ПМТФ, № 5, 1976

УДК 533.5

«ПОЛЫЕ» ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В ЗАДАЧАХ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Н. Г. Преображенский, С. Л. Ширикова
(Новосибирск)

1. Известно, что многие модели и методы, применяемые при решении задач спектроскопии стационарной и квазистационарной оптически плотной плазмы, с незначительными изменениями могут быть перенесены и в радиационную газодинамику [1—3]. В то же время при анализе типичных газодинамических ситуаций (цилиндрических и сферических ударных волн, обтекания тела излучающим газом или плазмой, динамического скин-эффекта [4—6] и т. д.) нередко возникают потребности в привлечении специфических моделей. Это, в частности, относится к обширному классу функций источника, который характеризуется наличием «полости» в центральной области излучающего в данном интервале частот не полностью прозрачного объема газа или плазмы. «Полостью» может служить и тело, экранирующее центральную часть рассматриваемого светящегося объема. Разумеется, и среди традиционных задач спектроскопии плазмы можно указать такие, которые требуют введения в расчет «полых» функций источника. Типичный пример — разряды в инертных газах с вытесненной к периферии зоной свечения атомов [7].

Насколько известно, указанный класс функции источника до сих пор не исследовался и соответствующие ему особенности формирования контуров спектральных линий (а также и находимых с их помощью интегральных характеристик) не выяснялись. Попытка в некоторой степени заполнить этот пробел — цель данной работы.

2. Рассмотрим круговое сечение объема плазмы (фиг. 1), в котором выделены три концентрические зоны и некоторый луч зрения, для определенности пересекающий все три зоны. Условимся, что максимум функции источника находится в пределах зоны *2*, а зона *1* частично прозрачна. Точки l_1 и l_3 соответствуют границе зоны *3*: за ее пределами поглощение и испускание света в исследуемом частотном интервале можно не учитывать. Точка l_2 отвечает середине хорды $l_1l_2 = l_2l_3$, а l — некоторая произвольная точка, лежащая в любой из трех зон.

Введем безразмерную координату x

$$(ll_3/l_1l_2) = 2x + 1,$$

оптические толщины

$$\tau_x = \int\limits_0^x \varkappa(\nu, x')\, dx', \quad \tau = 2\int\limits_0^{1/2} \varkappa(\nu, x')\, dx'$$

($\varkappa$ — локальный коэффициент поглощения) и безразмерный оптический масштаб $\xi = \tau_x/\tau$. В точке l_1 $x = \xi = 1/2$, в l_2 $x = \xi = 0$ и в l_3 $x = \xi = -1/2$, а во всех промежуточных точках l $x \neq \xi$.

Используем обычное лучевое приближение [8], для которого уравнение переноса относительно интенсивности (энергетической яркости)

$I(\nu,\ x)$ имеет вид

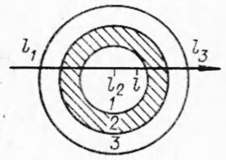
$$(dI(\nu,\ x)/d\tau) = \Phi(\nu,\ x) - I(\nu,\ x), \tag{2.1}$$

где $\Phi = (\varepsilon(\nu,\ x)/\varkappa(\nu,\ x))$ — функция источника (ε — коэффициент испускания).

Можно убедиться [9], что формальное решение уравнения (2.1) имеет вид

$$Y(\tau) = 2\tau \exp(-\tau/2) \int\limits_0^{1/2} \varphi(\nu, x) \operatorname{ch}(\tau, \xi)\, d\xi, \tag{2.2}$$

где $\varphi(\nu,\ x) = \Phi(\nu,\ x)/B(\nu_0,\ T)$; $Y(\tau) = I(\nu)/B(\nu_0,\ T)$. Здесь $B(\nu_0,\ T)$ — функция Планка с частотой ν_0, соответствующей центру линии, и некоторой эффективной температурой T.



Фиг. 1

В данной задаче фактического знания T, а следовательно, и $B(\nu_0,\ T)$ не требуется: планковский излучатель играет в расчетах лишь роль некоторого порогового калибровочного стандарта [1].

3. Общие свойства решения (2.2) при условии, когда $x \neq \xi$, а частота ν сохраняется в виде аргумента безразмерной функции источника $\varphi(\nu,\ x)$, исследованы достаточно подробно [9]. При этом показано, каким образом следует производить обобщение результатов, получаемых при существенно более простом подходе, когда (2.2) вырождается в несложное интегральное выражение

$$Y(\tau) = 2\tau \exp(-\tau/2) \int\limits_0^{1/2} \varphi(x) \operatorname{ch}(\tau x)\, dx. \tag{3.1}$$

В нашем случае также естественно исходить из формулы (3.1). Кроме того, на основании сопоставлений различных типов моделей [9] оказывается возможным оперировать с простыми параметрическими функциями ступенчатого, трапецеидального и треугольного видов, в этом случае $Y(\tau)$ представляется в виде нескольких несложных аналитических выражений.

А. Прямоугольная модель (фиг. 2, a). Определяем $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant |x| \leqslant s_1/2, \\ C & s_1/2 \leqslant |x| \leqslant s_2/2, \\ 0 & s_2/2 \leqslant |x| \leqslant 1/2 \end{cases}$$

и находим $C = (s_2 - s_1)^{-1}$ из условия нормировки

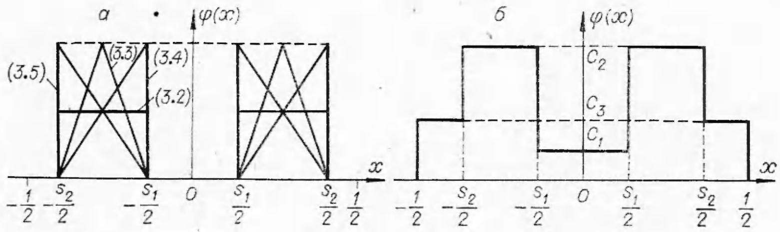
$$\int\limits_0^{1/2} \varphi(x)\, dx = 1/2.$$

Формула (3.1) дает

$$Y(\tau) = 2(s_2 - s_1)^{-1} \exp(-\tau/2)[\operatorname{sh}(\tau s_2/2) - \operatorname{sh}(\tau s_1/2)]. \tag{3.2}$$

Выбор прямоугольной модели соответствует предположению о том, что вторая зона является однородной, т. е. высвечивает как планковский излучатель, а зоны 1 и 3 содержат лишь атомы-абсорбенты. При этом $s_2 \geqslant s_1$, границы зоны 2 подвижны и s_1 и s_2 могут зависеть от времени. Устремляя $s_1 \to 0$ и считая $s_2 < 1$, приходим к известной модели Ньюмена—Бликера, подробно изучавшейся в [10].

Б. Треугольные модели (см. фиг. 2, *а*). Сохраняя те же граничные параметры s_1 и s_2, учитывая нормировку функции $\varphi(x)$ и фиксируя вершину треугольника в точках $|x_0|=(s_1+s_2)/4$ (равнобедренный треугольник), $|x_0|=$



Фиг. 2

$=s_1/2$ и $|x_0|=s_2/2$ (прямоугольные треугольники), находим соответственно

$$Y(\tau,\ |x_0| = (s_1+s_2)/4) = (16/\tau)(\exp(-\tau/2)/(s_2-s_1)^2 \times \times [\operatorname{ch}(\tau s_1/2) + \operatorname{ch}(\tau s_2/2) - 2\operatorname{ch}(\tau(s_1+s_2)/4)]; \tag{3.3}$$

$$Y(\tau,\ |x_0| = s_1/2) = (8/\tau)(\exp(-\tau/2)/(s_2-s_1)^2)[\operatorname{ch}(\tau s_2/2) - - \operatorname{ch}(\tau s_1/2) - (\tau/2)(s_2-s_1)\operatorname{sh}(\tau s_1/2)]; \tag{3.4}$$

$$Y(\tau,\ |x_0| = s_2/2) = (8/\tau)(\exp(-\tau/2)/(s_2-s_1)^2)[\operatorname{ch}(\tau s_1/2) - - \operatorname{ch}(\tau s_2/2) + (\tau/2)(s_2-s_1) s \operatorname{h}(\tau s_2/2)]. \tag{3.5}$$

При вырождении треугольника в δ-функцию Дирака ($s_1 = s_2 = s$) имеем

$$Y(\tau) = \tau \exp(-\tau/2) \operatorname{ch}(\tau s/2).$$

В случае $s = 0$, когда δ-функция из второй зоны перемещается на ось излучателя, получаем хорошо известный результат [9], соответствующий бесконечно тонкой светящейся нити, окруженной слоем поглощающих атомов.

В. Ступенчатая трехзональная модель (фиг. 2, *б*). Обобщим прямоугольную модель с учетом того обстоятельства, что зоны *1* и *3* могут быть не только поглощающими, но и способны вносить определенный вклад в энергетический поток. Каждую из трех зон для простоты считаем однородной

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 & 0 \leqslant |x| < s_1/2, \\ C_2 & s_1/2 \leqslant |x| \leqslant s_2/2, \\ C_3 & s_2/2 \leqslant |x| \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Из трех констант C_1, C_2 и C_3 в силу условия нормировки независимы лишь две. Введем поэтому отношения $\gamma_1 = (C_1/C_2) \leqslant 1$ и $\gamma_2 = (C_3/C_2) \leqslant 1$. Получаем

$$Y(\tau) = 2\exp(-\tau/2)/(\gamma_2 + s_2(1-\gamma_2) - s_1(1-\gamma_1))[\gamma_2 \operatorname{sh}(\tau/2) + + (1-\gamma_2)\operatorname{sh}(\tau s_2/2) - (1-\gamma_1)\operatorname{sh}(\tau s_1/2)]. \tag{3.6.}$$

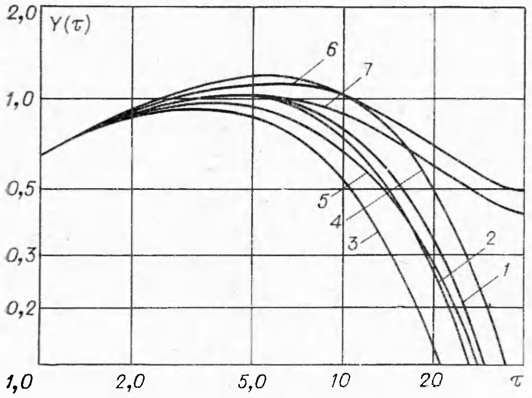
Устремляя s_1 к нулю, приходим к описанному в [9] классу ступенчатых двухзональных моделей.

Переход от $Y(\tau)$ непосредственно к контуру реабсорбированной линии $I(\nu)$ осуществляется с помощью соотношения

$$\tau = \tau_{\max} Q(\nu),$$

где $Q(\nu)$ — нормированный профиль линии, излучаемый оптически тонким слоем с максимумом в $\nu = \nu_0$; τ_{max} — оптическая толщина, вычисленная для $\nu = \nu_0$.

4. Некоторые результаты расчетов зависимостей $Y(\tau)$ с различными «полыми» функциями источника представлены в логарифмическом масштабе на фиг. 3—5.



Фиг. 3

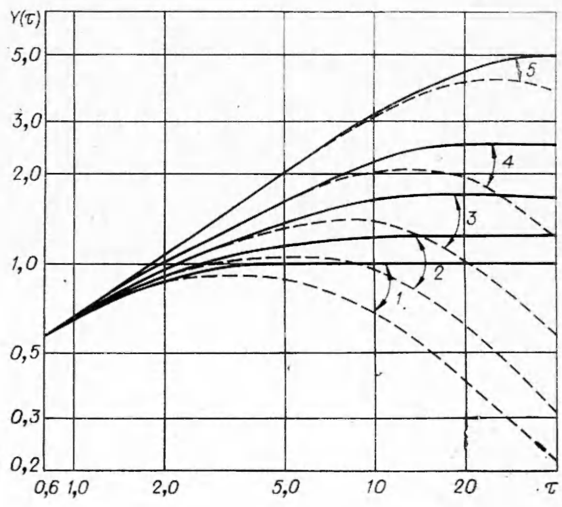
Влияние типов моделей функции источника $\varphi(x)$ на ход относительной энергетической яркости $Y(\tau)$ при граничных параметрах $s_1 = 0{,}4$ и $s_2 = 0{,}8$ показано на фиг. 3, где кривым соответствуют номера расчетных формул $Y(\tau)$: *1* — (3.2); *2* — (3.3); *3* — (3.4); *4* — (3.5); *5* — (3.6); $\gamma_1 = 0{,}2$, $\gamma_2 = 0$; *6* — (3.6); $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0{,}2$; *7* — (3.6), $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}2$.

Видно, что во всех случаях, когда $\gamma_2 = 0$, общий характер зависимости $Y(\tau)$ сохраняется. При наличии периферической излучающей зоны ($\gamma_2 \neq 0$) с ростом оптической толщины ход $Y(\tau)$ резко меняется: депрессия контура [8] приостанавливается и энергетическая яркость в центральной части линии выходит на асимптоту

$$Y_0 = \gamma_2[\gamma_2 + s_2(1 - \gamma_2) - s_1(1 - \gamma_1)]^{-1}$$

Предсказывавшийся в [9, 11] «надпланковский» избыток интенсивности в некотором интервале $\Delta\tau$ заметен на кривых *4* и *6*.

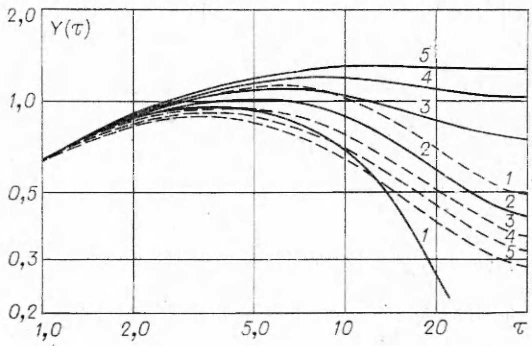
На фиг. 4 сравниваются два семейства кривых, отражающих роль параметра s_1 в формировании зависимости $Y(\tau)$ для случаев прямоугольной (сплошная линия, формула (3.2)) и треугольной (штриховая линия, формула (3.3)) моделей функции источника, причем параметр $s_2 = 1$, т. е. самостоятельной зоны *3* как бы не существует. Подобная картина близка к случаю сильной ударной волны или светящегося скин-слоя, вытесняющего периодическую поглощающую оболочку. Параметр s_1 варьируется (0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8). Видно, что с ростом τ для двух моделей $\varphi(x)$ ход $Y(\tau)$ существенно меняется. В одном случае наблюдается выход на «планковскую» или «надпланковскую» асимптоту (прямоугольник), в другом — кривые проходят через максимум и устремляются к нулю, что соот-



Фиг. 4

ветствует самообращению линии с интенсивностью в вершинах, которая может превышать планковский порог (треугольник). Применительно к подобным ситуациям известный пирометрический метод Бартельса [12] должен быть модифицирован.

На фиг. 5 приведены результаты расчетов $Y(\tau)$ для случая трехзональной ступенчатой модели (формула (3.6)). Сплошной линией показаны кривые с изменяющимся параметром γ_2 (0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8) и $\gamma_1 = 0{,}2$; штриховой линией — кривые с изменяющимся параметром γ_1 (0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8), а $\gamma_2 = 0{,}2$. Видно, что, хотя периферическая зона в два раза уже центральной ($s_1 = 0{,}4$, $s_2 = 0{,}8$), ее роль в формировании реабсорбированных контуров линий значительно существеннее, это можно понять из общих зависимостей, относящихся к дивергенции лучистого потока неоднородного излучателя [9, 11].

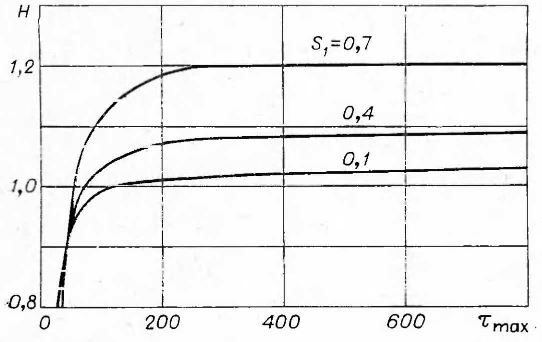


Фиг 5.

Вопросы непосредственного формирования контуров линий, расчетов интегральных спектральных характеристик неоднородных оптически плотных объектов с «полыми» функциями источника, а также постановки соответствующих обратных (диагностических) задач предполагается рассмотреть отдельно.

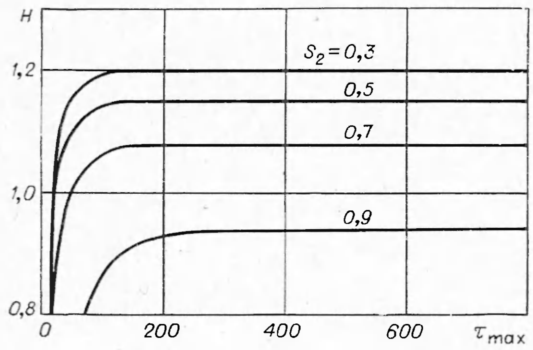
Выше обсуждалась роль так называемых «полых» функций источника в задачах радиационной газодинамики. Отличительная черта таких функций — смещение их максимума относительно оси потока. Рассматривались соответствующие прямые задачи: рассчитывалась зависимость безразмерной энергетической яркости от оптической толщины слоя, выяснялись некоторые особенности формирования контура выходящей (реабсорбированной) линии, причины происхождения «надпланковских» избытков энергетической яркости и т. п. Ниже предлагается один из способов оценки тех параметров, которыми определяются размеры и форма «полости» у функции источника.

Ограничимся оценками граничных параметров s_1 и s_2 в наиболее важном с прикладной точки зрения [13,3] интервале максимальных оптических толщин слоя: $10^2 \leqslant \tau_{max} \leqslant 10^3$. Во многих задачах радиационной газодинамики существенно определить именно не столько s_1 и s_2 по отдельности, сколько их разность $\Delta s = s_2 - s_1$, так как эта величина в явном виде входит как в уравнение переноса излучения, так и в уравнение энергии (член с дивергенцией радиационного потока) [14]. Заметим также, что из-за достаточно больших значений τ_{max}, указанных выше, исходный профиль линии с хорошей точностью может считаться дисперсионным.



Фиг. 6

Успех решения поставленной задачи во многом определяется выбором подходящего функционала (квазиинварианта) H, который был бы малочувствителен к величине τ_{max} внутри заданного интервала $\Delta\tau_{max}$ и к форме профиля «полой» функции источника, каждая из половин которой характеризуется шириной Δs. Кроме того, важно, чтобы H без особых трудностей и с приемлемой точностью фиксировался экспериментально. Изменение H при вариации s_1, когда параметр s_2 закреплен, и вариации s_2, когда закреплен параметр s_1, должно быть по возможности идентичным.



Фиг. 7

Указанным требованиям вполне отвечает функционал H такого вида: интегрируется область провала самообращения выходящего контура линии, отнесенная к величине частотного интервала, который разделяет максимумы самообращения. Отметим, что подобный функционал в связи с другой задачей рассматривался в работе [15].

На фиг. 6 показана рассчитанная на ЭВМ зависимость $H(\tau_{max})$ для случая, когда $S_2 = 0{,}8$, а s_1 растет от 0,1 до 0,7; на фиг. 7 приведена та же зависимость, но в условиях, когда $s_1 = 0{,}2$, а s_2 растет от 0,3 до 0,9.

Как непосредственно видно из приводимых результатов расчета, функционал H (Δs) можно рекомендовать в целях диагностики потоков плазмы и нагретых газов при наличии «полых» функций источника. При этом более точно могут быть найдены малые значения разности Δs; однако и для интервала значений $0{,}5 \leqslant \Delta s \leqslant 0{,}9$ систематическая ошибка определения не превышает 5—10%.

Авторы благодарны Р. И. Солоухину за внимание к работе, проф. Ш. Сукеверу (США, Принстонский ун-т) за полезные обсуждения и В. В. Пикалову за помощь в расчетах.

Поступила 14 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Penner S. S., Olfe D. B.** Radiation and reentry. N. Y., Academic Press, 1968.
2. **Sibulkin M.** Radiative properties of model gases for application in radiative energy transfer.— «J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer», 1968, vol. 8, N 1, p. 451.
3. **Modern** optical methods in gas dynamic research.— In: Proc. Intern. Symposium. Syracuse Univ. N. Y., 1971.
4. **Kubo S.** Asymptotic theory of an optically thick radiating gas flow past a smooth boundary at moderate radiation strength.— «J. Phys. Soc. Japan», 1972, vol. 33, N 1, p. 246.
5. **Ludvig C. B.** Measurement of the curves-of-growth of hot water vapor.— «Appl. Optics», 1971, vol. 10, N 5, p. 1057.
6. **Pyare Ram, Abu-Romia M. M.** Plasma radiation effects in tube arc heating. Pap. ASME, 1971, N HT-18.
7. **Колесников В. Н.** Дуговой разряд в инертных газах.—«Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева», 1964, т. 30, с. 66.
8. **Томас Р., Атей Р.** Физика солнечной хромосферы. М., «Мир», 1965.
9. **Преображенский Н. Г.** Спектроскопия оптически плотной плазмы. Новосибирск, «Наука», 1971.

10. **Преображенский Н. Г.** О повышении точности при спектральном определении малых содержаний.— «Изв. СО АН СССР», 1962, № 12, с. 75.
11. **Pomraning G. C.** The equations of radiation hydrodynamics. Oxford, Pergamon Press, 1973.
12. **Bartels H.** Über das Spektrum des dichten Plasmas.— In: Probleme des Plasmas in Physik und Astronomie. Berlin, 1958.
13. **Современные** проблемы газовой динамики. Под ред. Лоха У. Х. Т. М., «Мир», 1971.
14. **Бай Ши-и.** Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.
15. **Соляникова В. А.** Метод определения параметров плазмы по самообращенным контурам спектральных линий.— «Оптика и спектроскопия», 1976, т. 40, № 2.

УДК 621.1.016+536.24

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ПЕРЕНОСА

А. М. Шварцбург

(Новосибирск)

Решение интегро-дифференциального уравнения энергии для поглощающе-излучающей среды связано со значительными математическими трудностями. В связи с этим при расчете радиационного теплообмена широко используются приближенные дифференциальные уравнения, содержащие коэффициенты переноса, осредненные по различным направлениям [1—8]. При анализе области применимости этого метода необходимо знать точные значения коэффициентов переноса и влияние их отклонения от осредненных значений на величину лучистого потока.

В работе [9] для расчета одномерных потоков излучения получено дифференциальное уравнение и граничные условия к нему:

(1) $$\partial^2 q/\partial\eta^2 - [\tau_0(\tau_0 + \delta\beta l)/A]q - 4\tau_0 n^2 \partial E/\partial\eta = 0;$$

(2) $$(1/\varepsilon - 1/2)q - (1/2\tau_0 m_1)\partial q/\partial\eta = (1 - 2/m_1)n^2 E \ (\eta = 0);$$

(3) $$q + (1/\tau_0 m_2)\partial q/\partial\eta = 4n^2 E/m_2 - 2(1 - r)E_0 \ (\eta = 1);$$

$$A = \frac{\int\limits_{(4\pi)} \frac{\partial I(\eta, s)}{\partial s}\cos(s, y)\, d\omega_s}{\int\limits_{(4\pi)} \frac{\partial I(\eta, s)}{\partial y}\, d\omega_s}, \quad \delta = 1 - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} \gamma(\vartheta)\sin 2\vartheta\, d\vartheta,$$

$$m_1 = \frac{\int\limits_{(4\pi)} I(0, s)\, d\omega_s}{\int\limits_{(4\pi)} I(0, s)\,|\cos(s, y)|\, d\omega_s}, \quad m_2 = \frac{\int\limits_{(4\pi)} I(1, s)\, d\omega_s}{\int\limits_{(4\pi)} I(1, s)\,|\cos(s, y)|\, d\omega_s},$$

где q — безразмерный поток излучения, $q = Q/\sigma T_c^4$ (Q — результирующий поток излучения, T_c — характерная температура); η — безразмерная координата, $\eta = y/l$; τ_0 — оптическая толщина слоя толщиной l; β — коэффициент рассеяния; n — коэффициент преломления; E — безразмерная полусферическая плотность излучения абсолютно черного тела; ε — степень черноты пластины; r — коэффициент отражения; $I(\eta, s)$ —