. Appl. Mech. 2014. V. 84, N 2. P. 235–245.
14. **Pal P. C., Mandal D.** Generation of SH-type waves due to shearing stress discontinuity in a sandy layer overlying an isotropic and inhomogeneous elastic half-space // Acta Geophys. 2014. V. 62. P. 44–58.
15. **Kakar R.** SH-wave propagation in a heterogeneous layer over an inhomogeneous isotropic elastic half-space // Earthquakes Structures. 2015. V. 9, N 2. P. 305–320.
16. **Parvez A., Kundu S., Gupta S.** Dispersion study of SH-wave propagation in an irregular magneto-elastic anisotropic crustal layer over an irregular heterogeneous half-space // J. King Saud Univ. — Science. 2016. V. 30. P. 301–310.
17. **Singh A. K., Kshitish Ch. M., Das A.** Propagation of SH-wave in a corrugated viscous sandy layer sandwiched between two elastic half-spaces // Waves Random Complex Media. 2017. V. 27, iss. 2. P. 213–240. DOI: 10.1080/17455030.2016.1213461.
18. **Kumari N., Chattopadhyay A., Kumar S., Singh A. K.** Propagation of SH-waves in two anisotropic layers bonded to an isotropic half-space under gravity // Waves Random Complex Media. 2017. V. 27, iss. 2. P. 195–212. DOI: 10.1080/17455030.2016.1212176.
19. **Gupta S.** Scattering of three-dimensional plane waves in a self-reinforced half-space lying over a triclinic halfspace // J. Geophys. Engng. 2018. V. 15. P. 759–774.
20. **Kumari P., Sharma V. K.** Dynamics of seismic waves in highly anisotropic triclinic media with intermediate monoclinic layer // Appl. Math. Model. 2019. V. 71. P. 375–393.
21. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28, N 2. P. 168–178.
22. **Biot M. A.** Mechanics of incremental deformations. N. Y.: Wiley and Sons, Inc., 1965.
23. **Chattopadhyay A., Chakraborty M., Mahata N. P.** SH waves in a porous layer of non-uniform thickness // Trans. Engrs. 1986. V. 34. P. 3–13.
24. **Sahu A., Chaudhary A., Saroj P. K., Chattopadhyay A.** Transference of SH-waves in fluid saturated porous medium sandwiched between heterogeneous half spaces // J. Solid Mech. 2017. V. 9, N 3. P. 619–631.
25. **Balu Ch., Rajitha G., Ramesh M., Reddy P. M.** Shear wave propagation in magneto-poroelastic dissipative isotropic medium sandwiched between two poroelastic half spaces // Intern. J. Pure Appl. Math. 2018. V. 118. P. 4645–4656.
26. **Sindhuja A., Rajitha G., Malla Reddy P.** Shear wave propagation in magneto poroelastic medium sandwiched between self-reinforced poroelastic medium and poroelastic half space // Engng Comput. 2020. V. 37, N 9. P. 3345–3359. DOI: 10.1108/ec-11-2019-0505.
27. **Whittaker E. T.** A course of modern analysis / E. T. Whittaker, G. N. Watson. Cambridge; N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1991.

Поступила в редакцию 1/II 2021 г.,
после доработки — 23/IV 2021 г.
Принята к публикации 26/VII 2021 г.