15. **Гребенщиков В. Н.** Расчет круглой плиты, загруженной равномерно распределенной нагрузкой и распределенными по контуру моментами, с учетом неполного контакта плиты с полупространством // Изв. вузов. Стр-во и архитектура.— 1972.— № 7.
16. **Верлань А. Ф., Сизиков В. С.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие.— Киев: Наук. думка, 1986.

*Поступила 19/XI 1987 г.*

---

УДК 539.376

# О ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ СТАРЕЮЩЕГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

*Ф. Б. Милявская*

(*Чебоксары*)

В [1] введена модель стареющего вязкопластического материала. При этом предел текучести — интегральный оператор. В настоящей работе на основе модели [1] рассматривается развитие пластической зоны при двуосном растяжении пластины с эллиптическим отверстием из стареющего материала. Модель материала в упругоползучей зоне принята согласно [2, 3].

Методом малого параметра [4] получены два приближения для распределения напряжений, определена граница пластической зоны. Приводится численное решение задачи. Аналогичная задача для идеально упругопластического тела рассмотрена в [4].

Соотношения теории наследственно стареющего пластического тела — уравнения равновесия, условия несжимаемости и изотропии, условие наследственной пластичности — для плоской деформации имеют вид [1, 4]

$$\frac{\partial\sigma_x(t)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}(t)}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}(t)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y(t)}{\partial y}=0; \tag{0.1}$$

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y=0,\quad \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{\sigma_x(t)-\sigma_y(t)}=\frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}(t)}; \tag{0.2}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_x(t)-\sigma_y(t)}{k(t)}+\int\limits_{t_0}^{t}(\sigma_x(\tau)-\sigma_y(\tau))\,K^*(\tau,t)\,d\tau\right)^2+\left(\frac{\tau_{xy}(t)}{k(t)}+\int\limits_{t_0}^{t}\tau_{xy}(\tau)\,K^*(\tau,t)\,d\tau\right)^2=1. \tag{0.3}$$

Здесь $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$ — компоненты напряжений, зависящие от времени; $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\varepsilon_{xy}$ — компоненты скорости пластической деформации; $k(t)$ — переменный во времени предел текучести; $K^*(\tau, t)$ — ядро наследственного оператора.

1. Рассмотрим бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием с полуосями $a(1+c)$, $a(1-c)$, растягиваемую на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями $p_1(t)$ и $p_2(t)$; на контуре отверстия действует нормальное давление $p_0(t)$. Положим

$$c=d_1\delta,\quad (p_1(t)-p_2(t))/2=d_2\delta, \tag{1.1}$$

где $\delta$, $d_1$, $d_2$ — постоянные, принимающие значения в пределах

$$0\leqslant\delta\leqslant1,\quad 0\leqslant d_i\leqslant1\quad (i=1,\ 2). \tag{1.2}$$

Очевидно, при $d_1=0$, $d_2=1$ наблюдается двуосное растяжение толстой пластины с круговым отверстием [5], при $d_1=1$, $d_2=0$ имеет место пластина с эллиптическим отверстием под действием нормального давления.

Перейдем к безразмерным параметрам и переменным, оставив прежние обозначения. Предел текучести при $t\to\infty$ обозначим $k_\infty$ и все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к $k_\infty$, а имеющие размерность длины — к $\rho_s^{(0)}(t)$ (радиусу пластической зоны в нулевом приближении).

В принятых обозначениях уравнение эллипса в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$(1.3)\qquad x^2/[a^2(1+c)^2]+y^2/[a^2(1-c)^2]=1.$$

Пусть $\rho_*=\rho_*(\theta)$ — уравнение отверстия в полярных координатах. Переходя к полярным координатам $x=\rho_*\cos\theta$, $y=\rho_*\sin\theta$, преобразуем уравнение (1.3):

$$(1.4)\qquad \rho_*(\theta)=\frac{a\left(1-(\delta d_1)^2\right)}{\sqrt{1-2\delta d_1\cos 2\theta+(\delta d_1)^2}}.$$

Из выражения (1.4) запишем для $\rho_*(\theta)$ два приближения по параметру $\delta$:

$$(1.5)\qquad \rho_*(\theta)=a+ad_1\delta\cos 2\theta-\frac{3}{4}a\delta^2d_1^2(1-\cos 4\theta)+\dots$$

Предположим, что внутренний контур охвачен пластической зоной. Определим компоненты напряжений в пластической и ползучей зонах и радиус пластической зоны $\rho_s^{(\mathrm{I})}(t)$ в первом приближении:

$$(1.6)\qquad \sigma_\rho^{(\mathrm{I})p}+\frac{\partial\sigma_\rho^{(0)p}}{\partial\rho}\rho_*^{(\mathrm{I})}=\frac{\partial p_\nu}{\partial\rho}\rho_*^{(\mathrm{I})},\quad \tau_{\rho\theta}^{(\mathrm{I})p}-\left(\sigma_\theta^{(0)p}-\sigma_\rho^{(0)p}\right)\dot R_1=\frac{\partial p_\tau}{\partial\rho}\rho_*^{(\mathrm{I})},$$

где $\sigma_\rho^{(n)}$, $\sigma_\theta^{(n)}$, $\tau_{\rho\theta}^{(n)}$ — компоненты напряжений; $n$ — номер приближения;

$$(1.7)\qquad R_1=\frac{\rho_*^{(\mathrm{I})}}{\rho_*^{(0)}},\quad \dot R_1=\frac{\partial\rho_*^{(\mathrm{I})}}{\partial\theta}$$

(согласно (1.5), $\rho_*^{(0)}=a$, $\rho_*^{(\mathrm{I})}=ad_1\cos 2\theta$).

В уравнениях (1.6) для рассматриваемой задачи правые части обращаются в нуль, так как $p_\nu=p_0(t)$ не зависит от $\rho$, а $p_\tau=0$. Выражения для $\sigma_\rho^{(0)}$ и $\sigma_\theta^{(0)}$ получены в [5]:

$$(1.8)\qquad \sigma_\rho^{(0)p}=2k(t)\varphi(t)\ln\frac{\rho}{a}-p_0(t),\quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p}=0,$$

$$\sigma_\theta^{(0)p}=2k(t)\varphi(t)\left(\ln\frac{\rho}{a}+1\right)-p_0(t).$$

Здесь и ниже индекс $p$ взят для обозначения пластической зоны, а $e$ — для упругоползучей; $\varphi(t)$ — функция от времени [5].

Условие (0.3) для первого приближения имеет вид [5]

$$(1.9)\qquad \sigma_\rho^{(\mathrm{I})p}=\sigma_\theta^{(\mathrm{I})p}=0.$$

Таким образом, граничные условия (1.6) на границе $\rho_*=a$ с учетом (1.7) — (1.9) следующие:

$$(1.10)\qquad \sigma_\rho^{(\mathrm{I})p}=-2d_1k(t)\varphi(t)\cos 2\theta,\quad \sigma_\theta^{(\mathrm{I})p}=\sigma_\rho^{(\mathrm{I})p},$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(\mathrm{I})p}=-4d_1k(t)\varphi(t)\sin 2\theta.$$

Запишем уравнение (0.1) в полярной системе координат:

$$(1.11)\qquad \frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}=0,\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0.$$

Решая дифференциальные уравнения (1.11), с учетом (1.9) и (1.10) получим выражения для напряжений в пластической зоне в первом приближении:

$$(1.12)\qquad \sigma_\rho^{(\mathrm{I})p}=\frac{2ad_1}{\rho}\varphi(t)k(t)\left(\sqrt{3}\sin\chi-\cos\chi\right)\cos 2\theta,\quad \sigma_\theta^{(\mathrm{I})p}=\sigma_\rho^{(\mathrm{I})p},$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(\mathrm{I})p}=\frac{4ad_1}{\rho}\varphi(t)k(t)\cos\chi\sin 2\theta\quad\left(\chi=\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{a}\right).$$

Далее рассмотрим зону ползучести при граничных условиях на бесконечности в полярной системе координат:

$$\sigma_\rho^{(\infty)e} = p(t) - \delta d_2 \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^{(\infty)e} = p(t) + \delta d_2 \cos 2\theta, \tag{1.13}$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(\infty)e} = \delta d_2 \sin 2\theta, \quad p(t) = \frac{1}{2}(p_1(t) + p_2(t)).$$

Из (1.13) для первого приближения

$$\sigma_{\rho(\infty)}^{(\mathrm{I})e} = -d_2 \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta(\infty)}^{(\mathrm{I})e} = d_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta(\infty)}^{(\mathrm{I})e} = d_2 \sin 2\theta, \tag{1.14}$$

а для последующих приближений

$$\sigma_{\theta(\infty)}^{(n)e} = \sigma_{\rho(\infty)}^{(n)e} = 0, \quad \tau_{\rho\theta(\infty)}^{(n)e} = 0 \quad (n \geqslant 2). \tag{1.15}$$

Распределение напряжений и граница пластической зоны в нулевом приближении соответствуют осесимметричному состоянию плоскости с круговым отверстием [5]:

$$\sigma_\rho^{(0)e} = p(t) - \frac{\varphi(t)k(t)}{\rho}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = p(t) + \frac{\varphi(t)k(t)}{\rho}, \tag{1.16}$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad \rho_s^{(0)}(t) = \exp\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{p(t)}{\varphi(t)k(t)} - 1\right).$$

Выпишем условия сопряжения решений для $\sigma_\rho^{(n)}$ на границе $\rho = 1$:

$$\left[\sigma_\rho^{(\mathrm{I})} + \frac{\partial\sigma_\rho^{(0)}}{\partial\rho}\rho_s^{(\mathrm{I})}\right] = 0 \quad (n = \mathrm{I}), \tag{1.17}$$
$$\left[\sigma_\rho^{(\mathrm{II})} + \frac{\partial\sigma_\rho^{(\mathrm{I})}}{\partial\rho}\rho_s^{(\mathrm{I})} + \frac{\partial^2\sigma_\rho^{(0)}}{\partial\rho^2}\frac{(\rho_s^{\mathrm{I}})^2}{2} + \frac{\partial\sigma_\rho^{(0)}}{\partial\rho}\rho_s^{(\mathrm{II})}\right] = 0 \quad (n = \mathrm{II}).$$

Условия сопряжения для компонент $\sigma_\theta^{(n)}$ и $\tau_{\rho\theta}^{(n)}$ имеют аналогичный вид [4]. Из условий (1.17) с учетом (1.8) и (1.16) получим граничные условия для $\rho = 1$:

$$\sigma_\theta^{(\mathrm{I})e} = 2ad_1\varphi(t)k(t)(\sqrt{3}\sin\chi^* - \cos\chi^*)\cos 2\theta + 4\varphi(t)k(t)\rho_s^{(\mathrm{I})}, \tag{1.18}$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(\mathrm{I})e} = -4ad_1\varphi(t)k(t)\sin 2\theta \quad \left(\chi^* = \sqrt{3}\ln\frac{\rho_s^{(0)}(t)}{a}\right).$$

Для несжимаемого упругоползучего материала решение задачи тождественно совпадает с решением для упругого тела [2]. Согласно [6], с учетом граничных условий (1.14), (1.18) находим распределение напряжений и радиус пластической зоны в первом приближении:

$$\sigma_\rho^{(\mathrm{I})e} = \cos 2\theta\left[\left(\frac{4}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} - 1\right)d_2 + 2\sqrt{3}\,ad_1\varphi k\sin\chi^*\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4}\right) + \right. \tag{1.19}$$
$$\left. + 2ad_1\varphi k\cos\chi^*\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right)\right],$$
$$\sigma_\theta^{(\mathrm{I})e} = \cos 2\theta\left[\left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right)d_2 + \frac{2ad_1\varphi k}{\rho^4}(\sqrt{3}\sin\chi^* + 3\cos\chi^*)\right],$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(\mathrm{I})e} = \sin 2\theta\left[\left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right)d_2 + ad_1\varphi k\cos\chi^*\left(\frac{6}{\rho^2} - \frac{10}{\rho^4}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\sqrt{3}\,ad_1\varphi k\sin\chi^*\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4}\right)\right],$$
$$\rho_s^{(\mathrm{I})} = \left(\frac{d_2\rho_s^{(0)}(t)}{\varphi(t)k(t)} + 2d_1\cos\chi^*\right)\cos 2\theta.$$

**2.** Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид (1.11). Запишем условие пластичности (0.3) во втором приближении [5], приняв нижний предел интегрирования $t_0 = 0$:

$$(2.1)\qquad \frac{\sigma_\rho^{(II)p}(t) - \sigma_\theta^{(II)p}(t)}{k(t)} + \int_0^t 2K^*(\tau, t)\left(\sigma_\rho^{(II)p}(\tau) - \sigma_\theta^{(II)p}(\tau)\right) d\tau -$$

$$- \left(\frac{\tau_{\rho\theta}^{(I)p}(t)}{k(t)} + \int_0^t K^*(\tau, t)\, \tau_{\rho\theta}^{(I)p}(\tau)\, d\tau\right)^2 = 0.$$

Согласно линеаризированным граничным условиям во втором приближении [4], с учетом формул (1.7) — (1.9), (1.12) получим граничные условия на границе $\rho = a$:

$$(2.2)\qquad \sigma_\rho^{(II)p} = d_1 \varphi k (2 - 9\cos 4\theta), \quad \tau_{\rho\theta}^{(II)p} = -6 d_1^2 \varphi k \sin 4\theta.$$

Условие пластичности (2.1) с учетом (1.12) имеет вид

$$(2.3)\qquad f_1(t, \rho, \theta) + \int_0^t K_1(\tau, t) f_1(\tau, \rho, \theta)\, d\tau = F^*(\rho, \theta)\, F(t),$$

где $f_1(t, \rho, \theta) = \dfrac{\sigma_\rho^{(II)p}(t, \rho, \theta) - \sigma_\theta^{(II)p}(t, \rho, \theta)}{k(t)}$;

$$K_1(\tau, t) = 2K^*(\tau, t)\, k(\tau); \quad F^*(\rho, \theta) = \left(\frac{4ad_1}{\rho} \cos\chi \sin 2\theta\right)^2;$$

$$F(t) = \left(\varphi(t) + \int_0^t K^*(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right)^2.$$

Уравнение (2.3) есть интегральное уравнение Вольтерра II рода ($\rho$ и $\theta$ — параметры), его обращение [7]:

$$(2.4)\qquad f_1(t, \rho, \theta) = F^*(\rho, \theta)\, F(t) - \lambda \int_0^t F^*(\rho, \theta)\, \Gamma(t, \tau, \lambda)\, F(\tau)\, d\tau$$

$\left(\Gamma(t, \tau, \lambda) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}\right.$ — резольвентное ядро, а $\left.\lambda = -1\right)$. Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая

$$(2.5)\qquad \sigma_\rho^{(II)p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi^{(II)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \theta^2},$$

$$\sigma_\theta^{(II)p} = \frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(II)p} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \rho\, \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \theta^2}.$$

Подставив (2.5) в (2.3), с учетом (2.4) находим дифференциальное уравнение для определения функции напряжений $\Phi^{(II)}$:

$$(2.6)\qquad \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \Phi^{(II)}}{\partial \theta^2} = -k(t) f_1(t, \rho, \theta).$$

Решив уравнение (2.6) с граничными условиями (2.2), из выражений (2.5) имеем компоненты напряжений в пластической зоне во втором приближении:

$$(2.7)\qquad \sigma_\rho^{(II)p} = d_1^2 k \left(2\varphi - \frac{5}{2}\psi\right) + \frac{a d_1^2 k}{\rho} \cos 4\theta \left[\left(\frac{19}{2}\psi - 9\varphi\right)\cos\gamma -\right.$$

$$\left. - \sqrt{15}\left(\frac{3}{2}\psi - \varphi\right)\sin\gamma\right] + \frac{a^2 d_1^2 k \psi}{2\rho^2}\left[(4 - \sqrt{3}\sin 2\chi + \cos 2\chi) -\right.$$

$$\left. - \cos 4\theta\, (8 + 11\cos 2\chi - 7\sqrt{3}\sin 2\chi)\right],$$

$$\sigma_\theta^{(II)p} = d_1^2k\left(2\varphi - \frac{5}{2}\psi\right) + \frac{ad_1^2k}{\rho}\cos 4\theta\left[\left(\frac{19}{2}\psi - 9\varphi\right)\cos\gamma -\right.$$

$$\left.-\sqrt{15}\left(\frac{3}{2}\psi - \varphi\right)\sin\gamma\right] - \frac{ad_1^2k\psi}{2\rho^2}\left(4 + 7\cos 2\chi + \sqrt{3}\sin 2\chi\right) -$$

$$-\frac{a^2d_1^2k\psi}{2\rho^2}\cos 4\theta\left(3\cos 2\chi - 7\sqrt{3}\sin 2\chi\right),$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(II)p} = \frac{2ad_1^2k}{\rho}\sin 4\theta\left[(4\psi - 3\varphi)\cos\gamma + \sqrt{15}(\psi - \varphi)\sin\gamma\right] -$$

$$-\frac{a^2d_1^2k\psi}{\rho^2}\sin 4\theta\left(1 + 7\cos 2\chi + \sqrt{3}\sin 2\chi\right).$$

Здесь $\psi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\psi(t) = F(t) - \lambda\int_0^t K_1(t, \tau)\psi(\tau)\,d\tau; \quad k = k(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \gamma = \sqrt{15}\ln(\rho/a).$$

Из условий сопряжения (1.17) (вторая формула) с учетом (1.8), (1.12), (1.19), (2.7) получим граничные условия при $\rho = 1$:

$$\sigma_\rho^{(II)e} = A + B\cos 4\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(II)e} = D\sin 4\theta, \tag{2.8}$$

где $A = d_1^2k\left[\left(2\varphi - \frac{5}{2}\psi\right) + \frac{a^2\psi}{2}\left(4 - \sqrt{3}\sin 2\chi^* + \cos 2\psi^*\right)\right] - k\varphi\left(\frac{d_2}{k\varphi} + \right.$ $\left. + 2ad_1\cos\chi^*\right)^2;$

$$B = ad_1^2k\left[\left(\frac{19}{2}\psi - 9\varphi\right)\cos\gamma^* - \sqrt{15}\left(\frac{3}{2}\psi - \varphi\right)\sin\gamma^*\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\psi a^2\left(8 + 11\cos 2\chi^* - 7\sqrt{3}\sin 2\chi^*\right) - k\varphi\left(\frac{d_2}{k\varphi} + 2ad_1\cos\chi^*\right)^2;$$

$$D = 2ad_1^2k\left[(4\psi - 3\varphi)\cos\gamma^* + \sqrt{15}(\psi - \varphi)\sin\gamma^*\right] - a^2d_1^2k\psi\left(1 + 7\cos 2\chi^* + \right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\sin 2\chi^*\right) - 4\left(\frac{d_2}{k\varphi} + 2ad_1\cos\chi^*\right)\left(d_2 + 3ad_1k\varphi\cos\chi^*\right);$$

$$\gamma^* = \sqrt{15}\ln\frac{\rho_s^{(0)}(t)}{a}.$$

Из условий (2.8), согласно [6], находим компоненты напряжений, а затем радиус пластической зоны во втором приближении:

$$\sigma_\rho^{(II)e} = \frac{A}{\rho^2} + \cos 4\theta\left[B\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^6}\right) + 3D\left(\frac{1}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right)\right], \tag{2.9}$$

$$\sigma_\theta^{(II)e} = -\frac{A}{\rho^2} + \cos 4\theta\left[B\left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right) + D\left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{3}{\rho^6}\right)\right],$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(II)e} = \sin 4\theta\left[2B\left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^6}\right) + D\left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^2}\right)\right],$$

$$\rho_s^{(II)} = \frac{1}{4k\varphi}\left(M\cos 4\theta + N\right).$$

Здесь $M = \frac{a^2d_1^2k}{2}\left[(17\psi + 20\varphi)\cos 2\chi^* + (11\psi - 20\varphi)\sqrt{3}\sin 2\chi^* + 4(5\varphi - \psi)\right] -$ $- 4ad_1^2k\left[(4\psi - 3\varphi)\cos\gamma^* + \sqrt{15}(\psi - \varphi)\sin\gamma^*\right] + \frac{d_2}{k\varphi}(3d_2 + 16ad_1k\varphi\cos\chi^* -$ $- 4\sqrt{3}\,ad_1k\varphi\sin\chi^*);$

$$N = d_1^2k(5\psi - 4\varphi) - a^2d_1^2k(10\varphi - 3\psi)\cos 2\chi^* - \sqrt{3}\,a^2d_1^2k(4\varphi - \psi)\sin 2\chi^* -$$

$$-10a^2d_1^2k\varphi - \frac{3d_2^2}{k\varphi} - 4ad_1d_2\left(4\cos\chi^* - \sqrt{3}\sin\chi^*\right).$$

**3.** Из формул (1.16), (1.19), (2.9) запишем выражение для радиуса пластической зоны

$$\rho_s(t) = \exp\gamma + \delta\left(\frac{d_2}{k\varphi}\exp\gamma + 2d_1\cos\chi^*\right)\cos 2\theta + \frac{\delta^2}{4k\varphi}(M\cos 4\theta + N). \tag{3.1}$$

Пусть

$$k(t) = \frac{1-\beta\exp(-\alpha t)}{1-\beta}, \quad K^*(\tau) = \frac{\alpha\beta(1-\beta)\exp(-\alpha\tau)}{(1-\beta\exp(-\alpha\tau))^2},$$

$$\varphi(t) = \frac{(1-\beta\exp(-\alpha t))^2}{(1-\beta)^2}, \quad p_0(t) = 0,$$

$$p_1(t) = 5 - 3\exp(-0{,}1t),\ p_2(t) = 4{,}6 - 3\exp(-0{,}1t),$$

$$\delta = 0{,}2,\ \alpha = 0{,}1,\ \beta = 0{,}2,\ d_1 = d_2 = 1.$$

Анализ выражения (3.1) показывает, что отсутствие релаксации имеет место, если $\gamma(t)$ — возрастающая функция. На рис. 1 изображены контур отверстия (кривая *a*) и граница пластической зоны в различные моменты времени, линии *0 — 6* — положение границы в моменты времени с интервалом в единицу начиная с момента включения нагрузки, *7* — при $t\to\infty$. На рис. 2 дано изменение $\rho_s(t)$ в зависимости от времени для трех направлений ($\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$ — линии *1—3*), время изменяется с момента включения нагрузки до бесконечности.

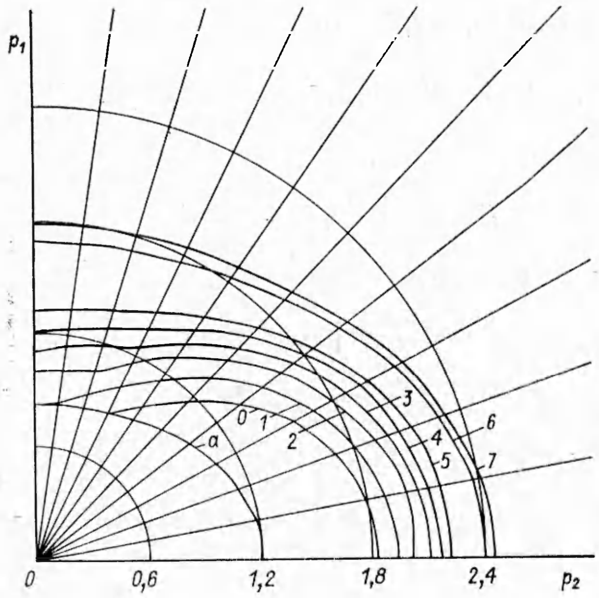


Рис. 1

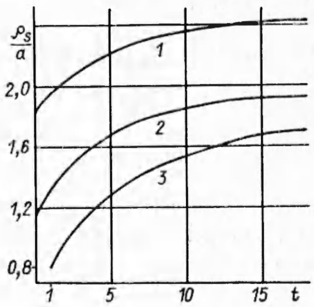


Рис. 2

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Арутюнян Н. Х., Ивлев Д. Д.** К теории вязкопластичности неоднородно-стареющих тел // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1982.— Т. 35, № 5.
2. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые вопросы теории ползучести.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
3. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
4. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела.— М.: Наука, 1978.
5. **Милявская Ф. Б.** Двуосное растяжение пластины с круговым отверстием из стареющего упругопластического материала // Краевые задачи и их приложения.— Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1986.
6. **Бицено К. Б., Граммель Р.** Техническая динамика.— Л.: Гостехиздат, 1950.— Т. 1.
7. **Михлин С. Г.** Лекции по линейным интегральным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1959.


*Поступила 14/IX 1987 г.*